Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Μαθηματικά ΙΙΙ

Ενότητα 1: Μετασχηματισμός Laplace

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Ενεργειακής Τεχνολογίας ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 1

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

1.1 Ορισμός και θεώρημα ύπαρξης

Ορισμός 1.1 - 1 (ορισμός μετασχηματισμού). *Έστω $f(t)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[0, +\infty]$ και $\sigma > 0$ σταθερά. Τότε ορίζεται σαν μετασχηματισμός Laplace της f και συμβολίζεται με $\mathcal{L}[f(t)]$ ή συντομότερα $\mathcal{L}(f)$, η συνάρτηση που ορίζεται από την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος του 1ου είδους*[1]

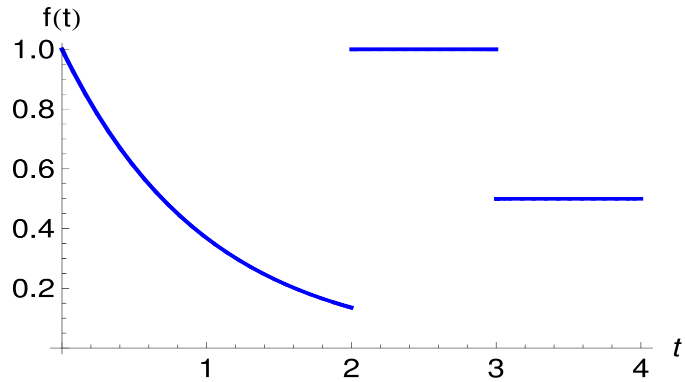
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \mu\varepsilon \quad s \geq \sigma, \tag{1.1 - 1}$$

όταν το ολοκλήρωμα υπάρχει. Η παράμετρος s είναι δυνατόν να είναι και μιγαδικός αριθμός, αν υποτεθεί ότι $Re(s) \geq 0$.

Η φυσική σημασία του μετασχηματισμού εξαρτάται από τη συνάρτησης $f(t)$. Στην $(1.1-1)$ η $f(t)$ λέγεται τότε ο **αντίστροφος μετασχηματισμός** της $F(s)$ και συμβολίζεται με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \tag{1.1 - 2}$$

[1] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.



Σχήμα 1.1 - 1: συνάρτηση $f(t)$ συνεχής για κάθε $t \in [0,2) \cup (2,3) \cup (3,4)$, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια στα σημεία $t = 2,\, 3$ με $\lim_{t\to 2-0} e^{-t} = e^{-1}$, $\lim_{t\to 2+0} f(t) = 1$, $\lim_{t\to 3-0} f(t) = 1$ και $\lim_{t\to 3+0} f(t) = 0.5$.

Στο εξής θα θεωρείται ότι το s είναι πραγματικός αριθμός και θα συμβολίζεται με τα κεφαλαία γράμματα F, X, I κ.λπ. οι μετασχηματισμένες κατά Laplace συναρτήσεις των f, x, i κ.λπ., αντίστοιχα.

Ορισμός 1.1 - 2. *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $[a,b]$ θα λέγεται* **κατά τμήματα συνεχής** *(Σχ. 1.1 - 1), όταν είναι ορισμένη για κάθε $t \in [a,b]$ και υποδιαιρώντας το διάστημα $[a,b]$ σε ν το πλήθος υποδιαστήματα της μορφής (a_k, b_k); $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$ το όριό της στα άκρα του διαστήματος (a_k, b_k) είναι πεπερασμένο για κάθε $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$.*

Ο ορισμός αυτός εύκολα γενικεύεται για την περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

Ορισμός 1.1 - 3. *Μια συνάρτηση $f(t)$ λέγεται* **συνάρτηση εκθετικής τάξης** *(function of exponential order), όταν υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με $t_0,\, M > 0$, έτσι ώστε*

$$|f(t)| < M\, e^{\gamma\, t} \quad \text{για κάθε} \quad t > t_0. \tag{1.1 - 3}$$

Τότε το γ ορίζει την τάξη της f.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η συνθήκη που πρέπει να ισχύει, έτσι ώστε να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 1.1 - 1 (ύπαρξης του μετασχηματισμού). *Έστω η συνάρτηση $f(t)$ που είναι ορισμένη για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν η f είναι*

i) κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$ όπου $\alpha > 0$,

ii) εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με t_0, $M > 0$, έτσι ώστε

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \textit{για κάθε } t \in [0, +\infty), \tag{1.1 - 4}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ υπάρχει για κάθε $s > \gamma$.

Η απαίτηση της κατά τμήματα συνεχούς συνάρτησης και η ισχύς της (1.1−4) ορίζουν τις λεγόμενεςσυνθήκες Dirichlet. Το σύνολο των συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet, δηλαδή των συναρτήσεων που υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, θα συμβολίζεται στο εξής με $D_{\mathcal{L}}$.

Δίνονται στη συνέχεια υπολογισμοί του μετασχηματισμού Laplace με τον Ορισμό 1.1 - 1.

Παράδειγμα 1.1 - 1

Έστω $f(t) = A$ όπου A σταθερά. Τότε[2]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_0^{+\infty} A e^{-st} dt = -\frac{A}{s} \lim_{x+\infty} e^{-st}\Big|_0^x \\ &= -\frac{A}{s}\left(\lim_{x+\infty} e^{-sx} - e^0\right) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}(A) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \tag{1.1 - 5}$$

[2] Η συνάρτηση e^x ορίζεται για κάθε $x \in \Re$ και ισχύει: $\lim_{x \to -\infty} = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$.

Παράδειγμα 1.1 - 2

Όμοια, έστω $f(t)=e^{-at}$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}\,dt \\ &= -\frac{1}{s+a}\lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)t}\Big|_0^x = -\frac{1}{s+a}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)x} - e^0\right] \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \text{όταν} \quad s+a>0.\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a} \quad \text{με} \quad s+a>0. \tag{1.1 - 6}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}\left[e^{3t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{-(-3)\,t}\right] = \frac{1}{s+3} \quad \text{με} \quad s+3>0.$$

1.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που με τη χρήση τους υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί των διαφόρων συναρτήσεων[3].

Θεώρημα 1.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω $f,\, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $\kappa,\, \lambda \in \Re$ ισχύει*

$$\mathcal{L}[\kappa f(t)+\lambda g(t)] = \kappa\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)]. \tag{1.2 - 1}$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται για ν-το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 1.2 - 1

Είναι γνωστό ότι αν $f(t)=\sin t$, τότε $\sin t = \left(e^{it}-e^{-it}\right)/2i$ όπου i η φανταστική μονάδα. Σύμφωνα με τον τύπο $(1.1-6)$ και τη γραμμική ιδιότητα

[3] Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύεται ότι ισχύουν επίσης και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace - Μάθημα 2.

έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin t) &= \frac{1}{2i}\,\mathcal{L}\left(e^{it}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right) = \frac{1}{2i}\,\mathcal{L}\left(e^{-(-\mathbf{i})\,t}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s+(-i)} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2+1}\,,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}\,. \tag{1.2 - 2}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}(\cos t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{it} + e^{-it}\right] = \frac{s}{s^2+1} \tag{1.2 - 3}$$

και

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at} - e^{-at}\right] = \frac{s}{s^2-a^2}\,, \tag{1.2 - 4}$$

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at} + e^{-at}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}\,, \tag{1.2 - 5}$$

όταν $s > a > 0$.

Θεώρημα 1.2 - 2. *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}\,F\left(\frac{s}{k}\right) \quad \text{με} \quad k > 0. \tag{1.2 - 6}$$

Παράδειγμα 1.2 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 - 2 και τον τύπο $(1.2-6)$ είναι

$$\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,, \tag{1.2 - 7}$$

$$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{με} \quad \omega > 0. \tag{1.2 - 8}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2+4}\,, \quad \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}\,, \quad \text{κ.λπ.}$$

Θεώρημα 1.2 - 3 (προπορείας). *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *και* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, *τότε*

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a), \quad \textit{όταν} \quad s+a > 0 \ \textit{και} \ a > 0. \tag{1.2 - 9}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 - 3 και τους τύπους $(1.2-7)$ - $(1.2-8)$ είναι:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\cos\omega t\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\,, \tag{1.2 - 10}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\,. \tag{1.2 - 11}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos 2t\right] &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}\,, \\
\mathcal{L}\left[e^{3t}\sin 2t\right] &= \mathcal{L}\left[e^{-(\mathbf{-3})\,t}\sin 2t\right] = \frac{2}{[s+(-3)]^2+2^2} \\
&= \frac{2}{s^2-6s+13}\,, \\
\mathcal{L}\left[e^{t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \mathcal{L}\left[e^{t}\left(\sin 2t\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{t}\sin 2t\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{t}\cos 2t\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{-(-\,\mathbf{t})}\sin 2t\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{-(-\,\mathbf{t})}\cos 2t\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2+2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s+1}{s^2-2s+5}\,.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.2 - 4 (υστέρησης). *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *με* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ *και*

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & \textit{αν} \quad t > a \\ 0 & \textit{αν} \quad t < a, \end{cases}$$

τότε

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as}F(s), \quad \text{όταν} \quad t > a > 0. \tag{1.2 - 12}$$

Με το θεώρημα αυτό δίνεται η δυνατότητα να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης, που ορίζεται για $t > a$ με $a > 0$. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων έχουμε στη μελέτη συστημάτων που ενεργοποιούνται τη χρονική στιγμή $t = a$ αντί της $t = a$.

Παράδειγμα 1.2 - 3

Επειδή $\mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{3\,!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 - 4 ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} (t-1)^3 & \text{αν} \quad t > 1 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 1 \end{cases} \qquad \text{είναι} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{6\,e^{-s}}{s^4}\,.$$

Άλλες εφαρμογές του Θεωρήματος 1.2 - 3 θα δοθούν στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 1.2 - 5. *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\,\frac{d\,F(s)}{ds} = -F'(s).$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά n φορές το Θεώρημα 1.2 - 5, τελικά προκύπτει

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n\,\frac{d^n\,F(s)}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s), \tag{1.2 - 13}$$

όταν $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

Παράδειγμα 1.2 - 4

Σύμφωνα με τον τύπο $(1.2-8)$ είναι: $\mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2+9}$. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(1.2-13)$ για $n = 1,\, 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t\,\sin 3t\right] &= (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\,, \\
\mathcal{L}\left[t^2\,\sin 3t\right] &= (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\right] = \frac{18\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3}\,.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.2 - 5

Όμοια σύμφωνα με τον τύπο $(1.2-8)$ είναι: $\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a}$ με $s+a>0$. Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά τον τύπο $(1.2-13)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t\,e^{-at}\right] &= (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^2\,e^{-at}\right] &= (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = \frac{\overbrace{2}^{2\,!}}{(s+a)^3}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^3\,e^{-at}\right] &= (-1)^3\,\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{2\,!}{(s+a)^3}\right] = \frac{\overbrace{2\cdot 3}^{3\,!}}{(s+a)^4}\,,\\
\cdots\quad & \quad\cdots\\
\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] &= (-1)^n\,\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{(n-1)\,!}{(s+a)^n}\right] = \frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] = \frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,, \tag{1.2 - 14}$$

όταν $n=0,\,1,\,\ldots$ και $s+a>0$.

Αν στην $(1.2-14)$ είναι $a=0$, τότε

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n\,!}{s^{n+1}}\,, \quad \text{όταν} \quad n=0,\,1,\,\ldots\,. \tag{1.2 - 15}$$

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους $(1.2-14)$ και $(1.2-15)$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[t^2\,e^{3t}\right] = \frac{2\,!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3}\,, \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{3\,!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}\,.$$

Θεώρημα 1.2 - 6 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s>a. \tag{1.2 - 16}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την (1.2 − 16) για τη δεύτερης τάξης παράγωγο της f, υποθέτοντας ότι η f'' είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s\,\mathcal{L}\left[f'(t)\right] - f'(0) = s\left\{s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\right\} - f'(0),$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \qquad (1.2 - 17)$$

Παράδειγμα 1.2 - 6

Έστω $f(t) = t\sin t$. Τότε $f(0) = 0$, ενώ $f'(t) = \sin t + t\cos t$, οπότε $f'(0) = 0$. Άρα σύμφωνα με την $(1.2 - 17)$ και με τύπο $(1.2 - 13)$ για $n = 1$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[t\sin t] - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[t\sin t] = \frac{2s^3}{\left(s^2+1\right)^2}\,.$$

Άλλες εφαρμογές του θεωρήματος θα δοθούν στη λύση των διαφορικών εξισώσεων (Μάθημα 4).

Το παρακάτω θεώρημα και το πόρισμα να παραλειφθούν σε πρώτη ανάγνωση.

Θεώρημα 1.2 - 7 (ολοκλήρωση του μετασχηματισμού). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει το $\lim_{t->0} \frac{f(t)}{t}$, τότε*

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(x)\,dx. \qquad (1.2 - 18)$$

Πόρισμα 1.2 - 1. *Επειδή $\lim_{s\to 0} e^{-st} = 1$, από την $(1.2 - 18)$ προκύπτει*

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(x)\,dx. \qquad (1.2 - 19)$$

Παράδειγμα 1.2 - 7

Από τον τύπο $(1.2 - 2)$ και τη σχέση $(1.2 - 18)$ προκύπτει

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s,$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right).$$

Τότε από την $(1.2 - 19)$ έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}. \qquad (1.2 - 20)$$

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ με το πρόγραμμα MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
LaplaceTransform[f(t),t,s]
```

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων $f(t)$:[4]

$i)$ $t^3 - t + 2$

$ii)$ $\sin(2t)$

$iii)$ $t \sin 2t$

$iv)$ $t^2 \sin 3t$

$v)$ $e^{-2t} \cos 3t$

$vi)$ $t \cos 2t$

$vii)$ $\sin^2 3t$ (Υπ: $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$)

$viii)$ $\cos^2 2t$ (Υπ: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$).

2. Όμοια των συναρτήσεων[5]

$i)$ $t\, e^{-t} \cos t$

$ii)$ $t\, e^{-t} \cos \omega t$

$iii)$ $t^3 e^{-2t}$

$v)$ $t\, e^{-t} \sin 2t$

$vi)$ $t^2\, e^{-2t}$

$vii)$ $t\, e^{-t} \sin \omega t$.

[4] (i) $\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$, (i) $\frac{2}{4+s^2}$,(iii) $\frac{4s}{\left(4+s^2\right)^2}$ (iv) $\frac{18\left(-3+s^2\right)}{\left(9+s^2\right)^3}$, (v) $\frac{2+s}{13+4s+s^2}$ (vi) $\frac{-4+s^2}{\left(4+s^2\right)^2}$, (vii) $\frac{18}{36s+s^3}$, $(viii)$ $\frac{8+s^2}{16s+s^3}$.

[5] (i) $\frac{2s+s^2}{\left(2+2s+s^2\right)^2}$, (ii) $\frac{1-\omega^2-2s+s^2}{\left(1+\omega^2-2s+s^2\right)^2}$, (iii) $\frac{6}{(2+s)^4}$, (iv) $\frac{4(1+s)}{\left(5+2s+s^2\right)^2}$ (v) $\frac{2}{(2+s)^3}$, (vi) $\frac{2\omega(1+s)}{\left(1+\omega^2+2s+s^2\right)^2}$.

[6]

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Αθανασιάδη, Α. (1993), Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–219–7.

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Schaum's Outlines – Laplace Transforms (1965), McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 978–007–060–231–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων