



---

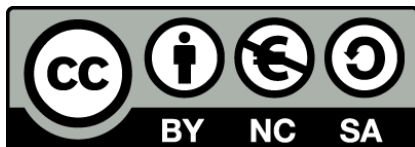
## Ανώτερα Μαθηματικά II

**Ενότητα 2:** Διαφορικές Εξισώσεις – Μέρος II

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

---



Το περιεχόμενο του μαθήματος διατίθεται με άδεια Creative Commons εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

## Μάθημα 2

# ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΡΟΣ ΙΙ

### 2.1 Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

#### 2.1.1 Ορισμοί

**Ορισμός 2.1.1 - 1** Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (2.1.1 - 1)$$

όταν η άγνωστη συνάρτηση  $y = y(x)$  ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  και υπάρχουν οι  $y'(x)$  και  $y''(x)$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .

Τότε η  $y$ , εφόσον υπάρχει, θα ορίζει τη λύση της (2.1.1 – 1).

Σημαντικό ενδιαφέρον στις εφαρμογές από το σύνολο των εξισώσεων της μορφής (2.1.1 – 1) παρουσιάζει η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Συγκεκριμένα έχουμε:

**Ορισμός 2.1.1 - 2 (μη ομογενής)** Η γενική μορφή της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x), \quad (2.1.1 - 2)$$

όταν  $f$ ,  $g$  και  $r$  συνεχείς συναρτήσεις με  $r(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$  και υπάρχουν οι  $y'(x)$  και  $y''(x)$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .

**Ορισμός 2.1.1 - 3 (ομογενής)** Η γενική μορφή της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \quad (2.1.1 - 3)$$

όταν  $f$  και  $g$  συνεχείς συναρτήσεις για κάθε  $x \in (a, b)$  και υπάρχουν οι  $y'(x)$  και  $y''(x)$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .

Στη συνέχεια του μαθήματος εξετάζονται αναλυτικά οι κυριότερες μορφές των (2.1.1 - 2) και (2.1.1 - 3) με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή αυτών που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές, ενώ ο αναγνώστης παραπέμπεται για μια εκτενέστερη μελέτη στη βιβλιογραφία.

### 2.1.2 Ομογενής με σταθερούς συντελεστές

Από τον Ορισμό 2.1.1 - 3 προκύπτει ότι η γενική μορφή της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (2.1.2 - 1)$$

όταν  $a, b$  σταθερές,  $y = y(x)$  με  $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$  και υπάρχουν οι  $y'(x)$  και  $y''(x)$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Έστω  $y \neq 0$ , διαφορετικά η τιμή  $y = 0$  είναι μια ιδιάζουσα λύση της (2.1.2 - 1). Τότε αντικαθιστώντας κατά τα γνωστά στην (2.1.2 - 1)

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με } \lambda \text{ σταθερά}$$

προκύπτει ότι η **χαρακτηριστική εξίσωση** στην περίπτωση αυτή είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (2.1.2 - 2)$$

Έστω  $\Delta = a^2 - 4b$  η διακρίνουσα της (2.1.2 - 2). Τότε:

- i) αν  $\Delta > 0$ , έχουμε δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες  $\lambda_1, \lambda_2$ , οπότε η γενική λύση της (2.1.2 - 1) θα είναι

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (2.1.2 - 3)$$

όταν  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

- ii) Αν  $\Delta = 0$ , έχουμε μία διπλή πραγματική ρίζα την  $\lambda = -a/2$ . Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση έχει τη μορφή

$$\mathbf{y}_h(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}_1 + \mathbf{x} \mathbf{c}_2) \mathbf{e}^{\lambda \mathbf{x}}, \quad (2.1.2 - 4)$$

όταν όμοια  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

- iii) Αν  $\Delta < 0$ , έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω οι  $\lambda = p + i \omega$  και  $\bar{\lambda} = p - i \omega$  όπου  $i = \sqrt{-1}$  και  $\omega = (\sqrt{-\Delta})/2$ . Τότε<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1^* e^{\lambda x} + c_2^* e^{\bar{\lambda} x} = c_1^* e^{(p+i\omega)x} + c_2^* e^{(p-i\omega)x} \\ &= e^{px} [(c_1^* + c_2^*) \cos(\omega x) + i(c_1^* - c_2^*) \sin(\omega x)], \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathbf{y}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{p\mathbf{x}} [\mathbf{c}_1 \cos(\omega \mathbf{x}) + \mathbf{c}_2 \sin(\omega \mathbf{x})], \quad (2.1.2 - 5)$$

όταν όμοια  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

Η (2.1.2-5) χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις<sup>2</sup> μετασχηματίζεται τελικά στην

$$\mathbf{y}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{e}^{p\mathbf{x}} \sin(\omega \mathbf{x} + \phi) \quad (2.1.2 - 6)$$

όπου  $C = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$  και  $\tan \phi = c_1/c_2$ , όταν  $c_2 \neq 0$  με  $-\pi \leq \phi < \pi$ . Στην (2.1.2-6) η  $\omega = \text{Im}(\lambda)$  εκφράζει την **κυκλική συχνότητα**, ενώ η  $\phi$  τη **φάση**<sup>3</sup>.

### Παράδειγμα 2.1.2 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y'_0 = y'(0) = 1. \quad (1)$$

<sup>1</sup>Ισχύει  $e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$  (τύπος του Euler).

<sup>2</sup>Βλέπε απόδειξη στο Μάθημα 1: Σειρά Fourier - Γραμμικό Φάσμα.

<sup>3</sup>Βλέπε [http://el.wikipedia.org/wiki/Απλή\\_αρμονική\\_ταλάντωση](http://el.wikipedia.org/wiki/Απλή_αρμονική_ταλάντωση) και [http://el.wikipedia.org/wiki/Φάση\\_\(κυματική\)](http://el.wikipedia.org/wiki/Φάση_(κυματική))

**Λύση.** Η (1) είναι μια γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Αντικαθιστώντας στην (1)

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με } \lambda \text{ σταθερά}$$

προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωσή της είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{με } \Delta < 0 \quad \text{και ρίζες } \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -2.$$

Τότε από την (2.1.2 - 3) έχουμε ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}, \quad (2)$$

όταν  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (2) και τις αρχικές συνθήκες  $y(0) = 0$  και  $y'(0) = 1$  ως εξής:

$$\begin{aligned} y_h(0) &= c_1 + c_2 = 0 & \text{οπότε} & c_1 = -1 \\ y'_h(0) &= -3c_1 - 2c_2 = 1, & & c_2 = 1. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση της (1) είναι (Σχ. 2.1.2 - 1)

$$y(x) = y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή σαν **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**.

### Παράδειγμα 2.1.2 - 2

Όμοια η εξίσωση

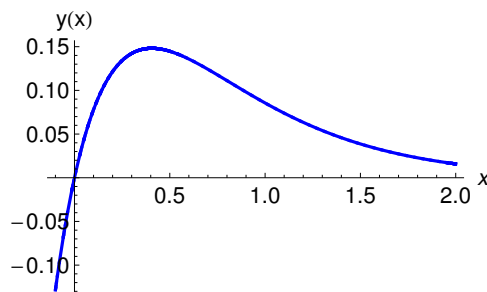
$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = 1 \quad \text{και } y'_0 = y'(0) = 1. \quad (3)$$

**Λύση.** Όμοια η χαρακτηριστική της εξίσωση της (3) είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \text{με } \Delta = 0 \quad \text{και διπλή ρίζα την } \lambda = 2.$$

Τότε σύμφωνα με την (2.1.2 - 4) η γενική της λύση είναι

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x) e^{2x}, \quad (4)$$



**Σχήμα** 2.1.2 - 1: Παράδειγμα 2.1.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης  $y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$ , όταν  $x \in [-0.1, 2]$ .

όταν  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (4) και τις αρχικές συνθήκες  $y(0) = 1$  και  $y'(0) = 1$  ως εξής:

$$\begin{aligned} y_h(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\ y'_h(0) &= 2c_1 + c_2 = 1, \end{aligned} \quad \text{οπότε} \quad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση της (3) είναι (Σχ. 2.1.2 - 2)

$$y_h(x) = e^{-2x}(1 - x).$$

Η λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή  $e^{-2x} \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η  $y_h(x) = 0$ , όταν  $x_0 = 1$ . Το  $x_0$  λέγεται **σημείο στατικής ισορροπίας**.

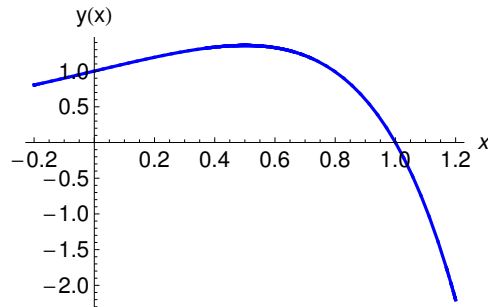
### Παράδειγμα 2.1.2 - 3

Όμοια η εξίσωση

$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y'_0 = y'(0) = 0. \quad (5)$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική της εξίσωση της (5) είναι

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= 16\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \\ \text{και ρίζες} \quad \lambda_1 &= -\frac{1}{4} + i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4} - i, \end{aligned}$$



**Σχήμα** 2.1.2 - 2: Παράδειγμα 2.1.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης  $y_h(x) = e^{-2x}(1-x)$ , όταν  $x \in [-0.2, 1.2]$

οπότε σύμφωνα με την (2.1.2 – 5) έχουμε τη γενική λύση

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{4}} (c_1 \cos x + c_2 \sin x), \quad (6)$$

όταν  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

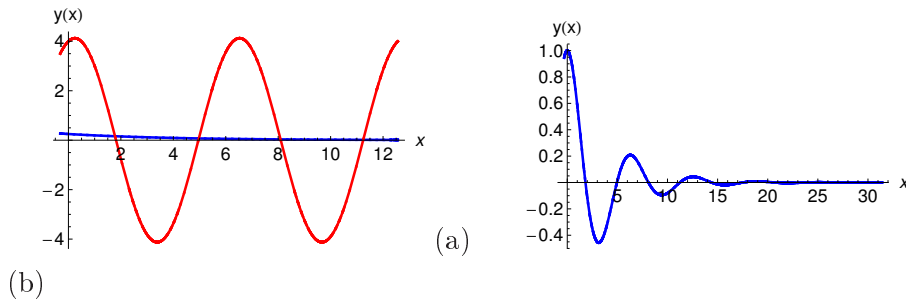
Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (6) και τις αρχικές συνθήκες  $y(0) = 1$  και  $y'(0) = 0$  ως εξής:

$$\begin{aligned} y_h(0) &= c_1 + \quad = 1 & \text{οπότε} & c_1 = 1 \\ y'_h(0) &= -\frac{1}{4}c_1 + c_2 = 0, & & c_2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση της (5) είναι (Σχ. 2.1.2 - 3)

$$y_h(x) = \frac{1}{4} e^{-x/4} (4 \cos x + \sin x).$$

Η λύση περιγράφει μια **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**.



**Σχήμα 2.1.2 - 3:** Παράδειγμα 2.1.2 - 2, όταν  $x \in [-\pi/10, 4\pi]$ : (a) το διάγραμμα της  $\frac{1}{4} e^{-x/4}$  μπλε (απόσβεση) και της  $4 \cos x + \sin x$  κόκκινη καμπύλη (αμειώτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης  $y_h(x) = \frac{1}{4} e^{-x/4} (4 \cos x + \sin x)$ . Η απόσβεση προκαλεί τελικά το μηδενισμό της μερικής λύσης

### Άσκηση

Αν  $y = y(x)$ , να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις <sup>4, 5</sup>

- i)  $y'' + 4y' + 5y = 0; y'_0 = y_0 = 1$       iv)  $y'' + 25y = 0; y'_0 = y_0 = 1$
- ii)  $y'' - y' - 12y = 0; y'_0 = 1, y_0 = 0$       v)  $y'' + 2y' + 4y = 0;$   
 $y'_0 = 1, y_0 = 0$
- iii)  $y'' + 2y' + 10y = 0; y'_0 = 1, y_0 = 0$       vi)  $y'' - 2y' + y = 0;$   
 $y'_0 = -1, y_0 = 1.$

### 2.1.3 Μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές

Από τον Ορισμό 2.1.1 - 2 προκύπτει ότι η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{2.1.3 - 1}$$

όταν  $a, b \in \mathbb{R}, y = y(x), r(x) \neq 0$  με  $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$  και υπάρχουν οι  $y'(x)$  και  $y''(x)$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ .

<sup>4</sup> **Λύση.**

- <sup>5</sup> (i)  $e^{-2x} (\cos x + 3 \sin x),$  (ii)  $\frac{1}{7} (-e^{-3x} + e^{4x}),$  (iii)  $\frac{1}{3} e^{-x} \sin 3x,$
- (iv)  $\frac{1}{5} (5 \cos 5x + \sin 5x),$  (v)  $\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-x} \sin(\sqrt{3}x),$  (vi)  $-e^x (-1 + 2x).$



Τότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα<sup>6</sup> η γενική λύση της (2.1.3 – 1) είναι  $y = y_h + y_p$ , όπου  $y_h$  είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή της (2.1.2 – 1) και  $y_p$  μία μερική λύση της μη ομογενούς (2.1.3 – 1).

Από τις μεθόδους προσδιορισμού της λύσης  $y_p$  θα εξεταστεί μόνον η μέθοδος, που δίνεται στη συνέχεια.

### Μέθοδος του Lagrange

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης  $y_p$  θεωρείται ότι στη γενική λύση

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

της αντίστοιχης ομογενούς της (2.1.3 – 1), δηλαδή της

$$y'' + ay' + by = 0,$$

οι σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  είναι συναρτήσεις του  $x$ , που πρέπει να προσδιοριστούν, έτσι ώστε να επαληθεύεται η (2.1.3 – 1), δηλαδή της

$$y'' + ay' + by = r(x). \quad (1)$$

Έστω  $c_1 = k_1(x)$  και  $c_2 = k_2(x)$ , οπότε

$$y_p(x) = k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x).$$

Τότε

$$y_p(x)' = k_1'(x)y_1(x) + k_1(x)y_1'(x) + k_2'(x)y_2(x) + k_2(x)y_2'(x). \quad (2)$$

Στη (2) οι συναρτήσεις  $k_1(x)$  και  $k_2(x)$  εκλέγονται, έτσι ώστε

$$k_1'(x)y_1(x) + k_2'(x)y_2(x) = 0, \quad (3)$$

οπότε από την (2) προκύπτει τότε ότι

$$y_p(x)'' = k_1(x)y_1''(x) + k_1'(x)y_1'(x) + k_2(x)y_2''(x) + k_2'(x)y_2'(x). \quad (4)$$

---

<sup>6</sup>Βλέπε Μάθημα 1 Θεώρημα 1.1.1-1.

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) και (4) στην (1), λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι λύσεις της (2.1.2 - 1), έχουμε

$$\begin{aligned} r(x) &= \underbrace{k_1 y_1'' + k_1' y_1'} + \underbrace{k_2 y_2'' + k_2' y_2'} + a \left( \underbrace{k_1 y_1'} + \underbrace{k_2 y_2'} \right) + b \left( \underbrace{y_1 k_1} + \underbrace{y_2 k_2} \right) \\ &= k_1 (y_1'' + \alpha y_1' + \beta y_1) + k_2 (y_2'' + \alpha y_2' + \beta y_2) + k_1' y_1' + k_2' y_2' \\ &= k_1' y_1' + k_2' y_2'. \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$k_1'(x)y_1'(x) + k_2'(x)y_2'(x) = r(x). \quad (6)$$

Οι εξισώσεις (3) και (6) ορίζουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τις συναρτήσεις  $k_1'(x)$  και  $k_2'(x)$ , από τη λύση του οποίου προκύπτει

$$k_1(x) = - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx \quad \text{και} \quad k_2(x) = \int \frac{r(x) y_1(x)}{u(x)} dx, \quad \text{όταν}$$

$$u(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x). \quad (2.1.3 - 2)$$

Τότε σύμφωνα και με την (2.1.3 - 2) η γενική λύση της (2.1.3 - 1) είναι<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) \\ &= \mathbf{c}_1 \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_2 \mathbf{y}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{x}) \mathbf{y}_2(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.1.3 - 3)$$

### Παράδειγμα 2.1.3 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y_0' = y'(0) = 0. \quad (1)$$

**Λύση.** Η ομογενής εξίσωση της (1) είναι η

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta > 0 \quad \text{και} \quad \text{ρίζες τις} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

<sup>7</sup>Η απόδειξη του τύπου (2.1.3 - 3) δεν είναι στην εξεταστέα ύλη.

Άρα σύμφωνα με την (2.1.2 – 3) η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad (2)$$

όταν  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

Τότε από την (2.1.3 – 2) προκύπτει ότι

$$u(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = e^x (2e^{2x}) - e^x e^{2x} = e^{3x},$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{x e^{2x}}{e^{3x}} dx = - \int x e^{-x} dx \\ &= x e^{-x} + e^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x) y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{x e^x}{e^{3x}} dx = \int x e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}. \end{aligned}$$

Άρα από την (2) και την (2.1.3 – 3) έχουμε ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x (x e^{-x} + e^{-x}) + e^{2x} \left( -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} x. \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (1) αποδεικνύεται ότι είναι η

$$y(x) = \frac{3}{4} + \frac{x}{2} - e^x + \frac{e^{2x}}{4}.$$

■

### Παράδειγμα 2.1.3 - 2

Όμοια της

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = y'_0 = y'(0) = 0. \quad (3)$$

**Λύση.** Η ομογενής εξίσωση της (3) είναι

$$y'' + 2y' + y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta = 0 \quad \text{και} \quad \text{ρίζα} \quad \text{διπλή} \quad \lambda = -1.$$

Άρα σύμφωνα με την (2.1.2 - 4) η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad (4)$$

όταν  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την (2.1.3 - 2) προκύπτει

$$u(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{-x}(xe^{-x})' - (e^{-x})'xe^{-x} = e^{-2x},$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= - \int \frac{r(x)y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{e^{-2x} x e^{-x}}{e^{-2x}} dx = - \int x e^{-x} dx \\ &= x e^{-x} + e^{-x}, \end{aligned}$$

$$k_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{e^{-2x} e^{-x}}{e^{-2x}} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x}.$$

Άρα από την (4) και την (2.1.3 - 3) έχουμε ότι η γενική λύση της (3) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^{-x}(x e^{-x} + e^{-x}) + x e^{-x}(-e^{-x}) \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^{-2x}. \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (3) είναι

$$y(x) = e^{-2x} + x e^{-x} - e^{-x} = e^{-2x}(1 + x e^x - e^x).$$

■

### Παράδειγμα 2.1.3 - 3

Όμοια η

$$y'' + 4y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y'_0 = y'(0) = 0. \quad (5)$$

**Λύση.** Η ομογενής εξίσωση της (5) είναι

$$y'' + 4y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \quad \text{και} \quad \text{ρίζες} \quad \lambda = 2i, \quad \bar{\lambda} = -2i.$$

Άρα σύμφωνα με την (2.1.2 – 5) η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \quad (6)$$

όταν  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την (2.1.3 – 2) είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = \cos 2x (\sin 2x)' - (\cos 2x)' \sin 2x \\ &= 2 (\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{x \sin 2x}{2} dx = -\frac{1}{2} \int x \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} \int x \left[ -\frac{\cos 2x}{2} \right]' dx = \frac{x}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x) y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{x \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int x \left[ -\frac{\sin 2x}{2} \right]' dx = \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x. \end{aligned}$$

Άρα από την (6) και την (2.1.3 – 3) έχουμε ότι η γενική λύση της (5) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \cos 2x \left( \frac{x}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \underbrace{\sin 2x} \right) \\ &\quad + \sin 2x \left( \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \underbrace{\cos 2x} \right) \\ &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4}. \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (5) είναι

$$y(x) = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \sin 2x.$$

■

**Παράδειγμα 2.1.3 - 4**

Όμοια η

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = y'_0 = y'(0) = 0. \quad (7)$$

**Λύση.** Η ομογενής εξίσωση της (7) είναι

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \quad \mu\epsilon \quad \Delta < 0$$

και ρίζες  $\lambda = -1 + 3i, \quad \bar{\lambda} = -1 - 3i.$

Άρα σύμφωνα με την (2.1.2 - 5) η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x)e^{-x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x), \quad (8)$$

όταν  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την (2.1.3 - 2) είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x) = e^{-x} \cos 3x (-e^{-x} \sin 3x + 3e^{-x} \cos 3x) \\ &\quad - e^{-x} \sin 3x (-e^{-x} \cos 3x - 3e^{-x} \sin 3x) \\ &= 3e^{-x} (\cos^2 3x + \sin^2 3x) = 3e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= - \int \frac{r(x)y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{1 \cdot e^{-2x} \sin 3x}{3e^{-x}} dx = -\frac{1}{3} \int e^x \sin 3x dx \\ &= -\frac{e^x}{10} (-3 \cos 3x + \sin 3x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x)y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{1 \cdot e^{-x} \cos 3x}{3e^{-2x}} dx = \frac{1}{3} \int e^x \cos 3x dx \\ &= \frac{e^x}{10} (\cos 3x + 3 \sin 3x). \end{aligned}$$

Άρα από την (8) και την (2.1.3 – 3) έχουμε ότι η γενική λύση της (7) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) \\ &\quad + e^{-x} \cos 3x \left[ -\frac{e^x}{3 \cdot 10} (-3 \cos 3x + \underbrace{\sin 3x}) \right] \\ &\quad + e^{-x} \sin 3x \left[ \frac{e^x}{3 \cdot 10} (\underbrace{\cos 3x} + 3 \sin 3x) \right] \\ &= e^{-x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{3}{3 \cdot 10} (\cos^2 3x + \sin^2 3x) \\ &= e^{-x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (7) είναι

$$y(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \left( e^{-x} \cos 3x + \frac{1}{3} e^{-x} \sin 3x \right).$$

■

Τέλος πρέπει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι είναι πολλές οι περιπτώσεις, που η μέθοδος σε πολλές εφαρμογές αδυνατεί να δώσει λύση. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται κυρίως αριθμητικές μέθοδοι.

## Άσκηση

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν  $y = y(x)$  και  $y_0 = y'_0 = 0$ <sup>8,9</sup>

$$\begin{array}{ll} i) & y'' + 4y' + 13y = e^{-x} & iv) & y'' + 2y' + y = \sin x \\ ii) & y'' + y = \sin x & v) & y'' + y' = e^{-x} \sin x \\ iii) & y'' + 3y' + 2y = x & vi) & y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x}. \end{array}$$

<sup>8</sup> **Λύση.**

$$\begin{array}{ll} ^9(i) & \frac{1}{30} e^{-2x} (3e^x - 3 \cos 3x - \sin 3x), & (ii) & \frac{1}{2} (-x \cos x + \sin x), \\ (iii) & -\frac{3}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + e^{-x} + \frac{x}{2}, & (iv) & -\frac{1}{2} e^{-x} (1 + x - e^x \cos x), \\ (v) & \frac{1}{2} e^{-x} (-2 + e^x + \cos x - \sin x), & (vi) & e^{-3x} (1 - e^{2x} + 2x e^{2x}). \end{array}$$

---

<sup>10</sup>Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: <http://users.teiath.gr/bratsos/>





# Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978-960-351-874-7.
- [2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [3] Bronson, R. (1978), Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική, ISBN 978-000-761-014-3.
- [4] Αθανασιάδη, Α. (1997), Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Διόσκουροι, ISBN 960-650-00-4.
- [5] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978-960-524-184-1 .
- [6] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960-418-087-8.

## Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- [http://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page)
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

# Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

## Τέλος Ενότητας

### Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



## Σημειώματα

### Σημείωμα Αναφοράς

Copyright TEI Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Ανώτερα Μαθηματικά II. Ενότητα 2: Διαφορικές Εξισώσεις – Μέρος II». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: [ocp.teiath.gr](http://ocp.teiath.gr).

### Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

### Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- Το Σημείωμα Αναφοράς
- Το Σημείωμα Αδειοδότησης
- Τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- Το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.