Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 2: Διαφορικές Εξισώσεις – Μέρος ΙΙ

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Πολιτικών Μηχ.ΤΕ και Μηχ. Τοπογραφίας & Γεωπληροφορικής ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΡΟΣ ΙΙ

2.1 Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

2.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 2.1.1 - 1 *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι*

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0, \qquad (2.1.1 - 1)$$

όταν η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, b) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Τότε η y, εφόσον υπάρχει, θα ορίζει τη λύση της $(2.1.1 - 1)$.

Σημαντικό ενδιαφέρον στις εφαρμογές από το σύνολο των εξισώσεων της μορφής $(2.1.1 - 1)$ παρουσιάζει η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Συγκεκριμένα έχουμε:

Ορισμός 2.1.1 - 2 (μη ομογενής) *Η γενική μορφή της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x), \qquad (2.1.1 - 2)$$

όταν f, g και r συνεχείς συναρτήσεις με $r(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Ορισμός 2.1.1 - 3 (ομογενής) *Η γενική μορφή της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \qquad (2.1.1 - 3)$$

όταν f και g συνεχείς συναρτήσεις για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Στη συνέχεια του μαθήματος εξετάζονται αναλυτικά οι κυριότερες μορφές των $(2.1.1 - 2)$ και $(2.1.1 - 3)$ με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή αυτών που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές, ενώ ο αναγνώστης παραπέμπεται για μια εκτενέστερη μελέτη στη βιβλιογραφία.

2.1.2 Ομογενής με σταθερούς συντελεστές

Από τον Ορισμό 2.1.1 - 3 προκύπτει ότι η γενική μορφή της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = 0}, \qquad (2.1.2 - 1)$$

όταν a, b σταθερές, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Έστω $y \neq 0$, διαφορετικά η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(2.1.2 - 1)$. Τότε αντικαθιστώντας κατά τα γνωστά στην $(2.1.2 - 1)$

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με} \quad \lambda \quad \text{σταθερά}$$

προκύπτει ότι η **χαρακτηριστική εξίσωση** στην περίπτωση αυτή είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \qquad (2.1.2 - 2)$$

Έστω $\Delta = a^2 - 4b$ η διακρίνουσα της $(2.1.2 - 2)$. Τότε:

i) αν $\Delta > 0$, έχουμε δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες λ_1, λ_2, οπότε η γενική λύση της $(2.1.2 - 1)$ θα είναι

$$\mathbf{y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}, \qquad (2.1.2 - 3)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

ii) Αν $\Delta = 0$, έχουμε μία διπλή πραγματική ρίζα την $\lambda = -a/2$. Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση έχει τη μορφή

$$\mathbf{y_h(x) = (c_1 + x\, c_2)\, e^{\lambda x}}, \qquad (2.1.2 - 4)$$

όταν όμοια c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

iii) Αν $\Delta < 0$, έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω οι $\lambda = p + i\,\omega$ και $\overline{\lambda} = p - i\,\omega$ όπου $i = \sqrt{-1}$ και $\omega = \left(\sqrt{-\Delta}\right)/2$. Τότε[1]

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1^* e^{\lambda x} + c_2^* e^{\overline{\lambda} x} = c_1^* e^{(p+i\,\omega)x} + c_2^* e^{(p-i\,\omega)x} \\ &= e^{px}\, \left[(c_1^* + c_2^*)\cos(\omega x) + i\,(c_1^* + c_2^*)\sin(\omega x)\right], \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathbf{y_h(x) = e^{px}\,[c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)]}, \qquad (2.1.2 - 5)$$

όταν όμοια c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Η (2.1.2−5) χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις[2] μετασχηματίζεται τελικά στην

$$\mathbf{y_h(x) = C\, e^{px} \sin(\omega x + \phi)} \qquad (2.1.2 - 6)$$

όπου $C = \left(c_1^2 + c_2^2\right)^{1/2}$ και $\tan\phi = c_1/c_2$, όταν $c_2 \neq 0$ με $-\pi \leq \phi < \pi$. Στην $(2.1.2 - 6)$ η $\omega = \mathrm{Im}(\lambda)$ εκφράζει την **κυκλική συχνότητα**, ενώ η ϕ τη **φάση**[3].

Παράδειγμα 2.1.2 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y_0' = y'(0) = 1. \qquad (1)$$

---

[1] Ισχύει $e^{i\,\omega} = \cos\omega + i\,\sin\omega$ (τύπος του Euler).

[2] Βλέπε απόδειξη στο Μάθημα 1: Σειρά Fourier - Γραμμικό Φάσμα.

[3] Βλέπε *http://el.wikipedia.org/wiki/Απλή_αρμονική_ταλάντωση* και *http://el.wikipedia.org/wiki/Φάση_(κυματική)*

Λύση. Η (1) είναι μια γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Αντικαθιστώντας στην (1)

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με} \quad \lambda \quad \text{σταθερά}$$

προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωσή της είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \quad \text{και ρίζες} \quad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -2.$$

Τότε από την $(2.1.2-3)$ έχουμε ότι η η γενική λύση της (1) είναι

$$y_h(x) = c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{-2x}, \tag{2}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (2) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$ ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) & = & c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ y_h'(0) & = & -3c_1 & - & 2c_2 & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcr} c_1 & = & -1 \\ c_2 & = & 1\,. \end{array}$$

Άρα η μερική λύση της (1) είναι (Σχ. 2.1.2 - 1)

$$y(x) = y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή σαν **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**.

Παράδειγμα 2.1.2 - 2

Όμοια η εξίσωση

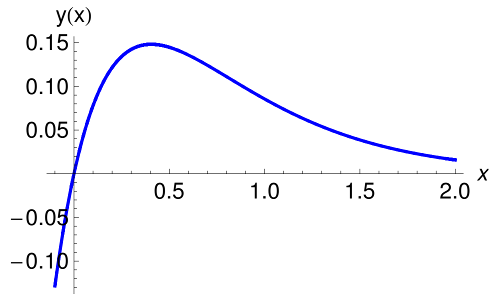
$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = y'(0) = 1. \tag{3}$$

Λύση. Όμοια η χαρακτηριστική της εξίσωση της (3) είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta = 0 \quad \text{και διπλή ρίζα την} \quad \lambda = 2.$$

Τότε σύμφωνα με την $(2.1.2-4)$ η γενική της λύση είναι

$$y_h(x) = (c_1 + c_2\, x)\; e^{2x}, \tag{4}$$



Σχήμα 2.1.2 - 1: Παράδειγμα 2.1.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$, όταν $x \in [-0.1, 2]$.

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (4) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 1$ ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) & = & c_1 & + & & = & 1 \\ y_h'(0) & = & 2c_1 & + & c_2 & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcr} c_1 & = & 1 \\ c_2 & = & -1. \end{array}$$

Άρα η μερική λύση της (3) είναι (Σχ. 2.1.2 - 2)

$$y_h(x) = e^{-2x}(1 - x).$$

Η λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, η $y_h(x) = 0$, όταν $x_0 = 1$. Το x_0 λέγεται **σημείο στατικής ισορροπίας**.

Παράδειγμα 2.1.2 - 3

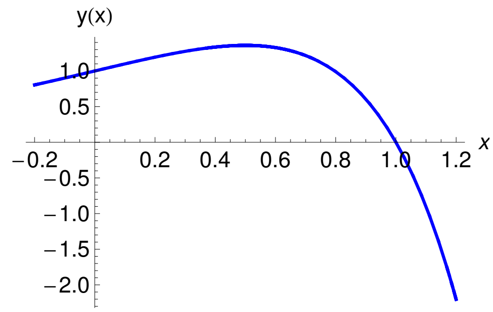
Όμοια η εξίσωση

$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = y'(0) = 0. \qquad (5)$$

Λύση. Η χαρακτηριστική της εξίσωση της (5) είναι

$$F(\lambda) \;=\; 16\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0$$

$$\text{και ρίζες} \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{4} + i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4} - i,$$



Σχήμα 2.1.2 - 2: Παράδειγμα 2.1.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_h(x) = e^{-2x}(1-x)$, όταν $x \in [-0.2, 1.2]$

οπότε σύμφωνα με την $(2.1.2-5)$ έχουμε τη γενική λύση

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{4}}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right), \tag{6}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

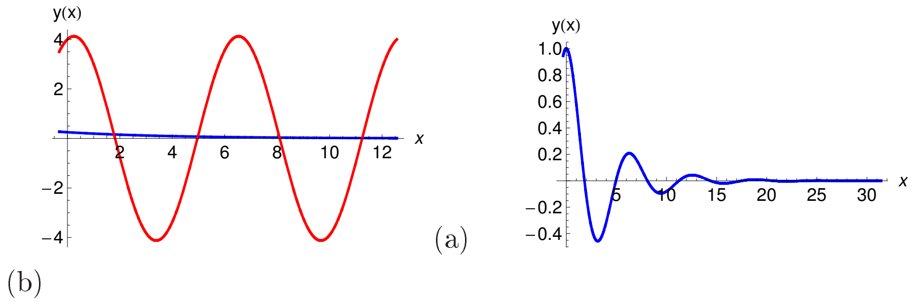
Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (6) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 0$ ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) & = & c_1 & + & & = & 1 \\ y_h'(0) & = & -\frac{1}{4}\,c_1 & + & c_2 & = & 0, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcl} c_1 & = & 1 \\ c_2 & = & \frac{1}{4}\,. \end{array}$$

Άρα η μερική λύση της (5) είναι (Σχ. 2.1.2 - 3)

$$y_h(x) = \frac{1}{4}\,e^{-x/4}\,(4\,\cos x + \sin x).$$

Η λύση περιγράφει μια **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**.



Σχήμα 2.1.2 - 3: Παράδειγμα 2.1.2 - 2, όταν $x \in [-\pi/10, 4\pi]$:(a) το διάγραμμα της $\frac{1}{4}\,e^{-x/4}$ μπλε (απόσβεση) και της $4\cos x + \sin x$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y_h(x) = \frac{1}{4}\,e^{-x/4}(4\,\cos x + \sin x)$. Η απόσβεση προκαλεί τελικά το μηδενισμό της μερικής λύσης

Άσκηση

Αν $y = y(x)$, να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις [4, 5]

$i)$	$y'' + 4y' + 5y = 0;\ y_0' = y_0 = 1$	$iv)$	$y'' + 25y = 0;\ y_0' = y_0 = 1$
$ii)$	$y'' - y' - 12y = 0;\ y_0' = 1,\ y_0 = 0$	$v)$	$y'' + 2y' + 4y = 0;$ $y_0' = 1,\ y_0 = 0$
$iii)$	$y'' + 2y' + 10y = 0;\ y_0' = 1,\ y_0 = 0$	$vi)$	$y'' - 2y' + y = 0;$ $y_0' = -1,\ y_0 = 1.$

2.1.3 Μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές

Από τον Ορισμό 2.1.1 - 2 προκύπτει ότι η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = r(x)} \qquad (2.1.3 - 1)$$

όταν a, $b \in \Re$, $y = y(x)$, $r(x) \neq 0$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

[4] **Λύση**.

[5] $(i)\, e^{-2x}\,(\cos x + 3\,\sin x)$, $\quad (ii)\, \frac{1}{7}\left(-e^{-3x} + e^{4x}\right)$, $\quad (iii)\, \frac{1}{3}\, e^{-x}\sin 3x$, $(iv)\, \frac{1}{5}\,(5\cos 5x + \sin 5x)$, $\quad (v)\, \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-x}\,\sin\left(\sqrt{3}\,x\right)$, $\quad (vi)\, -e^{x}\,(-1 + 2x)$.

Τότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα[6] η γενική λύση της $(2.1.3-1)$ είναι $y=y_h+y_p$, όπου y_h είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή της $(2.1.2-1)$ και y_p μία μερική λύση της μη ομογενούς $(2.1.3-1)$.

Από τις μεθόδους προσδιορισμού της λύσης y_p θα εξεταστεί μόνον η μέθοδος, που δίνεται στη συνέχεια.

Μέθοδος του Lagrange

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης y_p θεωρείται ότι στη γενική λύση

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

της αντίστοιχης ομογενούς της $(2.1.3-1)$, δηλαδή της

$$y''+ay'+by=0,$$

οι σταθερές c_1 και c_2 είναι συναρτήσεις του x, που πρέπει να προσδιοριστούν, έτσι ώστε να επαληθεύεται η $(2.1.3-1)$, δηλαδή της

$$y''+ay'+by=r(x). \tag{1}$$

Έστω $c_1=k_1(x)$ και $c_2=k_2(x)$, οπότε

$$\mathbf{y_p(x)=k_1(x)y_1(x)+k_2(x)y_2(x)}.$$

Τότε

$$y_p(x)'=k_1'(x)y_1(x)+k_1(x)y_1'(x)+k_2'(x)y_2(x)+k_2(x)y_2'(x). \tag{2}$$

Στη (2) οι συναρτήσεις $k_1(x)$ και $k_2(x)$ εκλέγονται, έτσι ώστε

$$k_1'(x)y_1(x)+k_2'(x)y_2(x)=0, \tag{3}$$

οπότε από την (2) προκύπτει τότε ότι

$$y_p(x)''=k_1(x)y_1''(x)+k_1'(x)y_1'(x)+k_2(x)y_2''(x)+k_2'(x)y_2'(x). \tag{4}$$

[6] Βλέπε Μάθημα 1 Θεώρημα 1.1.1-1.

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) και (4) στην (1), λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της $(2.1.2-1)$, έχουμε

$$\begin{aligned} r(x) &= \underbrace{k_1 y_1''} + k_1' y_1' + \overbrace{k_2 y_2''} + k_2' y_2' + a\left(\underbrace{k_1 y_1'} + \overbrace{k_2 y_2'}\right) + b\left(\underbrace{y_1 k_1} + \overbrace{y_2 k_2}\right) \\ &= k_1\left(y_1'' + \alpha\, y_1' + \beta\, y_1\right) + k_2\left(y_2'' + \alpha\, y_2' + \beta\, y_2\right) + k_1' y_1' + k_2' y_2' \\ &= k_1' y_1' + k_2' y_2'. \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$k_1'(x) y_1'(x) + k_2'(x) y_2'(x) = r(x). \qquad (6)$$

Οι εξισώσεις (3) και (6) ορίζουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τις συναρτήσεις $k_1'(x)$ και $k_2'(x)$, από τη λύση του οποίου προκύπτει

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx \quad \text{και} \quad k_2(x) = \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx\,, \quad \text{όταν} \\ u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x). \qquad (2.1.3\text{ - }2) \end{aligned}$$

Τότε σύμφωνα και με την $(2.1.3-2)$ η γενική λύση της $(2.1.3-1)$ είναι[7]

$$\begin{aligned} \mathbf{y(x)} &= y_h(x) + y_p(x) \qquad (2.1.3\text{ - }3) \\ &= \mathbf{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + k_1(x)\, y_1(x) + k_2(x)\, y_2(x)}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.3 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y_0' = y'(0) = 0. \qquad (1)$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (1) είναι η

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta > 0 \quad \text{και ρίζες τις} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

[7] Η απόδειξη του τύπου $(2.1.3-3)$ δεν είναι στην εξεταστέα ύλη.

Άρα σύμφωνα με την $(2.1.2-3)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{2x}, \tag{2}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Τότε από την $(2.1.3-2)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = e^{x}(2e^{2x}) - e^{x}\, e^{2x} = e^{3x},\\
k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{x\, e^{2x}}{e^{3x}}\, dx = -\int x\, e^{-x}\, dx\\
&= x\, e^{-x} + e^{-x},\\
k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{x\, e^{x}}{e^{3x}}\, dx = \int x\, e^{-2x}\, dx\\
&= -\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Άρα από την (2) και την $(2.1.3-3)$ έχουμε ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1\, e^{x} + c_2\, e^{2x} + e^{x}\left(x\, e^{-x} + e^{-x}\right) + e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-2x}\right)\\
&= c_1\, e^{x} + c_2\, e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\, x.
\end{aligned}$$

Η μερική λύση της (1) αποδεικνύεται ότι είναι η

$$y(x) = \frac{3}{4} + \frac{x}{2} - e^{x} + \frac{e^{2x}}{4}\,.$$

■

Παράδειγμα 2.1.3 - 2

Όμοια της

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y_0' = y'(0) = 0. \tag{3}$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (3) είναι

$$y'' + 2y' + y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta = 0 \quad \text{και ρίζα διπλή} \quad \lambda = -1.$$

Άρα σύμφωνα με την $(2.1.2-4)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}, \tag{4}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την $(2.1.3-2)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = e^{-x}\left(xe^{-x}\right)' - \left(e^{-x}\right)'\, x\, e^{-x} = e^{-2x}, \\ k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{e^{-2x}\, x\, e^{-x}}{e^{-2x}}\, dx = -\int x\, e^{-x}\, dx \\ &= x\, e^{-x} + e^{-x}, \\ k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{e^{-2x}\, e^{-x}}{e^{-2x}}\, dx = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}. \end{aligned}$$

Άρα από την (4) και την $(2.1.3-3)$ έχουμε ότι η γενική λύση της (3) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} + e^{-x}\left(x\, e^{-x} + e^{-x}\right) + x\, e^{-x}\left(-e^{-x}\right) \\ &= c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} + e^{-2x}. \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (3) είναι

$$y(x) = e^{-2x} + x\, e^{-x} - e^{-x} = e^{-2x}\left(1 + x\, e^{x} - e^{x}\right).$$

■

Παράδειγμα 2.1.3 - 3

Όμοια η

$$y'' + 4y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y_0' = y'(0) = 0. \tag{5}$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (5) είναι

$$y'' + 4y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \quad \text{και ρίζες} \quad \lambda = 2\,i, \quad \overline{\lambda} = -2\,i.$$

Άρα σύμφωνα με την $(2.1.2-5)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_{_h}(x) = c_1\, \cos 2x + c_2\, \sin 2x, \tag{6}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την $(2.1.3-2)$ είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = \cos 2x\, (\sin 2x)' - (\cos 2x)'\, \sin 2x \\ &= 2\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{x\, \sin 2x}{2}\, dx = -\frac{1}{2}\int x\, \sin 2x\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int x\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]'\, dx = \frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\, \sin 2x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{x\, \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int x\, \cos 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int x\left[-\frac{\sin 2x}{2}\right]'\, dx = \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\, \cos 2x. \end{aligned}$$

Άρα από την (6) και την $(2.1.3-3)$ έχουμε ότι η γενική λύση της (5) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\, \cos 2x + c_2\, \sin 2x + \cos 2x\, \left(\frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\, \underbrace{\sin 2x}\right) \\ &\quad + \sin 2x\, \left(\frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\, \underbrace{\cos 2x}\right) \\ &= c_1\, \cos 2x + c_2\, \sin 2x + \frac{x}{4}\,. \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (5) είναι

$$y(x) = \frac{1}{4}\, x\, - \frac{1}{8}\, \sin 2x.$$

■

Παράδειγμα 2.1.3 - 4

Όμοια η

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y_0' = y'(0) = 0. \tag{7}$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (7) είναι

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$\begin{aligned} F(\lambda) \quad &= \quad \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \\ \text{και ρίζες} \qquad & \qquad \lambda = -1 + 3\,i, \quad \overline{\lambda} = -1 - 3\,i. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(2.1.2 - 5)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_{_h}(x) e^{-x} \left(c_1 \, \cos 3x + c_2 \, \sin 3x\right), \tag{8}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την $(2.1.3 - 2)$ είναι

$$\begin{aligned} u(x) \quad &= \quad y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = e^{-x} \cos 3x \left(-e^{-x} \sin 3x + 3\, e^{-x} \cos 3x\right) \\ & \qquad -e^{-x} \sin 3x \left(-e^{-x} \cos 3x - 3\, e^{-x} \sin 3x\right) \\ &= \quad 3\, e^{-x} \left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right) = 3\, e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) \quad &= \quad -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{1 \cdot \, e^{-2x} \sin 3x}{3\, e^{-x}}\, dx = -\frac{1}{3} \int e^x \, \sin 3x \, dx \\ &= \quad -\frac{e^x}{10} \left(-3 \, \cos 3x + \sin 3x\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) \quad &= \quad \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{1 \cdot \, e^{-x} \cos 3x}{3\, e^{-2x}}\, dx = \frac{1}{3} \int e^x \, \cos 3x \, dx \\ &= \quad \frac{e^x}{10} \left(\cos 3x + 3 \, \sin 3x\right). \end{aligned}$$

Άρα από την (8) και την $(2.1.3-3)$ έχουμε ότι η γενική λύση της (7) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x}\left(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x\right) \\ &\quad + e^{-x}\,\cos 3x\left[-\frac{e^{x}}{3\cdot 10}\left(-3\,\cos 3x + \underbrace{\sin 3x}_{}\right)\right] \\ &\quad + e^{-x}\,\sin 3x\left[\frac{e^{x}}{3\cdot 10}\left(\underbrace{\cos 3x}_{} + 3\,\sin 3x\right)\right] \\ &= e^{-x}\left(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x\right) + \frac{3}{3\cdot 10}\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right) \\ &= e^{-x}\left(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x\right) + \frac{1}{10}\,. \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (7) είναι

$$y(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\left(e^{-x}\,\cos 3x + \frac{1}{3}\,e^{-x}\sin 3x\right).$$

■

Τέλος πρέπει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι είναι πολλές οι περιπτώσεις, που η μέθοδος σε πολλές εφαρμογές αδυνατεί να δώσει λύση. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται κυρίως αριθμητικές μέθοδοι.

Άσκηση

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν $y = y(x)$ και $y_0 = y_0' = 0$ [8, 9]

$i)\quad y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$

$ii)\quad y'' + y = \sin x$

$iii)\quad y'' + 3y' + 2y = x$

$iv)\quad y'' + 2y' + y = \sin x$

$v)\quad y'' + y' = e^{-x}\sin x$

$vi)\quad y'' + 4y' + 3y = 4\,e^{-x}.$

[8] **Λύση**.

[9] $(i)\ \frac{1}{30}\,e^{-2x}\,(3e^{x} - 3\cos 3x - \sin 3x)$, $\quad (ii)\ \frac{1}{2}\,(-x\cos x + \sin x)$,
$(iii)\ -\frac{3}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + e^{-x} + \frac{x}{2}\,,\quad (iv)\ -\frac{1}{2}\,e^{-x}\,(1 + x - e^{x}\cos c)$,
$(v)\ \frac{1}{2}\,e^{-x}\,(-2 + e^{x} + \cos x - \sin x)$, $\quad (vi)\ e^{-3x}\left(1 - e^{2x} + 2x\,e^{2x}\right)$.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Bronson, R. (1978), Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική, ISBN 978–000–761–014–3.

[4] Αθανασιάδη, Α. (1997), Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Διόσκουροι, ISBN 960–650–00–4.

[5] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[6] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων