Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Μαθηματικά ΙΙΙ

Ενότητα 8: Προσεγγιστική Λύση Γραμμικών Συστημάτων

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Ενεργειακής Τεχνολογίας ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 2

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 Εισαγωγικές έννοιες

2.1.1 Ορισμός γραμμικού συστήματος

Ορισμός 2.1.1 - 1. *Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος (linear system) m-εξισώσεων με n-αγνώστους x_1, x_2, ..., x_n είναι*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.1.1 - 1}$$

όπου τα a_{ij} με $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ είναι οι συντελεστές του συστήματος και τα b_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι γνωστοί αριθμοί.

Αν $b_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε το σύστημα $(2.1.1 - 1)$ λέγεται **ομογενές** και μία προφανής λύση του είναι η $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ενώ, όταν ένα τουλάχιστον από τα b_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι διάφορο του μηδενός, τότε λέγεται **μη ομογενές**.

Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα $(2.1.1-1)$ γράφεται

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \text{ ή } \overrightarrow{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b} \text{ ή } \overrightarrow{b}}$$

ή

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (2.1.1 - 2)$$

όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων με $A \in \Re^{m\times n}$ ή $A \in \mathcal{C}^{m\times n}$ και $\mathbf{b}$ διάνυσμα τάξης m. . Αντίστοιχη μορφή της $(2.1.1-2)$ ισχύει για στοιχεία από το $\mathcal{C}$ αντί του $\Re$.

2.1.2 Μέθοδοι λύσης

Οι μέθοδοι λύσης του συστήματος $(2.1.1-2)$ χωρίζονται στις παρακάτω δύο κατηγορίες:

- **άμεσες** (direct), και
- **επαναληπτικές** (iterative).

[1]Από το σύνολο των λύσεων θα δοθούν στη συνέχεια μόνον οι κυριότερες, που αναφέρονται στην περίπτωση όπου ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων είναι τετραγωνικός τάξης n και η ορίζουσα του $|A| \neq 0$.[2]

[1]Για άλλες περιπτώσεις ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 3.

[2]Η Παράγραφος 2.2 που ακολουθεί δεν συμπεριλαμβάνεται στην εξεταστέα ύλη.

2.2 Άμεσοι μέθοδοι

2.2.1 Μέθοδος του Cramer

Επειδή $|A| \neq 0$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει ο A^{-1}, οπότε από την $(2.1.1 - 2)$ διαδοχικά έχουμε

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad ή \quad \overbrace{A^{-1}\,A}^{\mathrm{I}}\,\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad ή \quad \mathrm{I}\,\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n, δηλαδή τελικά

$$\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b}. \tag{2.2.1 - 1}$$

Η $(2.2.1 - 1)$ συναρτήσει των αγνώστων $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ του συστήματος αποδεικνύεται ότι τελικά γράφεται

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}; \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \tag{2.2.1 - 2}$$

όταν με $|A_i|$ συμβολίζεται η ορίζουσα που προκύπτει, αν η i-στήλη του πίνακα A αντικατασταθεί από τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{b}$. Η μέθοδος αυτή, που είναι γνωστή σαν **μέθοδος του Cramer** , λόγω του μεγάλου αριθμού των πράξεων και των υπεισερχομένων σφαλμάτων στρογγυλοποίησης (round-off errors), έχει θεωρητικό μόνον ενδιαφέρον.

Παράδειγμα 2.2.1 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x_1 & + & 6x_2 & - & 11x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 13x_3 & = & 4 \end{array}$$

που γράφεται

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Αν A είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, τότε $|A| = 10$, οπότε

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

Ο τύπος $(2.2.1 - 1)$ δίνει τότε την παρακάτω λύση

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.2 \\ -2.5 \\ -6.4 \end{bmatrix}.$$

Η παραπάνω λύση προκύπτει επίσης και από τον τύπο $(2.2.1 - 2)$ όπου

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -11 \\ -2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} = -72, \quad |A_2| = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -11 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 4 & 13 \end{bmatrix} = -25,$$

$$|A_3| = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 3 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} = -64.$$

2.2.2 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss χωρίς διάταξη[3] (pivoting) περιγράφεται από τα παρακάτω **βήματα** (steps):

1ο βήμα. Έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(2.1.1-1)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $a_{11} \neq 0$. Το a_{11} λέγεται και **οδηγό στοιχείο** (pivot). Τότε ο άγνωστος x_1 απαλείφεται από τη 2η, 3η, ..., n-οστή

[3] Όμοια για άλλες περιπτώσεις βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 3.

εξίσωση, αφαιρώντας:

$$
\begin{array}{lclllll}
m_{21} & = & \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \text{φορές την} & \text{πρώτη} & \text{από τη δεύτερη εξίσωση} \\
m_{31} & = & \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \quad " & \quad " & \qquad \text{τρίτη} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \qquad \vdots \\
m_{n1} & = & \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & \quad " & \quad " & \qquad \text{τελευταία,}
\end{array}
$$

όταν τα m_{i1}; $i = 2, 3, \ldots, n$ είναι οι **πολλαπλασιαστές** του Gauss για το πρώτο βήμα. Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 1ου βήματος είναι

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
 & & \vdots & & & & & \vdots & \\
 & & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)}
\end{array}
\qquad (2.2.2 - 1)
$$

όπου με $a_{ij}^{(\varkappa)}$, $b_i^{(k)}$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$ θα συμβολίζεται στο εξής η νέα τιμή των a_{ij} και b_i στο τέλος του k-βήματος γενικά.

2ο βήμα. Όμοια, έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(2.2.2-1)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Τότε ο άγνωστος x_2 απαλείφεται από την 3η, … , n-οστή εξίσωση, αφαιρώντας

$$
\begin{array}{lclllll}
m_{32} & = & \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \text{φορές τη} & \text{δεύτερη} & \text{από την τρίτη εξίσωση} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
m_{n2} & = & \dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \quad " & \quad " & \qquad \text{τελευταία.}
\end{array}
$$

Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 2ου βήματος θα είναι

$$
\begin{array}{rcrcccrcl}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
 & & & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & & & \vdots & & & & & & \vdots \\
 & & & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}.
\end{array}
\qquad (2.2.2 \text{ - } 2)
$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο στο τέλος και του $n-1$ βήματος, η μορφή του αρχικού συστήματος $(2.1.1-1)$ τελικά θα είναι

$$
\begin{array}{rcccccl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{22}^{(1)}\,x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)}
\end{array}
\qquad (2.2.2 \text{ - } 3)
$$

όπου προφανώς το σύστημα $(2.2.2-3)$ είναι ισοδύναμο με το αρχικό. Το σύστημα $(2.2.2-3)$ γράφεται απλούστερα ως

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & u_{13}x_3 & + & \cdots & + & u_{1n}x_n & = & c_1 \\
 & & u_{22}x_2 & + & u_{23}x_3 & + & \cdots & + & u_{2n}x_n & = & c_2 \\
 & & & & u_{33}x_3 & + & \cdots & + & u_{3n}x_n & = & c_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & u_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}
$$

ή με τη βοήθεια των πινάκων

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad \text{με} \quad U \in \Re^{n\times n} \tag{2.2.2 - 4}$$

όπου ο U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Η λύση του συστήματος $(2.2.2-4)$ γίνεται με ανάδρομη αντικατάσταση (backward substitution), δηλαδή από την τελευταία προς την πρώτη εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} x_n &= c_n/u_{nn} \\ x_{n-1} &= \left[c_{n-1} - u_{n-1,n}\, x_n\right]/u_{n-1,n-1} \\ \vdots & \qquad \vdots \\ x_1 &= \left[c_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j}\, x_j\right] / \, u_{11}\,. \end{aligned} \tag{2.2.2 - 5}$$

Παράδειγμα 2.2.2 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5. \end{aligned} \tag{2.2.2 - 6}$$

Τότε σύμφωνα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς διάταξη η λύση είναι:

1ο βήμα

Γίνεται απαλοιφή του αγνώστου x_1 από τη 2η και 3η εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Εξίσωση } 2 : &= \text{Εξίσωση } 2 - m_{21} * \text{Εξίσωση } 1\,; \quad m_{21} = -1/2 \\ \text{Εξίσωση } 3 : &= \text{Εξίσωση } 3 - m_{31} * \text{Εξίσωση } 1\,; \quad m_{31} = 1/2\,. \end{aligned}$$

Άρα στο τέλος του 1ου βήματος το σύστημα γράφεται

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & 2, \end{array}$$

που προφανώς είναι ισοδύναμο με το αρχικό, επειδή έχει διατηρηθεί η 1η εξίσωση.

2ο βήμα

Απαλείφεται ο άγνωστος x_2 από την 3η εξίσωση ως εξής:

$$\text{Εξίσωση } 3 : \;=\; \text{Εξίσωση } 3 \;-\; m_{32} * \text{Εξίσωση } 2\,; \quad m_{32} = 1/3.$$

Άρα στο τέλος του 2ου βήματος το σύστημα θα έχει τελικά τη μορφή

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ & & & - & \dfrac{8}{3}x_3 & = & 0 \end{array} \tag{2.2.2 - 7}$$

που είναι επίσης λόγω της διατήρησης και της 2ης εξίσωσης ισοδύναμο με το αρχικό. Λύνοντας τώρα το σύστημα $(2.2.2-7)$ με την ανάδρομη αντικατάσταση, δηλαδή από την 3η προς την 1η εξίσωση, προκύπτει η λύση: $x_3 = 0$, $x_2 = 2$ και $x_1 = 1$.

2.3 Επαναληπτικές Μέθοδοι

2.3.1 Ορισμοί

Όταν το πλήθος των εξισώσεων είναι σχετικά μικρό, τότε είναι προτιμότερο για τη λύση του συστήματος $(2.1.1-2)$ να χρησιμοποιηθούν οι άμεσοι μέθοδοι της προηγούμενης παραγράφου Σε μεγάλο όμως αριθμό εξισώσεων για περισσότερη ακρίβεια των λύσεων συνήθως προτιμούνται οι **επαναληπτικές μέθοδοι** (iterative methods).

Έστω λοιπόν το σύστημα $(2.1.1-2)$, δηλαδή το

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.3.1 - 1}$$

όπου ο πίνακας A είναι τετραγωνικός τάξης n με $|A| \neq 0$. Τότε έχοντας υπ' όψιν το ανάλογο πρόβλημα της εύρεσης των ριζών της Εξίσωσης $(1.1-2)$ του Μαθήματος 1 θα πρέπει και για την περίπτωση του συστήματος $(2.3.1-1)$ να δημιουργηθεί για κάθε άγνωστο $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ χωριστά μια επαναληπτική σχέση ανάλογη της $(1.1-3)$. Αν για ευκολία η επαναληπτική σχέση για τον άγνωστο, έστω x_1, γραφεί στη μορφή $x_1^{i+1} = g_1\left(x_1^i\right);\; i = 0,\, 1,\, \ldots$, τότε για τον x_k άγνωστο θα έχει τη μορφή

$$x_k^{i+1} = g_k\left(x_k^i\right); \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \text{ και } i = 0,\, 1,\, \ldots . \qquad (2.3.1 - 2)$$

Οι τιμές των αγνώστων για κάθε τιμή του δείκτη i ή διαφορετικά για κάθε επανάληψη, ορίζουν ένα διάνυσμα με συντεταγμένες τις αντίστοιχες τιμές των $x_1^i,\, x_2^i,\, \ldots,\, x_n^i$. Έστω $\mathbf{x}_k^{i+1} = \left[x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i\right]^T$ το διάνυσμα αυτό. Τότε τα διανύσματα αυτά δημιουργούν μια ακολουθία διανυσμάτων, που θεωρητικά θα πρέπει να συγκλίνει στη λύση του συστήματος $(2.3.1-1)$.

Επομένως το πρόβλημα της εύρεσης της λύσης του συστήματος $(2.3.1-1)$ ανάγεται στον προσδιορισμό της επαναληπτικής συνάρτησης g_k στην $(2.3.1-2)$. Όπως και στο Μάθημα 1 ο τρόπος προσδιορισμού καθορίζει και την αντίστοιχη μέθοδο λύσης του συστήματος. Τα κριτήρια διακοπής των επαναλήψεων του Μαθήματος 1 ισχύουν και στην περίπτωση των επαναληπτικών μεθόδων για συστήματα.

Εξετάζονται στη συνέχεια οι αρχικές κλασικές μέθοδοι που προκύπτουν από τη μορφή $(2.3.1-2)$, ενώ ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου για μια εκτενέστερη αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος.

2.3.2 Μέθοδος του Jacobi

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Jacobi η επαναληπτική σχέση $(2.3.1-2)$ δημιουργείται από το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_n, \end{array} \qquad (2.3.2 - 1)$$

όταν αυτό λυθεί διαγώνια για κάθε έναν άγνωστο χωριστά, δηλαδή η 1η εξίσωση για τον άγνωστο x_1, η 2η για τον x_2 και τελικά η n-οστή για τον x_n θεωρώντας τους άλλους αγνώστους σε κάθε περίπτωση σαν γνωστούς.

Άρα σύμφωνα με τη μέθοδο από το σύστημα $(2.3.2-1)$ προκύπτει ότι:

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & -\dfrac{1}{a_{11}}[\qquad\qquad a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1n}\,x_n] + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 & = & -\dfrac{1}{a_{22}}[a_{21}\,x_1 \qquad\qquad + a_{23}\,x_3 + \ldots + a_{2n}\,x_n] + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\
\vdots & = & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n & = & -\dfrac{1}{a_{nn}}[a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 \qquad\qquad + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}] + \dfrac{b_n}{a_{nn}}\,,
\end{array}
$$

όταν $a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0$.

Από την παραπάνω μορφή του συστήματος, η επαναληπτική σχέση

$$x_k^{(i+1)} = g_k\left(x_k^{(i)}\right); \quad i = 0,\,1,\,\ldots; \quad k = 1,\,2,\,\ldots,\,n$$

προκύπτει τότε ως εξής:[4]

$$
\begin{aligned}
x_1^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,x_1^{(i)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.3.2\text{ - }2) \\
x_n^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,x_1^{(i)} + a_{n2}\,x_2^{(i)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(i)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}
$$

Η $(2.3.2-2)$ ορίζει τότε την επαναληπτική σχέση της **μεθόδου του Jacobi**. Η μέθοδος περιγράφεται στον Αλγόριθμο 2.3.2 - 1.

[4] Στα συστήματα χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $(i+1)$, δηλαδή το $i+1$ σε παρένθεση για να διαφέρει από το δείκτη k, που χρησιμοποιείται για τους αγνώστους. Στις εξισώσεις, που δεν απαιτείται ανάλογη διάκριση, χρησιμοποιείται το $i+1$.

Αλγόριθμος 2.3.2 - 1 (μεθόδου του Jacobi)

Δεδομένα: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με $A \in \Re^{n\times n}$,

αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^T$,

ακρίβεια ε και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

Για $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$

  Για $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$$

  τέλος i

  αν $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| < \varepsilon$,

  τύπωσε $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ STOP

  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$

τέλος k

Τύπωσε “ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ”

Σημείωση 2.3.2 - 1

Στα συστήματα, σε αντίθεση με τις εξισώσεις όπου η αρχική τιμή x_0 των επαναλήψεων είναι δυνατόν να προσδιοριστεί γραφικά ή με τη μέθοδο του μέσου σημείου κ.λπ., δεν είναι εύκολος ο προσδιορισμός των αρχικών τιμών $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Για το λόγο αυτό συνήθως θέτουμε $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0, \ldots, x_n^{(0)} = 0$, εκτός αν διαφορετικά δίνεται.

Παράδειγμα 2.3.2 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -3x_1 + 9x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 - x_2 - 7x_3 &= 15 \end{aligned} \qquad (2.3.2 - 3)$$

με ρίζες $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$ και $x_3^* = -2$.

Σύμφωνα με την $(2.3.2 - 1)$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2 - 3\,x_3\right] - \frac{1}{5} \\ x_2 &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1 - x_3\right] - \frac{5}{9} \\ x_3 &= -\frac{1}{7}\left[-x_1 + x_2\right] - \frac{15}{7}\,, \end{aligned}$$

οπότε από την $(2.3.2 - 2)$ προκύπτει η παρακάτω επαναληπτική σχέση:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(i)} - 3\,x_3^{(i)}\right] - \frac{1}{5} \\ x_2^{(i+1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(i)} - x_3^{(i)}\right] - \frac{5}{9} \\ x_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{7}\left[-x_1^{(i)} + x_2^{(i)}\right] - \frac{15}{7}\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,. \end{aligned} \qquad (2.3.2 - 4)$$

Θέτοντας στην $(2.3.2 - 4)$ σύμφωνα με τη Σημείωση 2.3.2 - 1 σαν αρχικές τιμές $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$ διαδοχικά έχουμε:

για $\quad i = 0$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(0+1)} = x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(0)} - 3\,x_3^{(0)}\right] - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} = 0.2 \\
x_2^{(0+1)} = x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right] - \frac{5}{9} = -\frac{5}{9} = -0.555\,556 \\
x_3^{(0+1)} = x_3^{(1)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right] - \frac{15}{7} = -\frac{15}{7} = -2.142\,857\,.
\end{aligned}
$$

για $\quad i = 1$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1+1)} = x_1^{(2)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(1)} - 3\,x_3^{(1)}\right] - \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5}\left[2 * (-0.555) - 3 * (-2.142)\right] - 0.2 = 0.863\,492 \\
x_2^{(1+1)} = x_2^{(2)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(1)} - x_3^{(1)}\right] - \frac{5}{9} \\
&= \frac{1}{9}\left[3 * 0.2 - (-2.142)\right] - 0.555 = -0.384\,127 \\
x_3^{(1+1)} = x_3^{(2)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right] - \frac{15}{7} \\
&= -\frac{1}{7}\left[-0.2 + (-0.555)\right] - 2.142\,857 = -2.034\,921\,.
\end{aligned}
$$

Όμοια για $i = 2,\, 3,\, \ldots$. Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας μέχρι και την 12η επανάληψη δίνονται στον Πίνακα 2.3.2 - 1. Συγκρίνοντας με τις ρίζες προκύπτει τότε ότι στη 12η επανάληψη υπάρχει ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων για την 1η και τη 2η ρίζα και 6 για την 3η.

Η λύση με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 2.3.2 - 1.

Πρόγραμμα 2.3.2 - 1 (μεθόδου του Jacobi)

```
n = 12; x = 0; y = 0; z = 0;
f1[y_, z_] := (2 y - 3 z)/5 - 1/5;
f2[x_, z_] := (3 x - z)/9 - 5/9;
```

Πίνακας 2.3.2 - 1: Παράδειγμα 2.3.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου του Jacobi

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$
1	-0.200 000	-0.555 556	-2.142 857
2	0.863 492	-0.384 127	-2.092 063
3	0.901 587	-0.035 273	-1.964 626
⋮	⋮	⋮	⋮
10	0.999 939	-0.000 061	-2.000 003
11	0.999 977	-0.000 020	-2.000 000
12	*0.999 992*	$-7.536\,012\times 10^{-6}$	*-2.000 000*

```
f3[x_, y_] := -(-x + y)/7 - 15/7;
Do[x1 = f1[y, z]; y1 = f2[x, z]; z1 = f3[x, y];
 Print[i, "    ,    ", N[x1, 7], "    ,    ", N[y1, 7], " , ",
 N[z1, 7]]; x = x1; y = y1; z = z1, {i, 1, n}]
```

2.3.3 Μέθοδος των Gauss-Seidel

Η **μέθοδος των Gauss-Seidel** χρησιμοποιεί την ίδια διαδικασία για τη δημιουργία της επαναληπτικής σχέσης $(2.3.2-2)$, δηλαδή της

$$\begin{aligned}
x_1^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,x_1^{(i)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,x_1^{(i)} + a_{n2}\,x_2^{(i)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(i)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}$$

με τη διαφορά ότι η όποια τιμή υπολογίζεται, χρησιμοποιείται στη συνέχεια της διαδικασίας για τον υπολογισμό των υπόλοιπων τιμών.

Επομένως η επαναληπτική σχέση της μεθόδου έχει ως εξής:

$$
\begin{aligned}
{x_1}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_1}{a_{11}} \\
{x_2}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,{x_1}^{(i+1)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
x_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{33}}\left[a_{21}\,{x_1}^{(i+1)} + a_{22}\,{x_2}^{(i+1)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
& \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.3.3 - 1) \\
{x_{n-1}}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{n-1,\,n-1}}\Big[a_{n-1,1}\,{x_1}^{(i+1)} + a_{n-1,2}\,{x_2}^{(i+1)} + \ldots \\
&\quad + a_{n\,n-2}\,{x_{n-2}}^{(i+1)} + a_{n\,n}\,x_n^{(i)}\Big] + \frac{b_n}{a_{nn}} \\
x_n^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,{x_1}^{(i+1)} + a_{n2}\,{x_2}^{(i+1)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,{x_{n-1}}^{(i+1)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}
$$

Η μέθοδος περιγράφεται από τον Αλγόριθμο 2.3.3 - 1.

Παράδειγμα 2.3.3 - 1

Έστω το σύστημα (2.3.2 – 3) του Παραδείγματος 2.3.2 - 1, δηλαδή το

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\
-3x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & = & -5 \\
x_1 & - & x_2 & - & 7x_3 & = & 15
\end{array}
\qquad (2.3.3 - 2)
$$

με ρίζες

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0 \quad \text{και} \quad x_3^* = -2.$$

Αλγόριθμος 2.3.3 - 1 (μεθόδου των Gauss-Seidel)

Δεδομένα: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με $A \in \Re^{n\times n}$,

αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right]^T$,

ακρίβεια ε και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

Για $k = 1,\, 2,\, \dots,\, N$

Για $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$

$$x_i^{(k+1)} = \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} + b_i\right) / a_{ii}$$

τέλος i

αν $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| < \varepsilon,$ τύπωσε $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ STOP

$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$

τέλος k

Τύπωσε “ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ”

Σύμφωνα με την $(2.3.2-4)$ και την $(2.3.3-1)$ έχουμε την παρακάτω επαναληπτική μέθοδο των Gauss-Seidel για το σύστημα $(2.3.3-2)$

$$\begin{aligned}
x_1{}^{(i+1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(i)} - 3\,x_3^{(i)}\right] - \frac{1}{5} \\
x_2{}^{(i+1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1{}^{(i+1)} - x_3^{(i)}\right] - \frac{5}{9} \\
x_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{7}\left[-x_1{}^{(i+1)} + x_2{}^{(i+1)}\right] - \frac{15}{7}; \quad i = 0,\, 1,\, \dots .
\end{aligned} \tag{2.3.3 - 3}$$

Έχοντας υπ' όψιν τη Σημείωση 2.3.2 - 1 και θέτοντας στην $(2.3.3-3)$ σαν αρχικές τιμές $x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$ διαδοχικά έχουμε:

για $\quad i = 0$

$$\begin{aligned}
x_1{}^{(0+1)} = x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(0)} - 3\,x_3^{(0)}\right] - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} = 0.2 \\
x_2{}^{(0+1)} = x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1{}^{(1)} - x_3^{(0)}\right] - \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9}[3*0.2-0]-\frac{5}{9} = -0.622\,222$$

$$x_3^{(0+1)} = x_3^{(1)} = -\frac{1}{7}\left[-x_1{}^{(1)} + x_2{}^{(1)}\right] - \frac{15}{7}$$

$$= -\frac{1}{7}[-0.2+(-0.622)] - \frac{15}{7} = -2.082\,540\,.$$

για $\quad i = 1$

$$x_1{}^{(1+1)} = x_1^{(2)} = \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(1)} - 3\,x_3^{(1)}\right] - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5}[2*(-0.622)-3*(-2.082)] - 0.2 = 0.800\,635$$

$$x_2{}^{(1+1)} = x_2^{(2)} = \frac{1}{9}\left[3\,x_1{}^{(2)} - x_3^{(1)}\right] - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{1}{9}[3*0.800-(-2.082)] - 0.555 = -0.057\,284$$

$$x_3^{(1+1)} = x_3^{(2)} = -\frac{1}{7}\left[-x_1{}^{(2)} + x_2{}^{(2)}\right] - \frac{15}{7}$$

$$= -\frac{1}{7}[-0.800+(-0.557)] - 2.142\,857 = -2.020\,297\,.$$

Όμοια για $i = 2,\,3,\,\ldots$.Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας μέχρι και την 7η επανάληψη δίνονται στον Πίνακα 2.3.3 - 1. Συγκρίνοντας με τις ρίζες $\quad x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0 \quad$ και $\quad x_3^* = -2$ προκύπτει ότι στην 7η επανάληψη έχουμε ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων, ενώ με τη μέθοδο του Jacobi, όπως έχει προκύψει από τον Πίνακα 2.3.2 - 1, στη 12η επανάληψη υπήρχε ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων για την 1η και τη 2η ρίζα και 6 δεκαδικών για την 3η.

Η λύση με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 2.3.3 - 1.

Πρόγραμμα 2.3.3 - 1 (μεθόδου των Gauss-Seidel)

```
n = 7; x = 0; y = 0; z = 0;
f1[y_, z_] := (2 y - 3 z)/5 - 1/5;
f2[x_, z_] := (3 x - z)/9 - 5/9;
```

Πίνακας 2.3.3 - 1: Παράδειγμα 2.3.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου των Gauss-Seidel

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$
1	-0.200 000	-0.622 222	-2.082 540
2	0.800 635	-0.057 384	-2.020 297
3	0.989 265	-0.001 323	-2.001 345
4	1.000 277	0.000 242	-1.999 995
5	1.000 094	0.000 031	-1.999 991
6	1.000 007	$1.287\,801\times10^{-6}$	-1.999 999
7	*1.000 000*	$-7.717\,425\times10^{-8}$	*-2.000 000*

```
f3[x_, y_] := -(-x + y)/7 - 15/7;
Do[x1 = f1[y, z]; y1 = f2[x1, z]; z1 = f3[x1, y1];
 Print[i, "    ,    ", N[x1, 7], "    ,    ", N[y1, 7],
 "    ,    ",N[z1, 7]]; x = x1; y = y1; z = z1,
 {i, 1, n}]
```

2.3.4 Σύγκλιση των μεθόδων

Οι επαναληπτικές σχέσεις $(2.3.2 - 2)$ και $(2.3.3 - 1)$ των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel αντίστοιχα δεν συγκλίνουν πάντοτε στις ρίζες του συστήματος $(2.3.2 - 1)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν περιπτώσεις που η εφαρμογή τους σε ορισμένα συστήματα δίνει επαναληπτικές σχέσεις, που αποκλίνουν.

Παράδειγμα 2.3.4 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 5x_2 & = & -4 \\ 7x_1 & - & x_2 & = & 6 \end{array} \quad \text{με ρίζες} \quad x_1^* = x_2^* = 1. \qquad (2.3.4 - 1)$$

Πίνακας 2.3.4 - 1: Παράδειγμα 2.3.4 - 1 επαναληπτική σχέση $(2.3.4-2)$: αποτελέσματα μεθόδων των Jacobi και Gauss-Seidel

	Jacobi		Gauss-Seidel	
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$
1	-4.000	-6.000	-4.000	-34.000
2	-34.000	-34.000	-174.000	-1224.000
3	-174.000	-244.000	-6124.000	-42.874
4	-1244.000	-1244.000	-214.374	-1500.624
5	-6124.000	-8574.000	-7503.124	-52521.874
6	-42.874	-42.874		
7	-214.374	-300.124		

Τότε προκύπτουν αντίστοιχα σύμφωνα με τα παραπάνω οι παρακάτω μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel

$$\begin{array}{rcrr} x_1^{(i+1)} & = & 5x_2^{(i)} & -4 \\ x_2^{(i+1)} & = & 7x_1^{(i)} & -6 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{rcrr} x_1^{(i+1)} & = & 5x_2^{(i)} & -4 \\ x_2^{(i+1)} & = & 7x_1^{(i+1)} & -6, \end{array} \qquad (2.3.4 - 2)$$

όταν $i = 0, 1, \ldots$. Θέτοντας όμοια στην $(2.3.4-2)$ σαν αρχικές τιμές $x_1^{(0)} = 0$ και $x_2^{(0)} = 0$ έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.3.4 - 1. Άμεσα προκύπτει τότε ότι και οι δύο μέθοδοι αποκλίνουν με ταχύτερα αποκλίνουσα τη μέθοδο των Gauss-Seidel. Ανάλογο αποκλίνον αποτέλεσμα θα προκύψει και με άλλη αρχική τιμή.

Οι συνθήκες που εξασφαλίζουν τη σύγκλιση των παραπάνω μεθόδων είναι αντικείμενο μελέτης της Γραμμικής Άλγεβρας.[5] Στη συνέχεια του μαθήματος δίνεται μια από αυτές τις συνθήκες με τη μορφή του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.3.4 - 1. *Αν ο πίνακας $A \in \Re^{n\times n}$ είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος, τότε το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει ακριβώς μια λύση στην οποία*

[5] Βλέπε βιβλιογραφία.

συγκλίνουν οι μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel για κάθε αρχική τιμή.

Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 2.3.4 - 1 *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται* **αυστηρά διαγώνια ορισμένος** *(strictly diagonally dominant), όταν*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \ \text{ για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό στον πίνακα

$$A \; = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ισχύει}$$

$$\begin{aligned} |a_{11}| = |-4| > |a_{12}| + |a_{13}| = 2 + 1 = 3 \\ |a_{22}| = 6 > |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 2 = 3 \\ |a_{33}| = 5 > |a_{31}| + |a_{32}| = 1 + |-2| = 3 \end{aligned} \ ,$$

δηλαδή ο A είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος.

Στο σύστημα $(2.3.4 - 1)$ ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ προφανώς δεν είναι αυστηρά διαγώνιος. Όταν όμως το σύστημα γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} 7x_1 &- x_2 &= 6 \\ x_1 &- 5x_2 &= -4, \end{aligned} \tag{2.3.4 - 3}$$

τότε οι προκύπτουσες μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= \tfrac{1}{7}\, x_2^{(i)} + \tfrac{6}{7} \\ x_2^{(i+1)} &= \tfrac{1}{5}\, x_1^{(i)} + \tfrac{4}{5} \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= \tfrac{1}{7}\, x_2^{(i)} + \tfrac{6}{7} \\ x_2^{(i+1)} &= \tfrac{1}{5}\, x_1^{(i+1)} + \tfrac{4}{5}\,, \end{aligned} \tag{2.3.4 - 4}$$

όταν $i = 0, 1, \ldots,$ συγκλίνουν θέτοντας όμοια σαν αρχικές τιμές $x_1^{(0)} = 0$ και $x_2^{(0)} = 0$. Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 2.3.4 - 2.

Πίνακας 2.3.4 - 2: Παράδειγμα 2.3.4 - 1 επαναληπτική σχέση (2.3.4 − 4): αποτελέσματα μεθόδων των Jacobi και Gauss-Seidel

	Jacobi		Gauss-Seidel	
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$
1	0.857	0.800	0.857	0.971
2	0.971	0.971	0.996	0.999
3	0.996	0.994	1.000	1.000
4	0.999	0.999	1.000	1.000
5	1.000	1.000		
6	1.000	1.000		

Σημείωση 2.3.4 - 1

Η συνθήκη ο πίνακας A στο Θεώρημα 2.3.4 - 1 να είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος είναι μόνον αναγκαία. Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} -4x_1 &+ 5x_2 &= 1 \\ x_1 &+ 2x_2 &= 3, \end{aligned}$$

όπου ο πίνακας A δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος, ενώ και οι δύο μέθοδοι με αρχική τιμή $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$ συγκλίνουν στη λύση $x_1^* = x_2^* = 1$ του συστήματος.

Σύγκριση των μεθόδων

Γενικότερα από την πειραματική εφαρμογή των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel έχουν προκύψει τα παρακάτω αποτελέσματα:

i) η μέθοδος των Gauss-Seidel συγκλίνει, όταν και η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει,

ii) η μέθοδος των Gauss-Seidel είναι δυνατόν να συγκλίνει, όταν η μέθοδος του Jacobi αποκλίνει, και

iii) όταν οι μέθοδοι συγκλίνουν, τότε η μέθοδος των Gauss-Seidel συγκλίνει ταχύτερα από τη μέθοδο του Jacobi.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν με τη μέθοδο του Jacobi και των Gauss-Seidel τα παρακάτω συστήματα

$$i) \quad \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 5, \end{array}$$

$$ii) \quad \begin{array}{rcrcr} -4x_1 & + & 2x_2 & = & -6 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & 1, \end{array}$$

$$iii) \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -6, \end{array}$$

$$iv) \quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & & & + & 4x_3 & = & 11. \end{array}$$

Η διαδικασία να σταματήσει, όταν για το σφάλμα ισχύει $\left|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\right| < 10^{-3}$.

2. Όμοια τα συστήματα εφαρμόζοντας κατάλληλη εναλλαγή των εξισώσεων το Θεώρημα 2.3.4 - 1:

$$i) \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 3, \end{array}$$

$$ii) \quad \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 4x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & = & 2, \end{array}$$

$$iii)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -7 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 10x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & 13, \end{array}$$

$$iv)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & = & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

3. Δείξτε ότι στα παρακάτω συστήματα

$$i)\quad \begin{array}{rcrcr} -4x_1 & + & 5x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3, \end{array}$$

$$ii)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 5, \end{array}$$

αν και δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.3.4 - 1, υπάρχει λύση με τις μεθόδους των Jacobi και Gauss-Seidel, την οποία και προσδιορίστε.

4. Να γραφεί πρόγραμμα με το MATLAB αντίστοιχο των Προγραμμάτων 2.3.2 - 1 και 2.3.3 - 1.

[6]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Acton (1990), F. S. Numerical Methods That Work, 2nd printing. Washington, DC: Math. Assoc. Amer.

[5] Bronshtein, I. N. and Semendyayev (1997), K. A. Handbook of Mathematics, 3rd ed. New York: Springer-Verlag.

[6] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[7] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[8] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[9] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[10] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[11] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[12] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

[13] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[14] Varga, R. (1962), Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[15] Young, D. (1971), Iterative Solutions of Large Linear Systems. New York: Academic Press.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων