Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 8: Τριπλά Ολοκληρώματα

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 8

ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

8.1 Ορισμός και ιδιότητες

8.1.1 Ορισμός

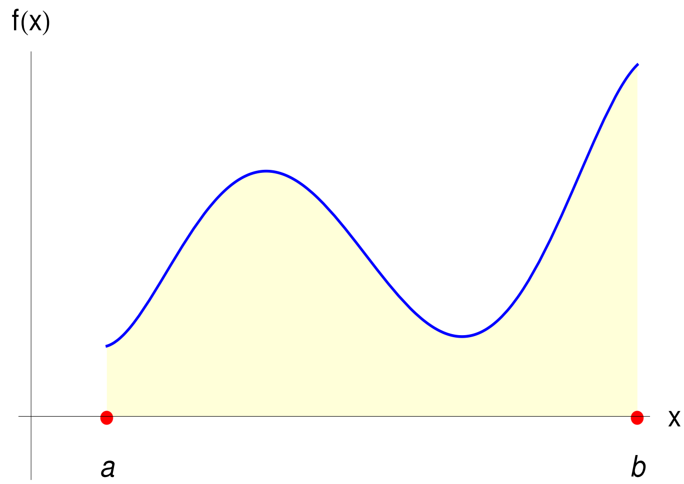
Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ γεωμετρικά παριστάνει το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τις ευθείες $x = a, b$ και τον x-άξονα (Σχ. 8.1.1 - 1), ενώ από το προηγούμενο μάθημα ότι το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ τον όγκο του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z = f(x,y)$, το πεδίο ορισμού D και του οποίου οι ακμές είναι παράλληλες προς τον z-άξονα (Σχ. 8.1.1 - 2).

Επεκτείνοντας τις παραπάνω γεωμετρικές ερμηνείες έστω η συνάρτηση $f(x,y,z)$ με πεδίο ορισμού

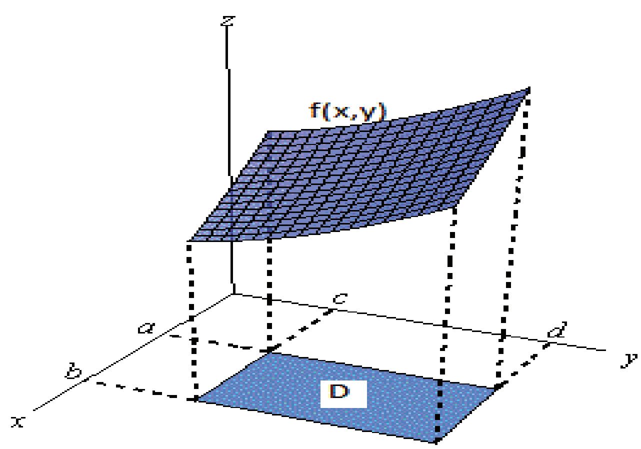
$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \Re^3$$

που υποτίθεται ότι είναι φραγμένη για κάθε $(x,y,z) \in D$. Αν στην περίπτωση αυτή ο τόπος D υποδιαιρείθεί από τα σημεία

$$\begin{array}{rlcc}
x_i \in [a_1, b_1]\,; & i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n & \text{με πλάτος διαμέρισης} & \Delta x, \\
y_j \in [a_2, b_2]\,; & j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m & \ldots & \Delta y, \\
z_k \in [a_3, b_3]\,; & k = 1,\, 2,\, \ldots,\, p & \ldots & \Delta z,
\end{array}$$



Σχήμα 8.1.1 - 1: γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$



Σχήμα 8.1.1 - 2: γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$

τότε, έστω $\Delta A = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ ο **όγκος** του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου της παραπάνω διαμέρισης. Η απεικόνιση σε άξονα συντεταγμένων της τιμής $f\left(x_i^*, y_j^*, z_k^*\right)$ γίνεται προσθέτοντας στις ήδη γνωστές τρεις διαστάσεις x, y, z μια επί πλέον τέταρτη επί πλέον διάσταση. Τότε έχει έννοια το παρακάτω άθροισμα:

$$V \approx f\left(x_1^*, y_1^*, z_1^*\right) \Delta A + \ldots + f\left(x_n^*, y_m^*, z_p^*\right) \Delta A. \qquad (8.1.1 - 1)$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι, όταν η διαγώνιος των παραπάνω παραλληλεπιπέδων τείνει στο μηδέν καθώς τα n, m $p \to +\infty$, το άθροισμα $(8.1.1-1)$ συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω I, που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων (x_i, y_j, z_k). Σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός.[1]

Ορισμός 8.1.1 - 1 (τριπλού ολοκληρώματος). *Ορίζεται σαν τριπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)$ στο $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ η οριακή τιμή*

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \lim_{n,m\ p \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f\left(x_i^*, y_j^*, y_k^*\right) \Delta A, \end{aligned} \qquad (8.1.1 - 2)$$

εφόσον υπάρχει.

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε φραγμένο πεδίο ορισμού D της f.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η τέταρτη διάσταση συμβολίζει το χρόνο t, τότε αλλάζοντας τη σειρά των μεταβλητών, έστω ότι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι με μεταβλητές x, y, t και η τέταρτη διάσταση είναι η z. Υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές x, y είναι επίσης συναρτήσεις του t, τότε δίνοντας μια τιμή στο t, έστω t_0, το ολοκλήρωμα της $z = \tilde{f}(x, y, t_0)$ θα ορίζει σύμφωνα και με τη γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος τον όγκο του αντίστοιχου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

[1] Βλέπε επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Triple_integral*

Πρόταση 8.1.1 - 1. *Το τριπλό ολοκλήρωμα συμβολίζει γεωμετρικά την τιμή του όγκου, που δημιουργείται σε δεδομένη χρονική στιγμή t από τα αντίστοιχα $(x, y, z) \in D$.*

8.2 Ιδιότητες

Οι σημαντικότερες είναι:

I. **Γραμμική**
$$\iiint\limits_D [k\, f(x, y, z) + \lambda\, g(x, y, z)]\, dx\, dy$$
$$= k \iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \lambda \iiint\limits_D g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$
όταν $k,\ \lambda \in \Re$.

II. **Μέσης τιμής**
$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f\left(x_0, y_0, z_0\right)\, A$$
όπου A ο όγκος του τόπου D.

III. Αν η περιοχή D αποτελείται από τις χωριστές περιοχές D_1 και D_2, δηλαδή $D = D_1 \cup D_2$, τότε
$$\begin{aligned}\iiint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy\, dz &= \iiint\limits_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy\, dz \\ &\quad + \iiint\limits_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

8.3 Υπολογισμός και εφαρμογές

8.3.1 Μέθοδοι υπολογισμού

Ο υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος $(8.1.1 - 2)$ εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου ορισμού. Από τις υπάρχουσες μεθόδους υπολογισμού θα εξεταστούν μόνον οι παρακάτω δύο.[2]

[2] Ο αναγνώστης για εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

I. $D = \{\,(x, y, z) \in \Re^3 : \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad a_2 \leq y \leq b_2, \quad a_3 \leq z \leq b_3\}$

Τότε ο υπολογισμός γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 8.3.1 - 1. *Αν η συνάρτηση* $f(x,y,z)\,|\,D$ *με* $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \Re^3$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* D*, τότε*

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{D} f\,(x,y,z)\; dx\, dy\, dz &= \int\limits_{a_1}^{b_1} \left\{ \int\limits_{a_2}^{b_2} \left[\int\limits_{a_3}^{b_3} f\,(x,y,z)\; dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int\limits_{a_2}^{b_2} \left\{ \int\limits_{a_3}^{b_3} \left[\int\limits_{a_1}^{b_1} f\,(x,y,z)\; dx \right] dz \right\} dy \\ &= \int\limits_{a_3}^{b_3} \left\{ \int\limits_{a_1}^{b_1} \left[\int\limits_{a_2}^{b_2} f\,(x,y,z)\; dy \right] dx \right\} dz.\end{aligned}$$

Το θεώρημα αυτό είναι μια γενίκευση του αντίστοιχου θεωρήματος του Fubini για τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων. Σύμφωνα με το θεώρημα η τιμή του τριπλού ολοκληρώματος είναι **ανεξάρτητη** από τη σειρά ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 8.3.1 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int\limits_{D} 8\,xyz\, dx\, dy\, dz,$$

όταν

$$D = \Big\{ (x, y, z) \in \Re^3 \quad 2 \leq x \leq 3, \quad 1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1 \Big\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(8.3.1 - 1)$ έχουμε

$$I \;=\; \iiint\limits_{D} 8\,xyz\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{1}^{2} \left\{ \int\limits_{2}^{3} \left[\int\limits_{0}^{1} 8\,xyz\, dz \right] dx \right\} dy$$

$$= \int_1^2 \left\{ \int_2^3 \left[4\,xyz^2 \right]_0^1 dx \right\} dy = \int_1^2 \left[\int_2^3 4\,xy\,dx \right] dy$$

$$= \int_1^2 \left[2\,x^2 y \right]_2^3 dx = \int_1^2 10\,y\,dy = 15.$$

■

II.

$$D = \{(x,y,z) \in \Re^3 : \quad a_1 \le x \le b_1 , \qquad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$$
$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$$

Τότε ισχύει

$$I = \int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{8.3.1 - 1}$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

δηλαδή η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα από τη μεταβλητή, που εξαρτάται από τις άλλες δύο μεταβλητές (Προφανώς υπάρχουν άλλοι δύο τύποι παράστασης του τόπου D στην κατηγορία αυτή).

Παράδειγμα 8.3.1 - 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_D x^3 y^2 z\,dx\,dy\,dz,$$

όταν

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \Re^3 \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le z \le xy \right\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(8.3.1-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_D x^3y^2z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^x \left[\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x \left[\frac{1}{2}x^3y^2z^2 \right]_0^{xy} dy \right\} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^x x^5y^4\,dy \right] dx \\ &= \frac{1}{10}\int_0^1 x^{10}\,dx = \frac{1}{110}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 8.3.1 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \int_D \left(x^2+y^2-z^2\right)\,dx\,dy\,dz,$$

όταν

$$D = \left\{(x,y,z)\in\Re^3 :\quad x+y+z\le 1,\quad x,\,y,\,z\ge 0\right\}.$$

Λύση. Όμοια με τον τύπο $(8.3.1-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_D \left(x^2+y^2-z^2\right)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \left(x^2+y^2-z^2\right)\,dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[x^2z+y^2z-\frac{z^3}{3} \right]_0^{1-x-y} dy \right\} dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{60}.$$

■

8.3.2 Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων

Υπολογισμός όγκων

Αν ο τόπος D είναι κλειστό και φραγμένο στερεό, τότε η τιμή του τριπλού ολοκληρώματος

$$\int\int\int_D 1 \, dx \, dy \, dz \qquad (8.3.2 - 1)$$

ισούται με τον **όγκο** του D.

Υπολογισμός μάζας

Αν $\rho(x, y, z)$ με $\rho(x, y, z) > 0$ για κάθε $(x, y, z) \in D$ παριστάνει την **πυκνότητα** της μάζας, που κατανέμεται με συνεχή τρόπο στο D, τότε η **συνολική μάζα** M του D δίνεται από τον τύπο

$$M = \int\int\int_D \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \qquad (8.3.2 - 2)$$

Στην περίπτωση αυτή το **κέντρο βάρους** (x_0, y_0) δίνεται από τις σχέσεις

$$x_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\int\int\int_D x \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\int\int\int_D \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz},$$

$$y_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\int\int\int_D y \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\int\int\int_D \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz},$$

$$z_0 = \frac{M_z}{M} = \frac{\int\int\int_D z \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\int\int\int_D \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}$$

όπου οι

$$M_x = \iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad M_y = \iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad \text{και}$$

$$M_z = \iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

είναι οι **ροπές 1ης τάξης** του D.

[3]

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων