Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 14: Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Μέρος ΙΙ

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 14

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Είναι γνωστό από το Μάθημα 13 ότι, όταν η $f\,|\,[\alpha,\beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ έχει έννοια και ορίζει μονοσήμαντα ένα πραγματικό αριθμό, που υπολογίζεται από τον τύπο

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(x)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha),$$

όταν $F(x)$ το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$, δηλαδή

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Όμως στις διάφορες εφαρμογές υπάρχουν περιπτώσεις όπου το ένα ή και τα δύο άκρα ολοκλήρωσης δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης, διαφορετικά το διάστημα ολοκλήρωσης είναι ανοικτό ή στο ένα ή και στα δύο άκρα. Αυτού του είδους τα ολοκληρώματα λέγονται **γενικευμένα**. Οι κυριότερες περιπτώσεις που περισσότερο εμφανίζονται στις διάφορες εφαρμογές πρόκειται να μελετηθούν στη συνέχεια αυτού του μαθήματος.

14.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Ανάλογα με τη μορφή του διαστήματος ολοκλήρωσης διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις.

14.1.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα του α' είδους

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[a, +\infty)$, τέτοια ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Τότε έχει έννοια η συνάρτηση[1]

$$\mathrm{I}(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{για κάθε } x \in [a, +\infty). \tag{14.1.1 - 1}$$

Ορισμός 14.1.1 - 1. *Ορίζεται σαν Γ.Ο. του* **α' είδους** *της f στο $[a, +\infty)$ το ολοκλήρωμα*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{14.1.1 - 2}$$

Ορισμός 14.1.1 - 2. *Το Γ.Ο. $(14.1.1-2)$ λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει τότε και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x)$.*

Στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \mathrm{I},$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x)$, λέγεται ότι το Γ.Ο. $(14.1.1-2)$ δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Όμοια είναι δυνατόν να οριστεί το Γ.Ο. α' είδους της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $(-\infty, \beta\,]$, υποθέτοντας ότι f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, \beta\,]$ για κάθε $x \in (-\infty, \beta\,]$ με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$\mathrm{J}(x) = \int_x^{\beta} f(t)\, dt \quad \text{για κάθε } x \in (-\infty, \beta\,]. \tag{14.1.1 - 3}$$

[1] Βλέπε Μάθημα 13 Παρατηρήσεις $13.1.1-1$ τύπος $(13.1.1-6)$.

Τότε θα λέγεται ότι το Γ.Ο. $(14.1.1-3)$ υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει, όταν και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{J}(x)$, οπότε στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\mathrm{J}=\int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx,$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty}J(x)$, θα λέγεται ότι το Γ.Ο. $(14.1.1-3)$ δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Έστω τώρα η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(-\infty,\,+\infty)$, τέτοια ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,\,y]$ για κάθε $x,\,y\in(-\infty,\,+\infty)$.

Ορισμός 14.1.1 - 3. *Ορίζεται σαν Γ.Ο. του α' είδους της f στο $\Re$ το ολοκλήρωμα*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{14.1.1 - 4}$$

Ορισμός 14.1.1 - 4. *Το Γ.Ο.* $(14.1.1-4)$ *λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

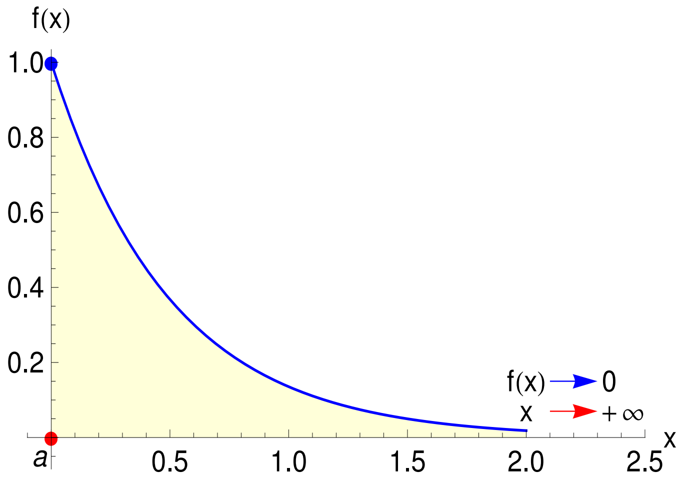
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \textit{και} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \;\; \textit{με}\;\; a\in\Re, \tag{14.1.1 - 5}$$

ενώ ορίζεται σαν η τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{14.1.1 - 6}$$

Ορισμός 14.1.1 - 5. *Το Γ.Ο.* $(14.1.1-4)$ *θα λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο.* $(14.1.1-5)$ *δεν υπάρχει.*

Αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη ή μη του Γ.Ο. $(14.1.1-4)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου a στην $(14.1.1-5)$.



Σχήμα 14.1.1 - 1: Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της e^{-2x} όπου προφανώς $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

Παράδειγμα 14.1.1 - 1

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 14.1.1 - 1)

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx.$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\,dx &= \int \frac{(-2x)'}{-2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int \overbrace{(-2x)'\,e^{-2x}}^{f'(x)e^{f(x)}}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} + c.\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 14.1.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-2t}\,dt\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} e^{-2t}\Big|_0^x\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}}^{0} - 1\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\,x} dx = \frac{1}{s}\,, \quad \text{όταν} \quad s > 0. \qquad (14.1.1 - 7)$$

Παρατήρηση 14.1.1 - 1

Το Γ.Ο. ολοκλήρωμα (Σχ. 14.1.1 - 2)

$$\int_0^{+\infty} e^{2x} dx.$$

δεν υπάρχει, επειδή

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{2x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{2t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} e^{2t}\Big|_0^x = \frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{2x}}^{+\infty} - 1\right) = +\infty.\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι το Γ.Ο.

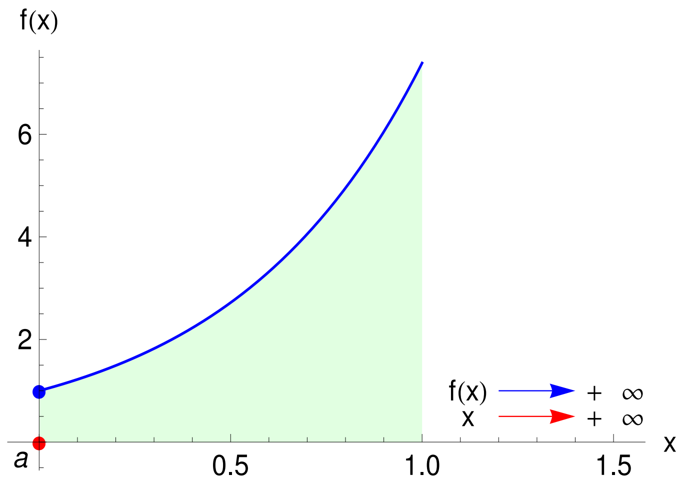
$$\int_0^{+\infty} e^{sx} dx\,, \quad \text{όταν} \quad s > 0 \qquad (14.1.1 - 8)$$

δεν υπάρχει.

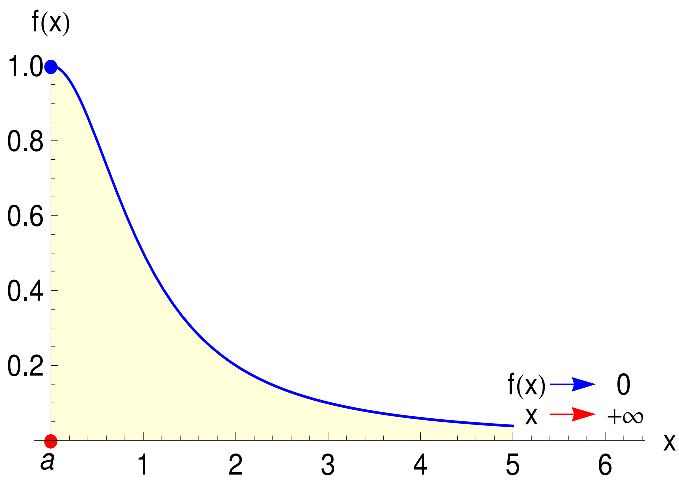
Παράδειγμα 14.1.1 - 2

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 14.1.1 - 3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$



Σχήμα 14.1.1 - 2: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{2x} dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της e^{2x} όπου προφανώς $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$



Σχήμα 14.1.1 - 3: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ όπου προφανώς $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left(\text{μορφή} \quad \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\right) \quad \tan^{-1} x + c.$$

Επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 14.1.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} t\Big|_0^x \\ &= \overbrace{\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} x}^{\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\tan^{-1} 0}^{0} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. \qquad (14.1.1 - 9)$$

Παρατήρηση 14.1.1 - 2

Σύμφωνα με τους ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του Μαθήματος 3

- η συνάρτηση $\tan x$ έχει πεδίο ορισμού το $D = \Re - \{\pm \frac{\pi}{2}, \cdots\}$ και γενικά το $D = \Re - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$, όταν $k = 0, \pm 1, \ldots$ (Σχ. 14.1.1 - 4a), ενώ το πεδίο τιμών της είναι το $T = \Re$.

  Γενικότερα η συνάρτηση

  $$\tan \omega x, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0, \quad \text{έχει πεδίο ορισμού το}$$

  $$D = \Re - \left\{\pm \frac{\pi}{2\omega}, \cdots\right\}$$

  $$\text{και τιμών το} \quad T = \Re. \qquad (14.1.1 - 10)$$

- Η αντίστροφη συνάρτηση $\tan^{-1} x = \arctan x$ ορίζεται για κάθε $x \in \Re$ και έχει πεδίο τιμών το $T = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Σχ. 14.1.1 - 4b). Τότε ισχύει ότι

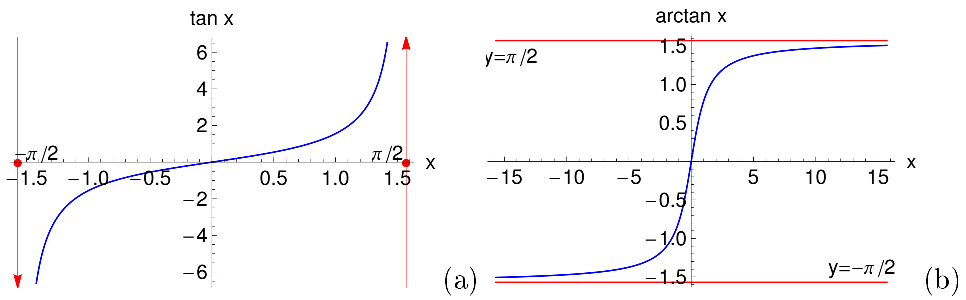
  $$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}. \qquad (14.1.1 - 11)$$

Γενικότερα η συνάρτηση

$$
\begin{aligned}
\tan^{-1}\omega x &= \arctan^{-1}\omega x, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0, \quad \text{έχει} \\
& \text{πεδίο ορισμού το} \quad D = \Re - \left\{ \pm \frac{\pi}{2\omega}, \cdots \right\} \\
& \text{και τιμών το} \quad T = \Re. \qquad (14.1.1 - 12)
\end{aligned}
$$

Άρα όμοια σύμφωνα με την $(14.1.1 - 11)$ και στην περίπτωση αυτή θα ισχύει ότι

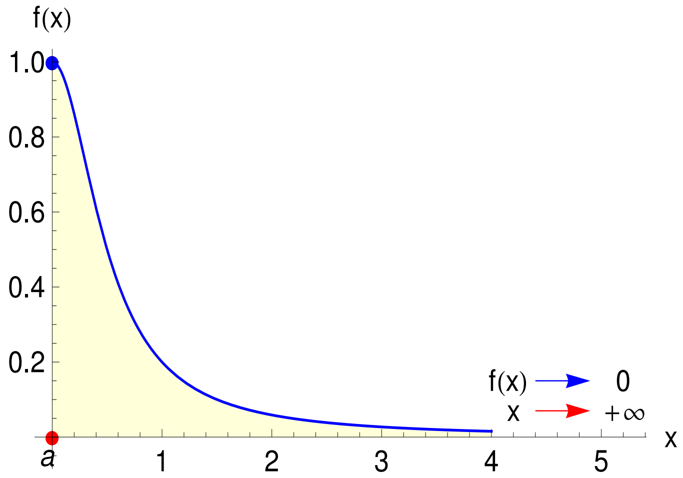
$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}\omega x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1}\omega x = \frac{\pi}{2}. \qquad (14.1.1 - 13)$$



Σχήμα 14.1.1 - 4: (a) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan x$, όταν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Οι κατακόρυφες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Προφανώς είναι $\lim_{x \to +\pi/2} \tan x = +\infty$ και $\lim_{x \to -\pi/2} \tan x = -\infty$, ενώ $\tan 0 = 0$. (b) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan^{-1} x = \arctan x$, όταν $x \in [-5\pi, 5\pi]$. Οι οριζόντιες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Τότε είναι $\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = +\frac{\pi}{2}$ και $\lim_{x \to -\infty} \tan x = -\frac{\pi}{2}$, ενώ $\tan^{-1} 0 = 0$

Όμοια τότε αποδεικνύεται ότι

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{0} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} t \Big|_{x}^{0} \\
&= \overbrace{\tan^{-1} 0}^{0} - \overbrace{\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x}^{-\frac{\pi}{2}} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$



Σχήμα 14.1.1 - 5: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$ όπου προφανώς $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Άρα

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,. \qquad (14.1.1 - 14)$$

Συνδυάζοντας τις $(14.1.1-9)$ και $(14.1.1-14)$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν την $(14.1.1-6)$ προκύπτει ότι

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \qquad (14.1.1 - 15)$$

Παράδειγμα 14.1.1 - 3

Όμοια να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 14.1.1 - 5)

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}\,.$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x)'}{1+(2x)^2}\, dx$$

$$\left(\text{μορφή} \quad \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x) + c.$$

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 14.1.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+4t^2} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}(2t)\Big|_0^x \\ &= \frac{1}{2}\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}(2x)}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\overbrace{\tan^{-1}0}^{0} \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Παρατήρηση 14.1.1 - 3

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 14.1.1 - 3 και τις $(14.1.1-10)$, αντίστοιχα $(14.1.1-12)$

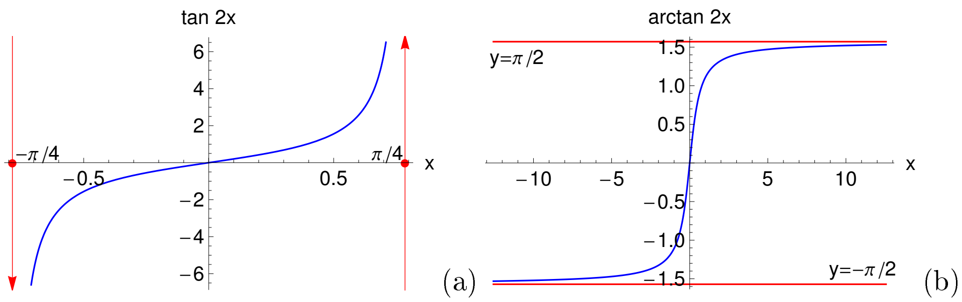
- η συνάρτηση $\tan(2x)$ θα έχει πεδίο ορισμού $D = \Re - \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$ και τιμών όμοια το $T = \Re$ (Σχ. 14.1.1 - 6a), αντίστοιχα
- η αντίστροφη συνάρτηση $\tan^{-1} 2x = \arctan 2x$ θα ορίζεται για κάθε $x \in \Re$ και θα έχει πεδίο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Σχ. 14.1.1 - 6b), ενώ σύμφωνα με την $(14.1.1-13)$ θα ισχύει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}2x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}2x = \frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 14.1.1 - 4

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 14.1.1 - 7)

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-2x}dx.$$



Σχήμα 14.1.1 - 6: (a) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan 2x$, όταν $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Οι κατακόρυφες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{4}$ όπου $\lim_{x\to +\pi/4} \tan 2x = +\infty$ και $\lim_{x\to -\pi/4} \tan 2x = -\infty$. (b) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan^{-1} 2x = \arctan 2x$, όταν $x \in [-4\pi, 4\pi]$. Οι οριζόντιες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Προφανώς λόγω της $(14.1.1 - 13)$ είναι $\lim_{x\to +\infty} \tan^{-1} 2x = +\frac{\pi}{2}$ και $\lim_{x\to -\infty} \tan 2x = -\frac{\pi}{2}$

Λύση. Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x\, e^{-2x}\, dx &= \int x \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = -\frac{1}{2} x\, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int x'\, e^{-2x} dx \\
&= -\frac{1}{2} x\, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\
&= -\frac{1}{2} x\, e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c.
\end{aligned}$$

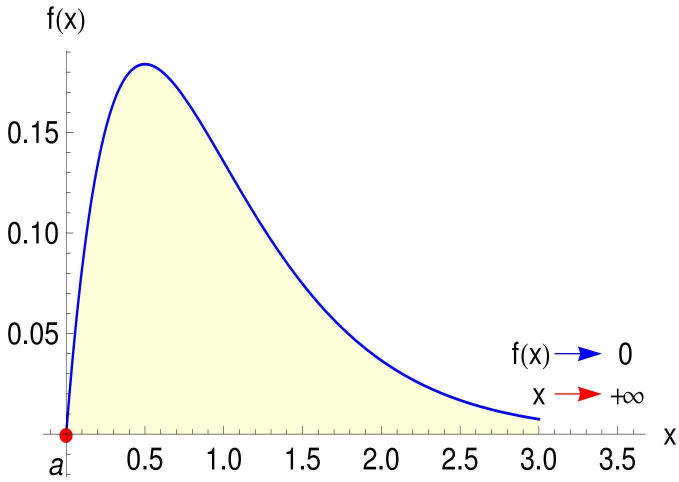
Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 14.1.1 - 2 και τον κανόνα του de L'Hôspital έχουμε[2]

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-2x}\, dx = \lim_{x\to +\infty} \int_0^x t\, e^{-2t}\, dt$$

[2] Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 14.1.1 - 1. *Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, όταν $x_0 \in \Re$ ή $x_0 = \pm\infty$, τότε, αν ορίζεται το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ισχύει ότι*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



Σχήμα 14.1.1 - 7: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-2x}dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $x\,e^{-2x}$ όπου εφαρμόζοντας τον κανόνα του de L'Hôspital προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-2x}=0$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} t\,e^{-2t}\Big|_0^x - \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} e^{-2t}\Big|_0^x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-2x}}^{\text{de L'Hôspital}} - 0\right) - \frac{1}{4}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}}^{0} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{x} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{-2x}\right)'}{x'} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}(-2)\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{1}}^{0} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-sx}dx = \frac{1}{s^2}\,, \quad \text{όταν} \quad s>0. \tag{14.1.1 - 16}$$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

i)

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

ii)

$$\int_{0}^{+\infty} x\, e^{-s\,x}\, dx = \frac{1}{s^2}\,, \quad \text{όταν} \quad s > 0.$$

iii)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{k}\,, \quad \text{όταν} \quad k \neq 0.$$

Υπόδειξη: να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις $(14.1.1 - 13)$.

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα

$$i) \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-5x}\, dx \qquad\qquad iii) \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$$

$$ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \qquad\qquad iv) \quad \int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\, \ln^2 x}\,.$$

14.1.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα του β' είδους

Ανάλογα με την Παράγραφο 14.1.2 έστω ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(a, \beta\,]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, \beta\,]$ για κάθε $x \in (a, \beta\,]$, οπότε θα έχει έννοια στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση

$$\mathrm{I}(x) = \int_{x}^{\beta} f(t)\, d\,t \quad \text{για κάθε} \;\; x \in (a, \beta\,]. \tag{14.1.2 - 1}$$

Ορισμός 14.1.2 - 1. *Ορίζεται σαν Γ.Ο. του* **β' είδους** *της f στο $(a,\beta]$ το ολοκλήρωμα*

$$\int\limits_{a+}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{14.1.2 - 2}$$

Ορισμός 14.1.2 - 2. *Το Γ.Ο. $(14.1.2-2)$ λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει τότε και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\mathrm{I}(x)$. Στην περίπτωση αυτή γράφεται*

$$\int\limits_{a+}^{\beta} f(x)\,dx = \mathrm{I},$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\mathrm{I}(x)$, λέγεται ότι το Γ.Ο. $(14.1.2-2)$ δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Όμοια με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$\mathrm{J}(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } x \in [a,\beta). \tag{14.1.2 - 3}$$

είναι δυνατόν να οριστεί το Γ.Ο. β' είδους της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[a,\beta)$.

Έστω τώρα η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού (a,β) τέτοια, ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,y]$ για κάθε $x,y\in(a,\beta)$.

Ορισμός 14.1.2 - 3. *Ορίζεται σαν Γ.Ο. του β' είδους της f στο (a,β) το ολοκλήρωμα*

$$\int\limits_{a+}^{\beta-} f(x)\,dx. \tag{14.1.2 - 4}$$

Ορισμός 14.1.2 - 4. *Το Γ.Ο. $(14.1.2-4)$ λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

$$\int\limits_{a+}^{\xi} f(x)\,dx \quad \textit{και} \quad \int\limits_{\xi}^{\beta-} f(x)\,dx \;\; \textit{με}\;\; \xi\in(a,\beta), \tag{14.1.2 - 5}$$

ενώ ορίζεται σαν τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int_{a_+}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{\beta_-} f(x)\,dx. \tag{14.1.2 - 6}$$

Ορισμός 14.1.2 - 5. *Το Γ.Ο.* (14.1.2 − 4) *λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο.* (14.1.2 − 5) *δεν υπάρχει.*

Όμοια αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη ή μη του Γ.Ο. (14.1.2−4) είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου ξ στην (14.1.2 − 6).

Παράδειγμα 14.1.2 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 14.1.2 - 2 έχουμε (Σχ. 14.1.2 - 1)

$$\begin{aligned}\int_{0_+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int_{0_+}^{1} x^{-1/2}\,dx = \lim_{x\to 0_+} \int_{x}^{1} t^{-1/2}\,dt \\ &= \lim_{x\to 0_+} \left.\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_x^1 = \lim_{x\to 0_+} 2\sqrt{t}\,\Big|_x^1 = 2.\end{aligned}$$

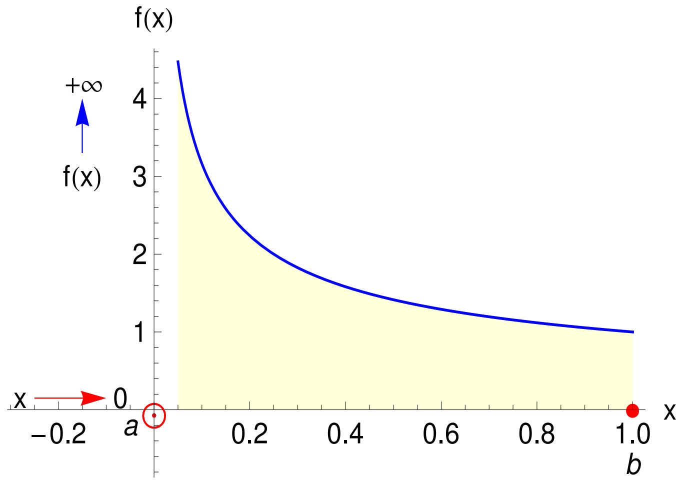
14.1.3 Γενικευμένα ολοκληρώματα μεικτού είδους

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα Γ.Ο. που η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο ένα άκρο ολοκλήρωσης, ενώ το άλλο άκρο είναι το ∞.

Ειδικότερα έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(a, +\infty)$ και σημείο $\xi \in (a, +\infty)$, τέτοιο ώστε τα Γ.Ο.

$$\int_{a_+}^{\xi} f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{14.1.3 - 1}$$

να υπάρχουν στο $\Re$ ή το ένα να απειρίζεται θετικά ή αρνητικά ή και τα δύο να απειρίζονται θετικά ή αρνητικά.



Σχήμα 14.1.2 - 1: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_{0_+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ όπου η καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $x^{-1/2}$, όταν $x \in [0.05, 1]$

Ορισμός 14.1.3 - 1. *Ορίζεται σαν Γ.Ο.* **μεικτού είδους** *της f στο $(a, +\infty)$ το ολοκλήρωμα*

$$\int\limits_{a_+}^{+\infty} f(x)\, dx. \qquad (14.1.3 - 2)$$

Ορισμός 14.1.3 - 2. *Το Γ.Ο. $(14.1.3 - 2)$ θα λέγεται ότι υπάρχει ή ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

$$\int\limits_{a_+}^{\xi} f(x)\, dx \quad \text{και} \quad \int\limits_{\xi}^{+\infty} f(x)\, dx \;\; \text{με} \;\; \xi \in (a, +\infty), \qquad (14.1.3 - 3)$$

ενώ ορίζεται σαν η τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int\limits_{a_+}^{\xi} f(x)\, dx + \int\limits_{\xi}^{+\infty} f(x)\, dx. \qquad (14.1.3 - 4)$$

Ορισμός 14.1.3 - 3. *Το Γ.Ο. $(14.1.3 - 2)$ θα λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο. $(14.1.3 - 3)$ δεν υπάρχουν.*

Αποδεικνύεται ότι η τιμή των Γ.Ο. $(14.1.3-3)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου ξ στην $(14.1.3-4)$. Όμοια ορίζεται το Γ.Ο. του μεικτού είδους της f στο $(-\infty, \beta)$.

Μία εφαρμογή των Γ.Ο. μεικτού είδους δίνεται στην παράγραφο, που ακολουθεί.

14.1.4 Συνάρτηση γάμμα

Ορισμός 14.1.4 - 1 (συνάρτησης γάμμα). *Ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα μεικτού είδους*

$$\Gamma(a) = \int_{0_+}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx, \tag{14.1.4 - 1}$$

όταν $a > 0$ ή όταν ο a είναι μιγαδικός αριθμός με $\mathrm{Re}(a) > 0$.

Πρόκειται για μια συνάρτηση με πολλές εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 14.1.3 - 2, αν $\xi = 1$, έχουμε

$$\Gamma(a) = \int_{0_+}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx = \int_{0+}^{1} e^{-x} x^{a-1}\, dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx.$$

Αποδεικνύεται ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους υπάρχουν, οπότε και το ολοκλήρωμα $(14.1.4-1)$ θα υπάρχει.

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση τελικά αποδεικνύεται ότι

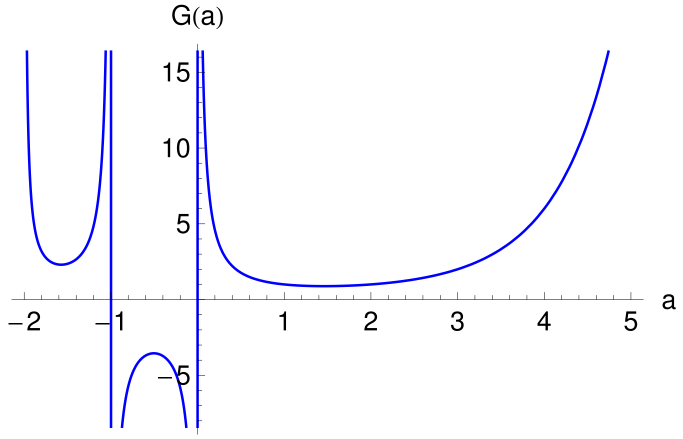
$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a). \tag{14.1.4 - 2}$$

Από την $(14.1.4-2)$ προκύπτουν:

i)

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{για κάθε } n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \tag{14.1.4 - 3}$$

όπου προφανώς είναι $\Gamma(1) = 1$, δηλαδή η συνάρτηση γάμμα είναι δυνατόν να θεωρηθεί σαν η **γενίκευση** της παραγοντικής συνάρτησης,



Σχήμα 14.1.4 - 1: Η συνάρτηση γάμμα, όταν $a \in [-2, 5]$

ii) επειδή

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \frac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(a+k+1)}{a(a+1)\ldots(a+k)} \quad (14.1.4 - 4)$$

όπου $a > 0$ και k ακέραιος, έτσι ώστε $a + k + 1 > 0$, η $(14.1.4 - 4)$ με την $(14.1.4 - 3)$ δίνουν τη δυνατότητα να οριστεί η συνάρτηση $\Gamma(a)$ για $a \neq 0$ ή αρνητικού ακεραίου αριθμού (Σχ. 14.1.4 - 1).

Μία προσέγγιση της συνάρτησης γάμμα δίνεται από τον τύπο

$$\Gamma(a+1) \approx \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^2 \quad (14.1.4 - 5)$$

που είναι γνωστός σαν **τύπος του Stirling**, ενώ μία ειδική τιμή της είναι η

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (14.1.4 - 6)$$

Παρατήρηση 14.1.4 - 1

Οι τιμές της συνάρτησης γάμμα δίνονται από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα.

3

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[4] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Ανώτερα Μαθηματικά I. Ενότητα 14: Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Μέρος ΙΙ».
Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων