Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 7: Οριακή Τιμή Συνάρτησης

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 7

ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στο μάθημα αυτό θα δοθεί η έννοια του ορίου μιας πραγματικής συνάρτησης με τρόπο προσαρμοσμένο στις απαιτήσεις των διαφόρων εφαρμογών, που απαιτού-νται στην επιστήμη του. Ο αναγνώστης για μια αυστηρά μαθηματική μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

7.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

7.1.1 Σύγκλιση σε σημείο

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα 3 ο παρακάτω ορισμός της πραγματικής συνάρτησης

Ορισμός 7.1.1 - 1 (συνάρτησης). *Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\Re$. Τότε λέγεται συνάρτηση, μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$f: \qquad D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T, \tag{7.1.1 - 1}$$

όταν το D είναι το πεδίο ορισμού και το T πεδίο τιμών της συνάρτησης f.

Πίνακας 7.1.1 - 1: Παράδειγμα 7.1.1 - 1

x	1.7	1.8	1.9	1.99	2	2.01	2.1	2.2	2.3
$f(x)$	5.8	6.2	6.6	6.96	7	7.04	7.4	7.8	8.2

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν x_0 σημείο του πεδίου ορισμού D, τότε η αντίστοιχη τιμή $f(x_0)$ της συνάρτησης υπολογίζεται αντικαθιστώντας στον τύπο $f(x)$ όπου x το x_0.

Παράδειγμα 7.1.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 4x - 1 \quad \text{με πεδίο ορισμού το} \quad \Re.$$

Τότε, αν $x = x_0 = 2$, είναι $f(x_0) = f(2) = 7$ κ.λπ.

Ορίζεται στη συνέχεια η έννοια της περιοχής ενός σημείου ως εξής:

Ορισμός 7.1.1 - 2 (περιοχής). *Η περιοχή ενός σημείου x_0 με ακτίνα δ, συμβολίζεται με $\varpi(x_0, \delta)$ και ορίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει ότι, αν $x \in \varpi(x_0, \delta)$, τότε*[1]

$$|x - x_0| < \delta. \tag{7.1.1 - 2}$$

Υποθέτουμε ότι στο Παράδειγμα 7.1.1 - 1 οι τιμές στη μεταβλητή x δίνονται πλησίον του 2 και είναι μικρότερες, αντίστοιχα μεγαλύτερες κατά 0.3 ή διαφορετικά λαμβάνοντας υπ' όψιν και τον Ορισμό 7.1.1 - 2 ότι ανήκουν σε μια περιοχή του 2 με ακτίνα $\delta = 0.3$, δηλαδή $x \in \varpi(2, \delta)$. Τότε από τις αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ προκύπτουν οι τιμές του Πίνακα 7.1.1 - 1.

Επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \;\Leftrightarrow\; -\delta < x - 2 < \delta \;\Leftrightarrow\; |x - 2| < \delta, \tag{7.1.1 - 3}$$

[1] Είναι: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ή $-\delta < x - x_0 < \delta$.

ενώ για τις αντίστοιχες τιμές της $f(x)$, που θα είναι όμοια σε μια απόσταση έστω ε από την τιμή $f(2) = 7$ ότι

$$7 - \varepsilon < f(x) < 7 + \varepsilon \;\;\Leftrightarrow\;\; -\varepsilon < f(x) - f(2) < \varepsilon$$

δηλαδή

$$|f(x) - f(2)| < \varepsilon. \qquad (7.1.1 - 4)$$

Θα δειχθεί τώρα ότι η σχέση $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, όταν το x παίρνει τιμές, που επαληθεύουν την $(7.1.1-3)$. Πράγματι, αν

$$|f(x) - f(2)| < \varepsilon, \quad \text{δηλαδή} \quad |(4x-1) - 7| < \varepsilon \quad \text{ή} \quad 4|x-2| < \varepsilon,$$

τότε

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Επομένως η $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε ε, όταν στην $(7.1.1-3)$ είναι $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα αυτό, αν $\varepsilon = 10^{-2}$, τότε ο x πρέπει να παίρνει τιμές, έτσι ώστε

$$|x - 2| < \frac{10^{-2}}{4} = 0.0025 \quad \text{ή} \quad 2 - 0.0025 < x < 2 + 0.0025,$$

δηλαδή $x \in (1.9975, 2.0025)$, ενώ ανάλογα διαστήματα μεταβολών του x θα προκύψουν[2] **για κάθε** $\varepsilon > 0$, όπως $\varepsilon = 10^{-10}$, $10^{-50}, \ldots$. Άρα, αν θεωρηθεί ότι το $\varepsilon \to 0$, δηλαδή, αν η περιοχή περί το σημείο $f(2)$ τείνει να έχει ακτίνα 0 ή διαφορετικά ότι οι τιμές της $f(x)$ τείνουν στην τιμή $f(2)$, τότε πάντοτε υπάρχει κατάλληλη περιοχή του x ακτίνας $\delta = \delta(\varepsilon)$, που να το εξασφαλίζει.

Η ιδιότητα αυτή στα μαθηματικά εκφράζεται λέγοντας ότι, όταν ο x τείνει προς τον αριθμό 2, η συνάρτηση $f(x) = 4x - 1$ έχει οριακή τιμή ή όριο τον αριθμό 7, ενώ συμβολικά στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 7. \qquad (7.1.1 - 5)$$

Παρατήρησεις 7.1.1 - 1

i) Το lim αποτελεί συγκοπή της λέξης limes, που σημαίνει όριο.

[2] Ο όρος **για κάθε** $\varepsilon > 0$ είναι απαραίτητος, διαφορετικά τα συμπεράσματα που ακολουθούν, δεν ισχύουν.

ii) Σύμφωνα και με τον Πίνακα 7.1.1 - 1, όταν στην $(7.1.1-5)$ γράφεται $x \to 2$ αυτό σημαίνει ότι το x τείνει στο 2 από μικρότερες (συμβολικά $x \to 2-0$ ή $x \to 2^-$), αντίστοιχα μεγαλύτερες (συμβολικά $x \to 2+0$ ή $x \to 2^+$) τιμές.

iii) Στα επόμενα, όταν απαιτείται ο υπολογισμός ορίων της μορφής $(7.1.1-5)$, δεν θα γίνεται απόδειξη ότι μια σχέση της μορφής $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$.

Δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 7.1.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, x_0) \cup (x_0, b] \subset \Re$. Τότε θα λέγεται ότι η f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to x_0$ ή διαφορετικά ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και θα συμβολίζεται αυτό με $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ τότε και μόνον, όταν* **για κάθε** *$\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε (Σχ. 7.1.1 - 1)*

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x \in [a, x_0) \cup (x_0, b] \ \text{ με } \ |x - x_0| < \delta \qquad (7.1.1 - 6)$$

Στην περίπτωση που $l = 0$, η f θα λέγεται **μηδενική** στο x_0.

Σημείωση 7.1.1 - 1

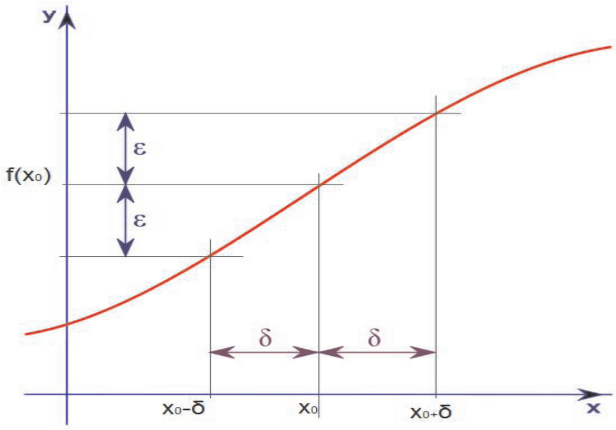
Στα Μαθηματικά δίνονται αναλυτικότερα οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 7.1.1 - 4. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(x_0, b] \subset \Re$. Τότε θα λέγεται ότι η f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to x_0^+$ ή διαφορετικά ότι υπάρχει το δεξιό όριο της f στο x_0 και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in (x_0, b] \quad \text{με} \quad 0 < x - x_0 < \delta \qquad (7.1.1 - 7)$$



Σχήμα 7.1.1 - 1: Ορισμός 7.1.1 - 3 με $l = f\,(x_0)$: αν $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f\,(x_0)| < \epsilon$

Ορισμός 7.1.1 - 5. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, x_0) \subset \Re$. Τότε θα λέγεται ότι η f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to x_0^-$ ή διαφορετικά ότι υπάρχει το αριστερό όριο της f στο x_0 και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad x \in [a, x_0) \quad \textit{με} \quad 0 < x_0 - x < \delta \qquad (7.1.1 - 8)$$

Τα όρια αυτά λέγονται και **μονόπλευρα** όρια της f στο x_0.

Παρατήρηση 7.1.1 - 1

Η οριακή τιμή $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει, όταν υπάρχουν το αριστερό, αντίστοιχα δεξιό όριό της στο x_0 και είναι ίσα μεταξύ τους. Σε κάθε άλλη περίπτωση η οριακή τιμή δεν υπάρχει.

Πίνακας 7.1.1 - 2: Παράδειγμα 7.1.1 - 3

x	0	0.5	0.99	1.02	1.5
$f(x)$	4	16	4×10^4	10^4	16

Παράδειγμα 7.1.1 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x+\frac{|x|}{x}\quad \text{με πεδίο ορισμού}\quad D=\Re-\{0\}.$$

Τότε, αν $x<0$, είναι $|x|=-x$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x+\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=0-1=-1,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x+\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=0+1=1,$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x),$$

οπότε η οριακή τιμή $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 7.1.1 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{4}{(x-1)^2}\quad \text{με πεδίο ορισμού}\quad D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

Είναι προφανές ότι, αν οι τιμές του x τείνουν στην τιμή 1, τότε ενδεικτικά έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.1.1 - 2.

Ανάλογα με την απόδειξη στην (7.1.1−4) είναι δυνατόν και στην περίπτωση αυτή να αποδειχθεί ότι, για κάθε αριθμό $M>0$ υπάρχει ένα αντίστοιχο διάστημα τιμών του x στην περιοχή του 1, για το οποίο να ισχύει ότι

$$\frac{4}{(x-1)^2}>M. \tag{7.1.1 - 9}$$

Πράγματι, διαδοχικά από την ανισότητα $(7.1.1-9)$ προκύπτει

$$\frac{4}{(x-1)^2} > M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 < \frac{4}{M}$$

$$|x-1| < \frac{2}{\sqrt{M}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{2}{\sqrt{M}}\,.$$

Επομένως, αν $M = 10^4$, για να είναι $f(x) > 10^4$, πρέπει σύμφωνα με την τελευταία παραπάνω ανισότητα ο x να παίρνει τιμές στο διάστημα

$$1 - \frac{2}{100} < x < 1 + \frac{2}{100}\,, \quad \text{δηλαδή} \quad 0.98 < x < 1.02.$$

Η ανισότητα $(7.1.1-4)$, όταν χρησιμοποιηθεί ο αριθμός ε με $\varepsilon > 0$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{4}{(x-1)^2} > \frac{1}{\varepsilon}\,. \qquad (7.1.1 - 10)$$

Η παραπάνω ιδιότητα εκφράζεται στα μαθηματικά λέγοντας: όταν ο x τείνει στον αριθμό 1, η συνάρτηση $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ ή ότι έχει όριο το $+\infty$, ενώ συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.$$

Όμοια για τη συνάρτηση

$$g(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} \quad \text{είναι} \quad \lim_{x\to 1} g(x) = -\infty.$$

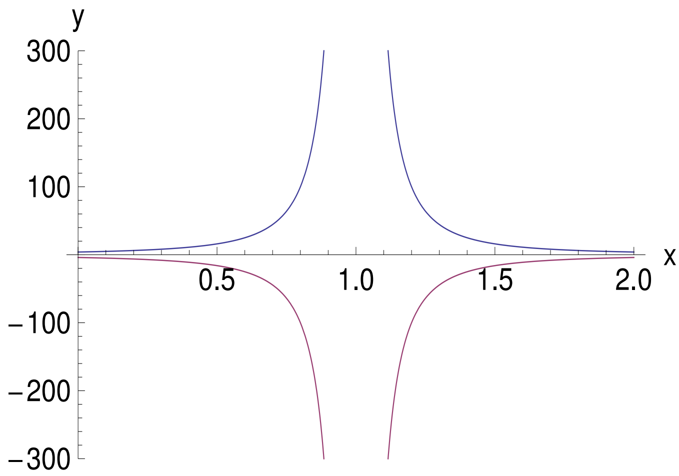
Η ανάλογη ανισότητα της $(7.1.1-10)$ στην περίπτωση αυτή είναι η

$$-\frac{4}{(x-1)^2} < -\frac{1}{\varepsilon}\,. \qquad (7.1.1 - 11)$$

Τα διαγράμματα των συναρτήσεων f και g δίνονται στο Σχ. 7.1.1 - 2.

Σημείωση 7.1.1 - 2

Στο εξής δε θα γίνεται υπολογισμός των τιμών της μεταβλητής για τις οποίες ισχύει η $(7.1.1-10)$, αντίστοιχα η $(7.1.1-11)$, αλλά μόνον θα χρησιμοποιούνται τα συμπέρασμά των.



Σχήμα 7.1.1 - 2: Παράδειγμα 7.1.1 - 3: η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ μπλε και η $g(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$ κόκκινη καμπύλη

Παράδειγμα 7.1.1 - 4

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}\,.$$

Λύση. Προφανώς είναι $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Άρα σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.1.1 - 1 πρέπει να εξεταστούν οι παρακάτω δύο οριακές τιμές:

i)

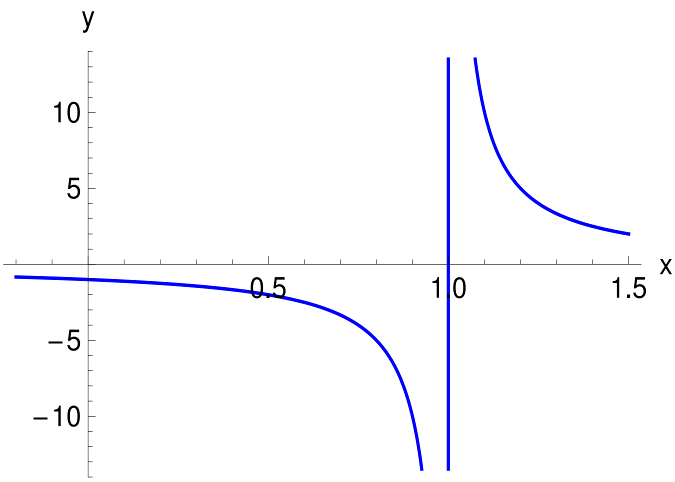
$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1}\,.$$

Τότε $x \in (-\infty, 1)$, οπότε $x < 1$, δηλαδή $x - 1 < 0$. Επομένως

$$\frac{1}{x-1} < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty, 1),$$

οπότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.1.1 - 2 είναι:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty\,.$$



Σχήμα 7.1.1 - 3: Παράδειγμα 7.1.1 - 4: το διάγραμμα της συνάρτησης $\frac{1}{x-1}$

ii)

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1}\,.$$

Τότε $x \in (1, +\infty)$, οπότε

$$x > 1, \quad \text{δηλαδή} \quad x - 1 > 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x-1} > 0$$

και επομένως

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = +\infty\,.$$

Άρα το όριο $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ δεν υπάρχει (Σχ. 7.1.1 - 3).

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

```
Limit[1/x-1),x->1,Direction->-1]
Limit[1/(x-1),x->1,Direction->1]
```

Παρατήρηση 7.1.1 - 2

Στα μαθηματικά, όταν η οριακή της συνάρτησης απειρίζεται, λέγεται ότι η συνάρτηση συγκλίνει **κατ' εκδοχή**.

Δίνεται τώρα ο ορισμός της κατ' εκδοχή σύγκλισης για την περίπτωση που η μεταβλητή τείνει σε σημείο ως εξής:

Ορισμός 7.1.1 - 6. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, x_0) \cup (x_0, b]$. Τότε θα ισχύει:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \tag{7.1.1 - 12}$$

για κάθε $x \in [a, x_0) \cup (x_0, b]$ με $|x - x_0| < \delta$.

ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \tag{7.1.1 - 13}$$

για κάθε $x \in [a, x_0) \cup (x_0, b]$ με $|x - x_0| < \delta$.

7.1.2 Σύγκλιση στο άπειρο

Αρχικά κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να δοθεί ο παρακάτω χρήσιμος για τα επόμενα μαθήματα ορισμός.

Ορισμός 7.1.2 - 1. *Η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, +\infty)$ θα λέγεται ότι είναι* **φραγμένη** *στην περιοχή του $+\infty$ τότε και μόνον, όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $M \geq 0$ και $\theta > 0$, έτσι ώστε*

$$|f(x)| < \theta \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, +\infty) \quad \text{και} \quad x > M. \tag{7.1.2 - 1}$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία της Παραγράφου 7.1.1 είναι δυνατόν να οριστεί ανάλογα η οριακή τιμή μιας συνάρτησης, έστω $f(x)$, όταν $x \to \infty$.

Παράδειγμα 7.1.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η $f(x)$ παίρνει τιμές απολύτως μικρότερες από οποιονδήποτε αριθμό ε με $\varepsilon > 0$, όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές απολύτως μεγαλύτερες από κατάλληλα οριζόμενο κάθε φορά αριθμό N με $N > 0$.

Πράγματι, έστω ε με $\varepsilon > 0$. Τότε, αν $\frac{1}{x-1} < \varepsilon$, διαδοχικά έχουμε

$$\frac{1}{x-1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x-1 < -\dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x < 1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\,. \end{cases}$$

Επομένως, αν $\varepsilon = \frac{1}{10^3}$, τότε για να ισχύει $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{10^3}$, αρκεί οι τιμές του x να είναι μεγαλύτερες του $1 + \frac{1}{\varepsilon} = 1 + 10^3 = 1001$ ή μικρότερες του $1 - \frac{1}{\varepsilon} = 1 - 10^3 = -999$.

Η παραπάνω ιδιότητα εκφράζεται στα μαθηματικά λέγοντας ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει όριο το 0, όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ και συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Επίσης χρησιμοποιείται και ο γενικότερος συμβολισμός $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Παράδειγμα 7.1.2 - 2

Όμοια συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x-1} \right) = 2$$

και

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = 1.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 7.1.2 - 2. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, +\infty)$. Τότε θα λέγεται ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to +\infty$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f(x) \to l$, όταν $x \to +\infty$ ή ισοδύναμα*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν η συνάρτηση $f(x) - l$ είναι μηδενική, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, +\infty) \quad \text{με} \quad x > N. \qquad (7.1.2 - 2)$$

Ορισμός 7.1.2 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, a]$. Τότε θα λέγεται ότι η συνάρτηση f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to -\infty$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f(x) \to l$, όταν $x \to -\infty$ ή ισοδύναμα*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν η συνάρτηση $f(x) - l$ είναι μηδενική, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty, a] \quad \text{με} \quad x < -N \tag{7.1.2 - 3}$$

Ο ορισμός της μηδενικής συνάρτησης στις παραπάνω δύο περιπτώσεις είναι προφανής.

Παράδειγμα 7.1.2 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = 25\, x^2.$$

Τότε για οποιοδήποτε αριθμό M με $M > 0$, υπάρχει πάντοτε ένας άλλος θετικός αριθμός, έστω N, έτσι ώστε για τιμές του x (θετικές ή αρνητικές) με $|x| > N$ να είναι $g(x) = 25\, x^2 > M$.

Πράγματι, έστω M με $M > 0$. Τότε, αν $25\, x^2 > M$, διαδοχικά έχουμε

$$25\, x^2 > M \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{\sqrt{M}}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \dfrac{\sqrt{M}}{5} \\ \text{ή} \\ x < -\dfrac{\sqrt{M}}{5}\,. \end{cases}$$

Επομένως, αν $M = 9 \times 10^4$, τότε για να ισχύει $25\, x^2 > 9 \times 10^4 = \left(3 \times 10^2\right)^2$, αρκεί οι τιμές του x να είναι μεγαλύτερες των $\frac{300}{5} = 60$ ή μικρότερες του $-\frac{300}{5} = -60$.

Η παραπάνω ιδιότητα όμοια εκφράζεται στα μαθηματικά λέγοντας ότι η συνάρτηση $g(x)$ έχει όριο το $+\infty$, όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ και συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:

- αν $\tilde{g}(x) = -25\,x^2$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = +\infty \quad \acute{\eta} \quad \lim_{x\to-\infty} \tilde{g}(x) = +\infty,$$

ενώ, αν $\hat{g}(x) = x^3$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \hat{g}(x) = +\infty \quad \acute{\eta} \quad \lim_{x\to-\infty} \hat{g}(x) = -\infty.$$

Σημείωση 7.1.2 - 1

Ανάλογα με τη Σημείωση 7.1.2 - 1 και στις περιπτώσεις αυτές στο εξής δε θα γίνεται υπολογισμός των τιμών της μεταβλητής για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω περιπτώσεις, αλλά μόνον θα χρησιμοποιούνται τα συμπέρασμά των.

Ο ορισμός της κατ' εκδοχή σύγκλισης μιας συνάρτησης στην περίπτωση αυτή γράφεται ως εξής:

Ορισμός 7.1.2 - 4. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a,+\infty)$. Τότε θα ισχύει:*

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{για κάθε} \quad x \in [a,+\infty) \quad \textit{με} \quad x > N. \tag{7.1.2 - 4}$$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{για κάθε} \quad x \in [a,+\infty) \quad \textit{με} \quad x > N. \tag{7.1.2 - 5}$$

Ορισμός 7.1.2 - 5. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, a]$. Τότε θα ισχύει*

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (-\infty, a] \quad \textit{με} \quad x < -N. \tag{7.1.2 - 6}$$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (-\infty, a] \quad \textit{με} \quad x < -N \tag{7.1.2 - 7}$$

Πίνακας 7.1.3 - 1: ιδιοτήτων συγκλινουσών συναρτήσεων όπου με ΑΜ συμβολίζεται η απροσδιόριστη μορφή

f	g	$f+g$	$f\,g$	f/g
f_0	g_0	f_0+g_0	$f_0\,g_0$	$f_0/g_0 \quad (g_0 \neq 0)$
f_0	∞	∞	$\infty \quad (f_0 \neq 0)$	0
∞	g_0	∞	$\infty \quad (g_0 \neq 0)$	∞
0	0	0	0	ΑΜ
0	∞	∞	ΑΜ	0
∞	0	∞	ΑΜ	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ΑΜ
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ΑΜ
$+\infty$	$-\infty$	ΑΜ	$-\infty$	ΑΜ
$-\infty$	$+\infty$	ΑΜ	$-\infty$	ΑΜ

7.1.3 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Δίνονται τώρα στον Πίνακα 7.1.3 - 1 περιληπτικά όλες οι ιδιότητες των συγκλινουσών συναρτήσεων με την έννοια της σύγκλισης, όπως παραπάνω έχει δοθεί, για δύο συναρτήσεις, έστω f και g με αντίστοιχες οριακές τιμές f_0 και g_0.

Σημειώσεις 7.1.3 - 1

- Οι συναρτήσεις f, g υποτίθεται ότι έχουν κοινό πεδίο ορισμού και ότι έχουν όριο έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ή ένα προσημασμένο άπειρο, όταν $x \to x_0 \in \Re$ ή $x \to \pm\infty$.
- Στις ιδιότητες του Πίνακα 7.1.3 - 1 συμπεριλαμβάνεται και η εξής: αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού, έστω

D και ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l, \quad \text{ενώ} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

για κάθε $x \in D$, τότε και $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

- Όταν η πράξη δεν είναι επιτρεπτή (απροσδιόριστη μορφή), τότε έχει τεθεί η ένδειξη ΑΜ.

Παρατήρηση 7.1.3 - 1

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ δεν πρέπει σε καμιά περίπτωση να θεωρούνται ως αριθμοί.

Παράδειγμα 7.1.3 - 1

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή $\lim_{x\to\infty} f(x)$, όταν

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}\,.$$

Λύση. Η $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Άρα

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

Παράδειγμα 7.1.3 - 2

Όμοια των συναρτήσεων

$$g(x) = \frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4} \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1} \quad \text{όταν} \quad x \to -\infty.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$g(x) = \frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4} = \frac{x^2\left(4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\,,$$

οπότε

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{4+0}{2+0} = 2$$

και

$$h(x) = \frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = x\,\frac{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\,,$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x\,\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = (-\infty)\frac{2+0}{1+0} = -\infty.$$

Παρατήρηση 7.1.3 - 2

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτουν τα εξής: όταν έχουμε να υπολογίσουμε την οριακή τιμή μιας ρητής συνάρτησης για $x \to \pm\infty$, τότε, αν

- ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, το όριο είναι το 0,
- ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή, το όριο ισούται με το πηλίκο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου στον αριθμητή προς τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του παρονομαστή, και
- ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή, τότε το όριο είναι ένα προσημειωμένο άπειρο ($+\infty$, αντίστοιχα $-\infty$).

Παράδειγμα 7.1.3 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \Re - \{-2, 1\}.$$

Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές $\lim_{x\to 1} f(x)$ και $\lim_{x\to -2} f(x)$.
Λύση. Έστω αρχικά ο υπολογισμός της οριακής τιμής $\lim_{x\to 1} f(x)$. Επειδή

η τιμή $x = 1$ μηδενίζει τον αριθμητή και τον παρονομαστή, δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου του Πίνακα 7.1.3 - 1. Τότε στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$f(x) = \frac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+1}{x+2} \quad \text{για κάθε} \quad x \in D,$$

οπότε

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\lim_{x \to 1}\left(x^2+1\right)}{\lim_{x \to 1}(x+2)} = \frac{2}{3}.$$

Όταν $x \to -2$, τότε $\lim_{x \to -2}\left(x^2+1\right) = 5$, ενώ το $x+2$ τείνει στο 0 μέσω αρνητικών τιμών, όταν $x \to -2-0$ και μέσω θετικών, όταν $x \to -2+0$. Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2-0} f(x) &= \lim_{x \to -2-0} \frac{x^2+1}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x \to -2+0} f(x) &= \lim_{x \to -2+0} \frac{x^2+1}{x+2} = +\infty. \end{aligned}$$

7.1.4 Όριο σύνθετης συνάρτησης

Ο υπολογισμός των οριακών τιμών των Παραγράφων 7.1.1 - 7.1.3 αναφέρεται σε απλές συναρτήσεις. Σε περιπτώσεις που η συνάρτηση είναι σύνθετη, δηλαδή της μορφής $f(g(x))$, τότε ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$, όταν $x \in D$ με D το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, γίνεται ως εξής:

- η συνάρτηση γράφεται στη μορφή $f(u)$ όπου $u = g(x)$.
- Υπολογίζεται, εφόσον υπάρχει, το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, και στη συνέχεια, όμοια εφόσον υπάρχει, το $\lim_{u \to u_0} f(u)$.

Παράδειγμα 7.1.4 - 1

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-x^2}$$

στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

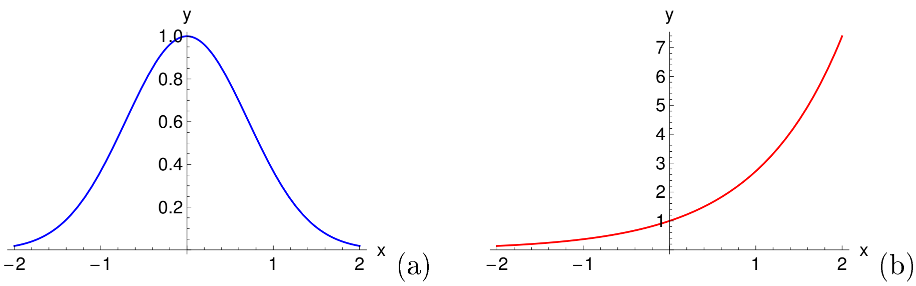
Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι προφανώς το $\Re$. Η f είναι σύνθετη συνάρτηση και γράφεται ως εξής:

$$f(u) = e^u, \quad \text{όταν} \quad u = g(x) = -x^2.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} g(x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(-x^2\right) = -\infty, \quad \text{οπότε} \\ \lim_{u \to -\infty} f(u) &= \lim_{x \to -\infty} e^u = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\quad \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0 \quad$ (Σχ. 7.1.4 - 1).



Σχήμα 7.1.4 - 1: Παράδειγμα 7.1.4 - 1 (a) Συνάρτηση e^{-x^2} και (b) e^x

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές των παρακάτω συναρτήσεων

i) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^5 + 4}$

ii) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin 4x}{x^2 + 1}$

iii) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 - 1}{3x^2 + 7}$

iv) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + 7x^2 + 2}{4x^2 + 1}$

v) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(3x^2 + x - 1\right)$

vi) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(5x^3 + x + 1\right)$

vii) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

viii) $\displaystyle \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}}$.

2. Όμοια των συναρτήσεων

$i)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad v)\ \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x+2}$

$ii)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+2x}{-5x^3+8}$ $\qquad vi)\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$

$iii)\ \lim\limits_{x \to 0} \cos^2\left(x^3+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\qquad vii)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x|x|}$

$iv)\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln\left(x^2+1\right)$ $\qquad viii)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3-1}{|x|}\ .$

[3]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος Θ. (2008), Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 978–960–456–092–9.

[4] Τσάγκας, Γρ. (1990), Μαθήματα Μιγαδικών Συναρτήσεων, Θεσσαλονίκη.

[5] Churchill R., Brown J. (2005), Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–7309–41–3.

[6] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[7] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

[8] Spiegel M., Complex Variables, Εκδότης McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 007–060–230–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων