

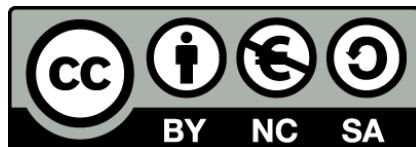


Ανώτερα Μαθηματικά II

Ενότητα 3: Σειρά Fourier

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Πολιτικών Μηχ.ΤΕ και Μηχ. Τοπογραφίας & Γεωπληροφορικής ΤΕ



Το περιεχόμενο του μαθήματος διατίθεται με άδεια Creative Commons εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 3

ΣΕΙΡΑ FOURIER

Οι περιοδικές συναρτήσεις συναντώνται συχνά σε διάφορα προβλήματα εφαρμογών. Η προσπάθεια να εκφραστούν οι συναρτήσεις αυτές με όρους απλών περιοδικών συναρτήσεων, όπως είναι οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου, έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη των συναρτήσεων αυτών, στη λύση διάφορων μορφών διαφορικών εξισώσεων, σε προβλήματα προσεγγίσεων κ.λπ. Αποδεικνύεται στα μαθηματικά ότι στην περίπτωση των περιοδικών συναρτήσεων, η προσέγγιση αυτή είναι η καλύτερη δυνατή (best approximation), δηλαδή η οποιαδήποτε άλλης μορφής προσέγγιση της συνάρτησης έχει μεγαλύτερο σφάλμα. Η υλοποίησή της προσπάθειας αυτής, που ξεκίνησε από τον Fourier, συνεχίζεται ακόμα και σήμερα, συμβάλλοντας στη λύση πολλών προβλημάτων από τις παραπάνω περιπτώσεις ¹.

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό να γίνει μια υπενθύμιση ορισμένων μαθηματικών εννοιών απαραίτητων στα επόμενα.

¹Ο αναγνώστης για περαιτέρω μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 2.

3.1.1 Περιοδική συνάρτηση

Ορισμός 3.1.1 - 1 (περιοδικής συνάρτησης). Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$f(t + \tau) = f(t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}. \quad (3.1.1 - 1)$$

Ο ελάχιστος θετικός αριθμός τ για τον οποίο ισχύει η (3.1.1 - 1) λέγεται **θεμελιώδης περίοδος** και συμβολίζεται συνήθως με T , ενώ ο αριθμός τ λέγεται απλά **περίοδος**.

Παράδειγμα 3.1.1 - 1

Η συνάρτηση

$$f(t) = |\sin \omega t| \quad \text{όπου } \omega > 0$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi/\omega$, ενώ η

$$f(t) = t, \quad \text{όταν } -\pi \leq t < \pi \quad \text{και} \quad f(t + 2\pi) = f(t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$.

Στις περιπτώσεις που η συνάρτηση δεν ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} , ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

Ορισμός 3.1.1 - 2. Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το D λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$f(t + \tau) = f(t) \quad \text{για κάθε } t, t + \tau \in D.$$

Ιδιότητες περιοδικών συναρτήσεων

Σχετικά με τις περιοδικές συναρτήσεις ισχύουν:

- i) το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε μία περίοδο λέγεται **κύμα** ή **κυματομορφή**,

- ii) αν η μεταβλητή μιας περιοδικής συνάρτησης συμβολίζει το διάστημα, τότε η περίοδος της λέγεται **μήκος κύματος** και συμβολίζεται με λ ,
- iii) κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T γίνεται περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π , θέτοντας

$$t = \frac{2\pi}{T}x, \quad (3.1.1 - 2)$$

- iv) αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος, τότε ορίζεται ως **συχνότητα** ν ο αριθμός

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (3.1.1 - 3)$$

και ως **κυκλική συχνότητα** ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.1.1 - 4)$$

Ορισμός 3.1.1 - 3. Ορίζεται σαν **αρμονική** κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(t) = a \cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad f(t) = a \sin(\omega t + \theta). \quad (3.1.1 - 5)$$

Ιδιότητες αρμονικής συνάρτησης

Σχετικά με την αρμονική συνάρτηση ισχύουν:

- το διάγραμμά της είναι μία ημιτονοειδής καμπύλη ή, όπως συνήθως λέγεται, **αρμονικό κύμα**,
- έχει κυκλική συχνότητα ω με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi/\omega$,
- έχει πλάτος a , που παριστάνει και τη μέγιστη τιμή της f ,
- έχει φάση $\omega t + \theta$ με αρχική γωνία θ .

Επίσης ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 3.1.1 - 1. Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων με την ίδια κυκλική συχνότητα, έστω ω , είναι επίσης αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα.

Παράδειγμα 3.1.1 - 2

Το άθροισμα των αρμονικών συναρτήσεων $f(t) = \sin t$ και $g(t) = \sqrt{3} \cos t$, όπου $\omega = 1$, δίνει

$$h(t) = \sin t + \sqrt{3} \cos t = 2 \left(\frac{1}{2} \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right) = 2 \cos \left(t - \frac{\pi}{6} \right),$$

δηλαδή μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω .

Πρόταση 3.1.1 - 2. Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που η κάθε μία έχει κυκλική συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο μιας συχνότητας, έστω ω_0 , είναι μία περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση με συχνότητα τη μικρότερη συχνότητα των αρμονικών συναρτήσεων.

Πρόταση 3.1.1 - 3. Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που οι συχνότητές τους έχουν ανά δύο πηλίκο ρητό αριθμό, είναι περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση.

3.1.2 Στοιχεία θεωρίας σειρών**Σειρά πραγματικών αριθμών**

Υπενθυμίζονται τώρα οι παρακάτω έννοιες από τη θεωρία των ακολουθιών και των σειρών².

Έστω \mathbb{N} το σύνολο των φυσικών αριθμών. Τότε:

Ορισμός 3.1.2 - 1 (ακολουθίας). Κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου \mathbb{N} των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών της μορφής

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : \nu \longrightarrow a(\nu) \quad (3.1.2 - 1)$$

ορίζει μια ακολουθία των πραγματικών αριθμών.

Στην (3.1.2–1) τα πρότυπα, δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί ν , λέγονται δείκτες, ενώ οι εικόνες τους $a(\nu)$ όροι της ακολουθίας. Η έκφραση $a(\nu)$ συμβολίζεται

²Ο αναγνώστης για περαιτέρω μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 5 για την ακολουθία και Κεφ. 10 για τις σειρές.

συνήθως με a_n και λέγεται ο n -οστός ή ο γενικός όρος της ακολουθίας, δηλαδή $a_n = a(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μια ακολουθία θα συμβολίζεται με (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ ή αναλυτικά a_n ; $n = 1, 2, \dots$.

Παράδειγμα 3.1.2 - 1

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Δίνοντας στο n διαδοχικά τις τιμές $1, 2, \dots, n, \dots$ προκύπτουν οι παρακάτω όροι της ακολουθίας

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{n}{n^2 + 1}, \dots$$

Παρατηρήσεις 3.1.2 - 1

- i) Άμεσα προκύπτει ότι μία ακολουθία είναι ορισμένη, όταν δίνεται ο γενικός της όρος a_n .
- ii) Μία ακολουθία είναι επίσης ορισμένη, όταν δίνονται επαρκείς όροι της και ένας αναγωγικός τύπος ή αναδρομική σχέση, που επιτρέπει τον υπολογισμό του όρου a_n από τον a_{n-1} ή γενικότερα από ορισμένους προηγούμενούς του.
- iii) Είναι δυνατόν σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές του δείκτη n να αρχίζουν από το 0.

Ορισμός 3.1.2 - 2 (σειράς). Έστω (a_n) ; $n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε ορίζονται επαγωγικά τα παρακάτω αθροίσματα

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 \quad \text{και γενικά} \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Τα παραπάνω αθροίσματα είναι μονοσήμαντα ορισμένα και ορίζουν μία νέα ακολουθία, έστω (s_n) ; $n \in \mathbb{N}$, που είναι τα αθροίσματα των όρων της ακολουθίας (a_n) ; $n \in \mathbb{N}$, που έχει σαν γενικό όρο στην περίπτωση αυτή τον $s_n =$

$a_1 + a_2 + \dots + a_\nu$. Η ακολουθία (s_ν) ; $\nu \in \mathbb{N}$, που θα συμβολίζεται με $a_1 + a_2 + \dots$ ή συντομότερα

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu \quad (3.1.2 - 2)$$

θα λέγεται σειρά των πραγματικών αριθμών a_ν .

Κάθε άθροισμα s_ν θα λέγεται και **μερικό άθροισμα** ή **τμήμα** της σειράς (3.1.2 - 2), ενώ οι πραγματικοί αριθμοί a_ν **όροι** της σειράς. Πολλές φορές η αρίθμηση των όρων της σειράς αρχίζει από τον όρο με δείκτη 0, δηλαδή έχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu$ σε αντίθεση με τα άθροισματα $\sum_{\nu=1}^{100} a_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{500} a_\nu$, κ.λπ. δεν συγκλίνει πάντοτε, δηλαδή δεν προκύπτει πάντοτε από την άθροιση ένας πραγματικός αριθμός. Συγκεκριμένα ισχύουν οι παρακάτω περιπτώσεις.

Ορισμός 3.1.2 - 3. Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_n$ λέγεται ότι **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό s και συμβολίζεται αυτό με $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu = s$ τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_ν συγκλίνει στον αριθμό s , δηλαδή

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu = s, \text{ όταν} \quad (3.1.2 - 3)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} s_\nu = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\nu} a_k = s.$$

Ο αριθμός s θα λέγεται και άθροισμα της σειράς.

Ορισμός 3.1.2 - 4. Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu$ λέγεται ότι **απειρίζεται** θετικά, αντίστοιχα αρνητικά και συμβολίζεται αυτό με $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu = +\infty$, αντίστοιχα $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu = -\infty$ τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_ν απειρίζεται θετικά, αντίστοιχα αρνητικά, δηλαδή

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} s_\nu &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_\nu) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\nu} a_k = +\infty, \text{ αντίστοιχα } -\infty. \end{aligned} \quad (3.1.2 - 4)$$

Στην περίπτωση αυτή λέγεται επίσης ότι η σειρά συγκλίνει **κατ' εκδοχή**.

Ορισμός 3.1.2 - 5. Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_{\nu}$ λέγεται ότι **αποκλίνει ή κυμαίνεται** τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_{ν} δεν συγκλίνει προς ένα συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό, ούτε απειρίζεται θετικά ή αρνητικά.

Δίνονται στη συνέχεια μερικά γνωστά στον αναγνώστη παραδείγματα σειρών με το αντίστοιχο μερικό άθροισμα, όπου αυτό είναι δυνατόν να υπολογιστεί, τονίζοντας ότι στις περισσότερες περιπτώσεις ο υπολογισμός του μερικού αθροίσματος είναι πολύ δύσκολος ή και αδύνατος.

Παράδειγμα 3.1.2 - 2

1. Έστω η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι της ορίζουν μια γεωμετρική πρόοδο (**γεωμετρική σειρά**) με λόγο $\omega = 1/2$, οπότε το άθροισμά της θα ισούται με

$$\frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Για τη γεωμετρική σειρά $\sum_{\nu=0}^{+\infty} \omega^{\nu}$ υπενθυμίζεται ότι το μερικό άθροισμά της δίνεται από τον τύπο

$$s_{\nu} = \frac{1-\omega^{\nu}}{1-\omega}, \quad \text{όταν } \omega \neq 1.$$

Τότε διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

- i) $|\omega| < 1$, η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{1-\omega}$ (Ορισμός 3.1.2 - 3),
- ii) $\omega \geq 1$, απειρίζεται θετικά, επειδή, όπως αποδεικνύεται, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα και μη φραγμένη (Ορισμός 3.1.2 - 4),
- iii) $\omega \leq -1$, αποκλίνει (Ορισμός 3.1.2 - 5).

2. Η αρμονική σειρά

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{\nu} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

αποδεικνύεται ότι απειρίζεται θετικά.

3. Η σειρά

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} (-1)^\nu = 1 - 1 + 1 - \dots$$

αποκλίνει ή κυμαίνεται, επειδή δεν ορίζεται μονοσήμαντα το άθροισμά της s (Ορισμός 3.1.2 - 5). Ειδικότερα

$$s = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 2k \\ 1 & \text{αν } n = 2k + 1, \text{ όταν } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ο έλεγχος της σύγκλισης ή μη μιας σειράς και όχι ο υπολογισμός του αθροίσματός της που είναι τις περισσότερες φορές αδύνατος, γίνεται με τα λεγόμενα κριτήρια σύγκλισης για τα οποία ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία. Δίνεται όμως στο σημείο αυτό το παρακάτω θεώρημα, που θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα.

Θεώρημα 3.1.2 - 1. Αν η σειρά συγκλίνει, τότε ο γενικός της όρος ορίζει μια μηδενική ακολουθία, δηλαδή αν

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu = a, \quad \text{τότε } \lim_{\nu \rightarrow +\infty} a_\nu = 0.$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντοτε, όπως αυτό φαίνεται στην αρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu}$ όπου $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\nu} = 0$, ενώ είναι ήδη γνωστό ότι $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ (Παράδειγμα 3.1.2 - 2: - περίπτωση 2).

Σειρά συναρτήσεων

Έστω τώρα $f_\nu(x)$ με $x \in D$ και $\nu = 1, 2, \dots$ μία ακολουθία συναρτήσεων, δηλαδή ένα σύνολο συναρτήσεων της μορφής $f_1(x), f_2(x), \dots, f_\nu(x), \dots$ με κοινό πεδίο ορισμού D . Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα η **σειρά συναρτήσεων**

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x) \quad \text{για κάθε } x \in D, \quad (3.1.2 - 5)$$

εφόσον συγκλίνει, η οριακή της τιμή, έστω $f(x)$, θα πρέπει να είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D . Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \quad (3.1.2 - 6)$$

Δίνονται στη συνέχεια μερικά γνωστά στον αναγνώστη παραδείγματα σειρών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 3.1.2 - 3 (σειρά Maclaurin)

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \dots \\ &= \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + \dots \\ &= \sum_{\nu=0}^{+\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} + \dots \\ &= \sum_{\nu=0}^{+\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.1.2 - 4 (σειρά Taylor)

$$\begin{aligned} \ln x &= x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{\nu-1} \frac{(x-1)^\nu}{\nu} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{με κέντρο } x_0 = 1. \end{aligned}$$

Όμοια, όπως και στην περίπτωση των σειρών πραγματικών αριθμών, ο έλεγχος της σύγκλισης γίνεται με τα κριτήρια σύγκλισης. Στην περίπτωση όμως αυτή για να είναι δυνατή η μεταβίβαση ιδιοτήτων της ακολουθίας συναρτήσεων f_ν ; $\nu = 1, 2, \dots$, στην οριακή συνάρτηση f , όπως η συνέχεια, η παραγωγήιση, η ολοκλήρωση κ.λπ., απαιτείται μια σύγκλιση ισχυρότερη της απλής, που λέγεται **ομαλή** (uniform) σύγκλιση³.

Στις περιπτώσεις της ομαλής σύγκλισης σειρών ισχύουν:

Θεώρημα 3.1.2 - 2 (ομαλή σύγκλιση και συνέχεια). Έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων f_ν ; $\nu = 1, 2, \dots$ συγκλίνει ομαλά επί του D προς τη συνάρτηση f . Αν κάθε μία από τις συναρτήσεις f_ν ; $\nu = 1, 2, \dots$ είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 με $x_0 \in D$, τότε και η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0 .

Παρατηρήσεις 3.1.2 - 2

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 - 2 ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_\nu(x) \right] &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = f(x_0) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_\nu(x_0) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f_\nu(x) \right]. \end{aligned}$$

ii) Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

Πόρισμα 3.1.2 - 1. Αν η σειρά των συναρτήσεων $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu$ συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση f επί του D και κάθε όρος της σειράς είναι μία συνεχής συνάρτηση στο σημείο x_0 με $x_0 \in D$, τότε και η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0 .

³Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Παράγραφος 10.4.

Παρατήρηση 3.1.2 - 1

Μία άμεση συνέπεια του παραπάνω πορίσματος είναι η εισαγωγή του συμβόλου του ορίου εντός του αθροίσματος της σειράς, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_{\nu}(x) \right] = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_{\nu}(x) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} f_{\nu}(x_0).$$

Θεώρημα 3.1.2 - 3 (ομαλή σύγκλιση και ολοκλήρωση). Έστω ότι η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_{\nu}; \nu = 1, 2, \dots$ συγκλίνει ομαλά επί του D , όπου $D = [a, b]$, προς τη συνάρτηση f . Τότε ισχύει

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_a^b f_{\nu}(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.1.2 - 7)$$

Παρατήρηση 3.1.2 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 - 3 θα ισχύει

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_a^b f_{\nu}(x) dx = \int_a^b \left[\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_{\nu}(x) \right] dx = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.1.2 - 8)$$

δηλαδή επιτρέπεται η εισαγωγή του συμβόλου $\lim_{\nu \rightarrow +\infty}$ εντός του συμβόλου της ολοκλήρωσης.

Πόρισμα 3.1.2 - 2. Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_{\nu}$ των συνεχών συναρτήσεων επί του $D = [a, b]$ συγκλίνει ομαλά επί του D προς τη συνάρτηση $f(x)$, τότε

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \int_a^b f_{\nu}(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_{\nu}(x) \right] dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.1.2 - 9)$$

Θεώρημα 3.1.2 - 4 (ομαλή σύγκλιση και παραγωγήιση). Αν μία ακολουθία συναρτήσεων $f_{\nu}; \nu = 1, 2, \dots$ συγκλίνει σε ένα σημείο x_0 με $x_0 \in D$ όπου $D = (a, b)$, υπάρχει η παράγωγος των όρων της ακολουθίας στο D και επί πλέον η ακολουθία των όρων της συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση $g(x)$ επί του D , τότε

i) η ακολουθία των συναρτήσεων f_ν ; $\nu = 1, 2, \dots$ συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση, έστω f ,

ii) υπάρχει η παράγωγος f' της οριακής συνάρτησης και ισχύει

$$f'(x) = g(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \quad (3.1.2 - 10)$$

Παρατήρηση 3.1.2 - 3

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 - 4 ισχύει

$$\left[\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_\nu(x) \right]' = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_\nu'(x) = f'(x). \quad (3.1.2 - 11)$$

Πόρισμα 3.1.2 - 3. Αν

i) η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x)$ συγκλίνει για ένα $x_0 \in D$ όπου $D = (a, b)$,

ii) υπάρχει η παράγωγος $f_\nu'(x)$; $\nu = 1, 2, \dots$ για κάθε $x \in D$,

iii) η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu'(x)$ συγκλίνει ομαλά επί του D ,

τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x)$ συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση, έστω $f(x)$ επί του D , της οποίας υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ και ισχύει

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu'(x) = f'(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \quad (3.1.2 - 12)$$

Η σχέση (3.1.2 - 12) γράφεται

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x) \right] = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d f_\nu(x)}{dx} \right] \quad \text{για κάθε } x \in D \quad (3.1.2 - 13)$$

και αποτελεί γενίκευση για σειρές συναρτήσεων της ήδη γνωστής σχέσης για αθροίσματα

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{\nu=1}^k f_\nu(x) \right] = \sum_{\nu=1}^k \frac{d f_\nu(x)}{dx}. \quad (3.1.2 - 14)$$

3.2 Σειρά Fourier

3.2.1 Ορισμός της σειράς

Ορισμός 3.2.1 - 1 (τριγωνομετρική σειρά). Ορίζεται σαν τριγωνομετρική σειρά κάθε σειρά της μορφής

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{2} + (\alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t) + \dots + (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) + \dots \\ = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt), \end{aligned} \quad (3.2.1 - 1)$$

όταν $t \in \mathbb{R}$ και $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}; i = 1, 2, \dots$ οι **συντελεστές** της σειράς.

Από τον Ορισμό 3.2.1 - 1 προκύπτει ότι κάθε όρος της σειράς είναι μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$. Τότε, αν η σειρά (3.2.1 - 1) συγκλίνει **ομαλά** στο \mathbb{R} , θα πρέπει σύμφωνα με την Παράγραφο 1, η ιδιότητα της περιοδικότητας να μεταβιβάζεται και στην οριακή συνάρτηση, έστω $f(t)$, δηλαδή η $f(t)$ να είναι όμοια μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο ίση με T .

Τα βασικά ερωτήματα που δημιουργούνται στις περιπτώσεις αυτές είναι:

- i) ποιες συνθήκες πρέπει να επαληθεύονται, έτσι ώστε μία περιοδική συνάρτηση να αναπτύσσεται σε τριγωνομετρική σειρά,
- ii) ο υπολογισμός των συντελεστών της σειράς (3.2.1 - 1).

3.2.2 Υπολογισμός της σειράς

Αποδεικνύεται ότι αν η $f(t)$ είναι μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$ τέτοια, ώστε να είναι δυνατό να παρασταθεί με τη μορφή της τριγωνομετρικής σειράς (3.2.1 - 1), τότε είναι:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad (3.2.2 - 1)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad (3.2.2 - 2)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (3.2.2 - 3)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

Οι τύποι (3.2.2 - 1) - (3.2.2 - 3), που δίνουν τους συντελεστές της σειράς (3.2.1 - 1), λέγονται και **τύποι του Euler**. Η σειρά (3.2.1 - 1) λέγεται τότε η **σειρά Fourier** για την περιοδική συνάρτηση f με συντελεστές Fourier τους (3.2.2 - 1) - (3.2.2 - 3).

Λόγω της περιοδικότητας της f το διάστημα ολοκλήρωσης $[-\pi, \pi]$ είναι δυνατό να αντικατασταθεί με κάθε άλλο διάστημα πλάτους 2π , όπως $[0, 2\pi]$, κ.λπ., όταν αυτό εξυπηρετεί στον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση $f(t)$ έχει μία τυχούσα θεμελιώδη περίοδο T και πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.3 - 1. Θέτοντας

$$t = \frac{T}{2\pi} x, \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{2\pi}{T} t$$

και, υποθέτοντας ότι $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, θα είναι $x \in [-\pi, \pi]$, ενώ η f , όταν θεωρηθεί σαν συνάρτηση του x , θα είναι όμοια περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π , ο τύπος (3.2.2 - 1) γράφεται

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)x\right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \frac{2\pi}{T} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \end{aligned} \quad (3.2.2 - 4)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι οι τύποι (3.2.2 - 2) και (3.2.2 - 3) γράφονται

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad \text{και} \quad (3.2.2 - 5)$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad (3.2.2 - 6)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

Παρατηρήσεις 3.2.2 - 1

- Λόγω της περιοδικότητας της f στους παραπάνω τύπους είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί κάθε διάστημα ολοκλήρωσης, έστω \mathcal{D} , πλάτους όσο η θεμελιώδης περίοδος T , όπως $[0, T]$, κ.λπ.
- Στο εξής στις εφαρμογές το διάστημα \mathcal{D} θα ταυτίζεται με το διάστημα ορισμού της f στη θεμελιώδη περίοδο.

Επομένως σύμφωνα και με τις Παρατηρήσεις 3.2.2 - 1 οι συντελεστές Fourier θα δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \int_{\mathcal{D}} f(t) dt,$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{\mathcal{D}} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \text{ όταν } n = 1, 2, \dots \quad (3.2.2 - 7)$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{\mathcal{D}} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \text{ όταν } n = 1, 2, \dots$$

και θα λέγονται επίσης τύποι του Euler για τους συντελεστές της σειράς Fourier, που αντιστοιχεί στην περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T .

Στην περίπτωση αυτή η σειρά Fourier έχει τη μορφή

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right]. \quad (3.2.2 - 8)$$

3.2.3 Θεώρημα σειράς Fourier

Δίνεται τώρα η απάντηση στο πρώτο ερώτημα με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 3.2.3 - 1 (σειράς Fourier). Έστω $f(t)$ μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$ που είναι κατά τμήματα συνεχής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και για την οποία υπάρχουν τόσο η αριστερά όσο και η δεξιά πλευρική παράγωγος σε κάθε σημείο του διαστήματος αυτού. Τότε η σειρά Fourier

(3.2.1 - 1), που οι συντελεστές της δίνονται από τις σχέσεις (??) - (??), συγκλίνει ομαλά στο \mathfrak{R} και το άθροισμά της είναι η $f(t)$, εκτός από ένα σημείο, έστω t_0 , που η $f(t)$ είναι ασυνεχής και που το άθροισμά της είναι ο μέσος όρος του αριστερού και του δεξιού ορίου της στο t_0 , δηλαδή

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0-0} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t) \right]. \quad (3.2.3 - 1)$$

3.2.4 Παραδείγματα υπολογισμού της σειράς Fourier

Παράδειγμα 3.2.4 - 1

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 3.2.4 - 1)

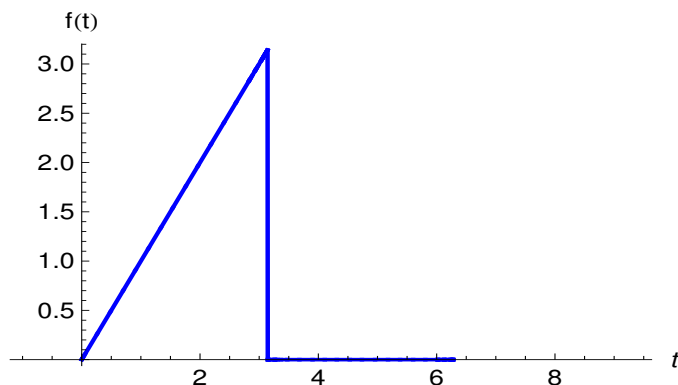
$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{όταν } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{όταν } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \quad \text{και } f(t + 2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathfrak{R}.$$

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2\pi$, ενώ σύμφωνα και με τις Παρατηρήσεις 3.2.2 - 1 το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $\mathcal{D} = [0, 2\pi]$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους (3.2.2 - 7) έχουμε ^{4, 5}

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{2}, \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]' dt \\ &= \frac{1}{n\pi} t \sin(nt) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} t' \sin(nt) dt \\ &= 0 - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{1}{n^2\pi} \cos(nt) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi} [(-1)^n - 1], \end{aligned}$$

⁴**Παραγοντική ολοκλήρωση:** περίπτωση γινομένου πολυωνύμου με τριγωνομετρική συνάρτηση, οπότε αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

⁵Υπενθυμίζεται ότι: $\cos(n\pi) = (-1)^n$ και $\sin(n\pi) = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$.



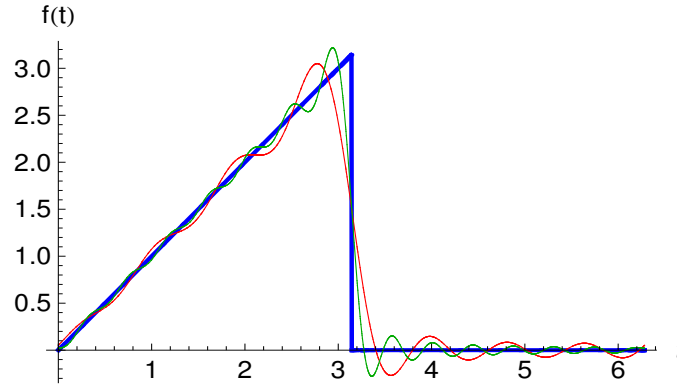
Σχήμα 3.2.4 - 1: Παράδειγμα 3.2.4 - 1: η συνάρτηση $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \quad (\text{όμοια}) \\ &= \frac{1}{\pi} \left. \frac{\sin(nt) - nt \cos(nt)}{n^2} \right|_0^{\pi} = -\frac{1}{n} \cos(n\pi) = -\frac{1}{n} (-1)^n \end{aligned}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

Άρα σύμφωνα με την (3.2.2 - 8) η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos t + \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{2}{2\pi} \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin 4t - \frac{2}{25\pi} \cos 5t + \frac{1}{5} \sin 5t - \frac{1}{6} \sin 6t \\ &\quad - \frac{2}{49\pi} \cos 7t + \frac{1}{7} \sin 7t - \dots \\ &\approx 0.7854 - 0.6366 \cos t + \sin t - 0.5 \sin 2t \\ &\quad - 0.0710 \cos 3t + 0.3333 \sin 3t - 0.25 \sin 4t \\ &\quad - 0.0255 \cos 5t + 0.2 \sin 5t - 0.1667 \sin 6t \\ &\quad - 0.0130 \cos 7t + 0.1429 \sin 7t - \dots \end{aligned} \tag{3.2.4 - 1}$$



Σχήμα 3.2.4 - 2: Παράδειγμα 3.2.4 - 1: διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (μπλε), αθροίσματος S_5 κόκκινη και S_{14} πράσινη καμπύλη

Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = \pi$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.3 - 1 - τύπος (3.2.3 - 1) - το άθροισμα της σειράς ισούται με

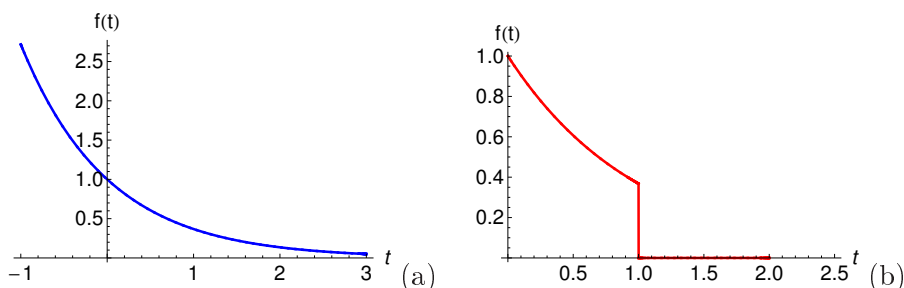
$$f(t_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \pi-0} f(t) + \lim_{t \rightarrow \pi+0} f(t) \right] = \frac{1}{2} (\pi + 0) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.2.4 - 2)$$

Στο Σχ. 3.2.4 - 2 δίνεται το διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_5 των 5 πρώτων όρων της (3.2.4 - 1) - κόκκινη καμπύλη, όπου

$$\begin{aligned} S_5(t) = & 0.7854 - 0.6366 \cos t + \sin t - 0.5 \sin 2t - 0.0710 \cos 3t \\ & + 0.3333 \sin 3t - 0.25 \sin 4t - 0.0255 \cos 5t + 0.2 \sin 5t \end{aligned}$$

και του αθροίσματος S_{14} (πράσινη καμπύλη). Από το Σχ. 3.2.4 - 2 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0, 2\pi)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της f , όταν το n αυξάνει, στο σημείο π - σημείο ασυνέχειας - δημιουργούνται κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό σαν **φαινόμενο Gibbs**. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα των S_5 και S_{14} διέρχονται από το σημείο $(t_0, f(t_0))$, όπου η $f(t_0)$ δίνεται από την (3.2.4 - 2).

■



Σχήμα 3.2.4 - 3: Παράδειγμα 3.2.4 - 2: (a) η συνάρτηση e^{-t} , όταν $t \in \mathbb{R}$, (b) η συνάρτηση $g(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2]$

Παράδειγμα 3.2.4 - 2

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 3.2.4 - 3)

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{όταν } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{όταν } 1 \leq t < 2 \end{cases} \text{ και } g(t + 2) = g(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2$, ενώ όμοια σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 3.2.2 - 1 το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $\mathcal{D} = [0, 2]$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους (3.2.2 - 7) έχουμε⁶

$$\alpha_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 g(t) dt = \int_0^1 g(t) dt + \int_1^2 g(t) dt = \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{e-1}{e},$$

$$\alpha_n = \int_0^1 g(t) \cos(n\pi t) dt = \int_0^1 e^{-t} \cos(n\pi t) dt = I$$

όπου

⁶**Παραγοντική ολοκλήρωση:** περίπτωση γινομένου εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση. Εφαρμόζεται δύο φορές η παραγοντική ολοκλήρωση, δημιουργώντας στην πρώτη παραγοντική την παράγωγο της ευκολότερης από τις δύο συναρτήσεις (στην περίπτωση αυτή της εκθετικής). Της ίδιας συνάρτησης, δηλαδή εδώ της εκθετικής, δημιουργείται η παράγωγος και στη δεύτερη παραγοντική ολοκλήρωση.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 e^{-t} \cos(n\pi t) dt = \int_0^1 [-e^{-t}]' \cos(n\pi t) dt \\
&= -e^{-t} \cos(n\pi t) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t} [\cos(n\pi t)]' dt \\
&= -[e^{-1} \cos(n\pi) - 1] - n\pi \int_0^1 e^{-t} \sin(n\pi t) dt \\
&= -[(-1)^n e^{-1} - 1] - n\pi \int_0^1 [-e^{-t}]' \sin(n\pi t) dt \\
&= -[(-1)^n e^{-1} - 1] + n\pi e^{-t} \sin(n\pi t) \Big|_0^1 - n\pi \int_0^1 e^{-t} [\sin(n\pi t)]' dt \\
&= -[(-1)^n e^{-1} - 1] + 0 - n^2 \pi^2 \int_0^1 e^{-t} \cos(n\pi t) dt \\
&= -[(-1)^n e^{-1} - 1] + 0 - n^2 \pi^2 I.
\end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\alpha_n = \frac{e - (-1)^n}{e(1 + n^2 \pi^2)} \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Όμοια

$$\beta_n = \int_0^1 g(t) \sin(n\pi t) dt = \int_0^1 e^{-t} \sin(n\pi t) dt,$$

οπότε

$$\beta_n = \frac{n\pi [e - (-1)^n]}{e(1 + n^2 \pi^2)} \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Άρα σύμφωνα με την (3.2.2 - 8) η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$g(t) = 0.3161 + 0.1259 \cos \pi t + 0.3954 \sin \pi t + 0.0156 \cos 2\pi t$$

$$\begin{aligned}
 &+0.0981 \sin 2t + 0.01522 \cos 3\pi t + 0.1435 \sin 3\pi t \\
 &+0040 \cos 4\pi t + 0.0400 \sin 4\pi t + \dots .
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4 - 3}$$

Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.3 - 1 - τύπος (3.2.3 - 1) - το άθροισμα της σειράς ισούται με

$$\begin{aligned}
 g(t_0) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow 1-0} g(t) + \lim_{t \rightarrow 1+0} g(t) \right] = \frac{1}{2} (e^{-1} + 0) \\
 &= \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.1840.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4 - 4}$$

Στο Σχ. 3.2.4 - 4 δίνεται το διάγραμμα της $g(t)$, όταν $t \in [0, 4]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της (3.2.4 - 3) - κόκκινη καμπύλη - και του S_{14} - πράσινη καμπύλη. Όπως και στο Σχ. 3.2.4 - 2 από το Σχ. 3.2.4 - 4 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0, 4)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της g , όταν το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας $t_i = 0, 1, 2, 3, 4$ δημιουργούνται κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει (φαινόμενο Gibbs). Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα των S_3 και S_{14} διέρχονται από το σημείο $(t_0, g(t_0))$, όταν $t_0 = 1$ και $g(t_0) \approx 0.1840$ σύμφωνα με την (3.2.4 - 4). Όμοια και από τα άλλα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g(t_i))$ με $t_i = 0, 2, 3, 4$.

■

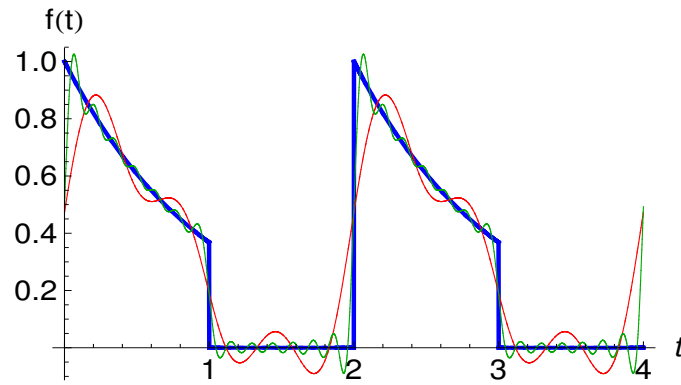
Παράδειγμα 3.2.4 - 3

Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 3.2.4 - 5)

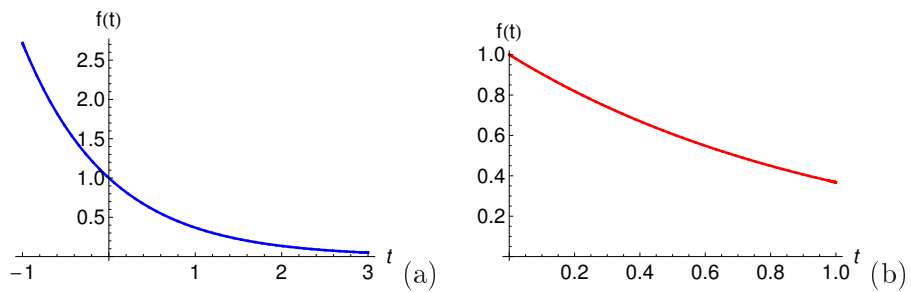
$$\tilde{g}(t) = e^{-t}, \quad \text{όταν } 0 \leq t < 1 \quad \text{και} \quad \tilde{g}(t + 1) = \tilde{g}(t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 1$, ενώ όμοια το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $\mathcal{D} = [0, 1]$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους (3.2.2 - 7) και ανάλογους υπολογισμούς με αυτούς του Παραδείγματος 3.2.4 - 2 τελικά έχουμε

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 \tilde{g}(t) dt = 2 \int_0^1 \tilde{g}(t) dt = 2 \int_0^1 e^{-t} dt = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right),$$



Σχήμα 3.2.4 - 4: Παράδειγμα 3.2.4 - 2: διάγραμμα της $g(t)$ όταν $t \in [0, 4]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_{14} πράσινη



Σχήμα 3.2.4 - 5: Παράδειγμα 3.2.4 - 3: (a) η συνάρτηση e^{-t} , όταν $t \in \mathbb{R}$, (b) η συνάρτηση $\tilde{g}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 \tilde{g}(t) \cos(2n\pi t) dt = 2 \int_0^1 e^{-t} \cos(2n\pi t) dt \\ &= \left. \frac{2 e^{-t} [-\cos(2n\pi t) + 2n\pi \sin(2n\pi t)]}{1 + 4n^2\pi^2} \right|_0^1 = \frac{2(e-1)}{e(1+4n^2\pi^2)}, \\ \beta_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 \tilde{g}(t) \sin(2n\pi t) dt = 2 \int_0^1 e^{-t} \sin(2n\pi t) dt \\ &= - \left. \frac{2 e^{-t} [2n\pi \cos(2n\pi t) + \sin(2n\pi t)]}{1 + 4n^2\pi^2} \right|_0^1 = \frac{4n\pi(e-1)}{e(1+4n^2\pi^2)} \end{aligned}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

Άρα σύμφωνα με την (3.2.2 - 8) η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

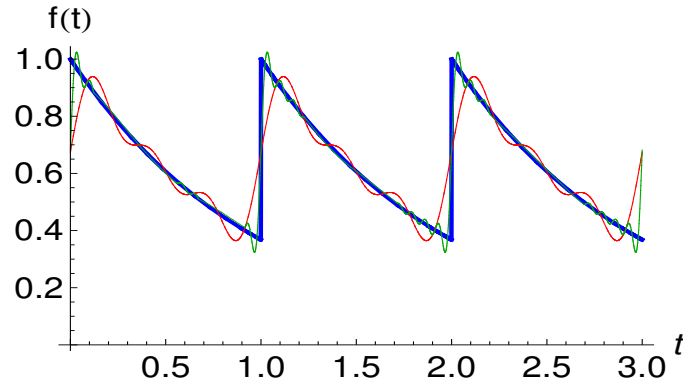
$$\begin{aligned} g(t) &= 0.6321 + 0.0312 \cos 2\pi t + 0.1962 \sin 2\pi t + 0.0080 \cos 4\pi t \\ &\quad + 0.0100 \sin 4t + 0.0036 \cos 6\pi t + 0.0669 \sin 6\pi t \\ &\quad + 0.020 \cos 8\pi t + 0.0502 \sin 8\pi t + \dots \end{aligned} \quad (3.2.4 - 5)$$

Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.3 - 1 - τύπος (3.2.3 - 1) - το άθροισμα της σειράς ισούται με

$$\tilde{g}(t_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow 1-0} \tilde{g}(t) + \lim_{t \rightarrow 1+0} \tilde{g}(t) \right] = \frac{1}{2} (e^{-1} + 0) = \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.1840.$$

Στο Σχ. 3.2.4 - 6 δίνεται το διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$, όταν $t \in [0, 3]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της (3.2.4 - 5) - κόκκινη καμπύλη - και του S_9 - πράσινη καμπύλη. Από το Σχ. 3.2.4 - 6 όμοια προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0, 3)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της \tilde{g} , όταν το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας 0, 1, 2, 3 δημιουργούνται επίσης κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει (φαινόμενο Gibbs). Επίσης τα διαγράμματα των S_3 και S_9 διέρχονται από τα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g(t_i))$ με $t_i = 0, 1, 2, 3$.

■



Σχήμα 3.2.4 - 6: Παράδειγμα 3.2.4 - 3: διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ όταν $t \in [0, 3]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_9 πράσινη

Παράδειγμα 3.2.4 - 4

Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 3.2.4 - 7)

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{όταν } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{όταν } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \quad \text{και } \tilde{f}(t + 2\pi) = \tilde{f}(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

(ημιανόρθωση).

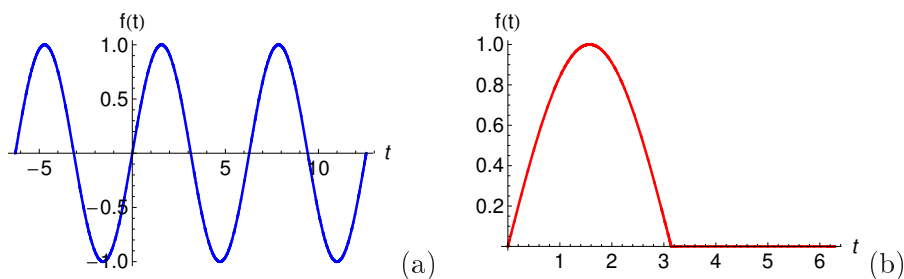
Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2\pi$, ενώ όμοια το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $\mathcal{D} = [0, 2\pi]$. Όμοια με τους τύπους (3.2.2–7) και γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας⁷ τελικά έχουμε⁸

$$\alpha_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{\pi},$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos t dt = 0,$$

⁷ $2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$, $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$.

⁸Όταν στους τύπους υπολογισμού των συντελεστών α_n και β_n προκύψουν παραστάσεις, που δεν ορίζονται για κάποιες τιμές του n , τότε ο υπολογισμός των αντίστοιχων συντελεστών γίνεται χωριστά αντικαθιστώντας στους τύπους (3.2.2 – 7) τις τιμές αυτές, όπως στις περιπτώσεις των συντελεστών α_1 και β_1 .



Σχήμα 3.2.4 - 7: Παράδειγμα 3.2.4 - 4: (a) η συνάρτηση $\sin t$, όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$, (b) η συνάρτηση $\tilde{f}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$

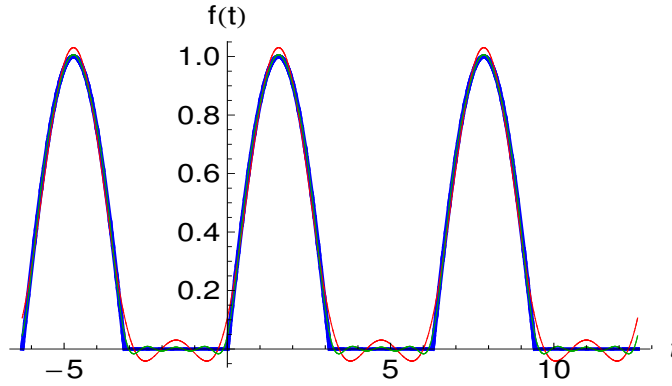
$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt) dt \\ &= \left. \frac{\cos t \cos(nt) + n \sin t \sin(nt)}{\pi(n^2 - 1)} \right|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1 + (-1)^n}{\pi\pi(n^2 - 1)} \quad \text{για κάθε } n = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \sin\left(\frac{2\pi t}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin(nt) dt \\ &= \left. \frac{-n \sin t \cos(nt) + \cos t \sin(nt)}{\pi(n^2 - 1)} \right|_0^{\pi} \\ &= 0 \quad \text{για κάθε } n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την (3.2.2 - 8) η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= 0.3183 + 0.5 \sin t - 0.2122 \cos 2t - 0.0424 \sin 4t \\ &\quad - 0.0182 \cos 6t - 0.0101 \cos 8t - \dots \end{aligned} \quad (3.2.4 - 6)$$



Σχήμα 3.2.4 - 8: Παράδειγμα 3.2.4 - 4: διάγραμμα της $\tilde{f}(t)$ όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_7 πράσινη

Στο Σχ. 3.2.4 - 8 δίνεται το διάγραμμα της $\tilde{f}(t)$ στο διάστημα $[-2\pi, 4\pi]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της (3.2.4 - 6) - κόκκινη καμπύλη - και του S_7 - πράσινη καμπύλη. Η $\tilde{f}(t)$ δεν έχει σημεία ασυνέχειας, οπότε δεν εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs.

■

3.2.5 Γραμμικά φάσματα

Ο γενικός όρος της σειράς Fourier, που αντιστοιχεί σε μία περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T , σύμφωνα με τον τύπο (3.2.2 - 8) γράφεται

$$\alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) = \alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t) \quad (3.2.5 - 1)$$

όπου $n = 1, 2, \dots$ και $\omega = 2\pi/T$.

Έστω $\beta_n \neq 0$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και $\tan \varphi_n = \alpha_n/\beta_n$, όταν $-\pi \leq \varphi_n < \pi$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς στην (3.2.5 - 1) έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t) &= \beta_n \left[\frac{\alpha_n}{\beta_n} \cos(n\omega t) + \sin(n\omega t) \right] \\ &= \beta_n [\tan \varphi_n \cos(n\omega t) + \sin(n\omega t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta_n}{\cos \varphi_n} [\sin \varphi_n \cos(n\omega t) + \cos \varphi_n \sin(n\omega t)] \\
&= \beta_n \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_n} \sin(n\omega t + \varphi_n) \\
&= \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \sin(n\omega t + \varphi_n).
\end{aligned}$$

⁹Εστω $C_n = (\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{1/2}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ενώ για $n = 0$ θέτουμε $C_0 = |a_0|/2$. Τότε η αντίστοιχη σειρά Fourier της $f(t)$ γράφεται

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (3.2.5 - 2)$$

και λέγεται **σειρά του ημιτόνου**.

Όμοια θέτοντας στο γενικό όρο όπου $\tan \theta_n = \beta_n/\alpha_n$ με $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και $-\pi \leq \varphi_n < \pi$, προκύπτει η παρακάτω σειρά της f

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t - \theta_n) \quad (3.2.5 - 3)$$

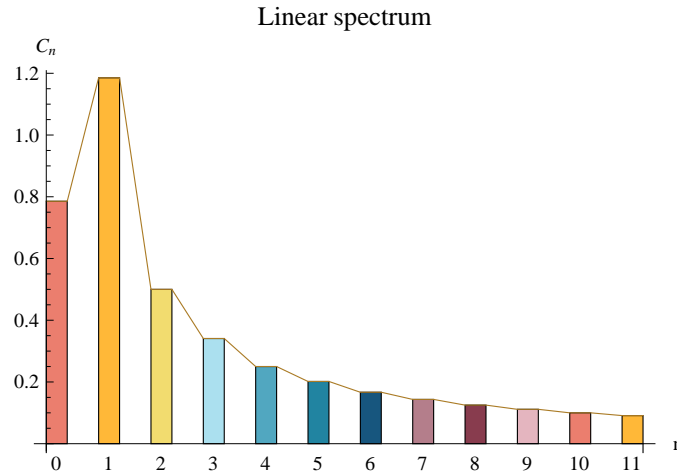
που λέγεται **σειρά του συνημιτόνου**.

Τότε $|C_n \sin(n\omega t + \varphi_n)| \leq C_n$, αντίστοιχα, $|C_n \cos(n\omega t - \theta_n)| \leq C_n$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$, δηλαδή οι συντελεστές C_n δείχνουν το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης κάθε όρου της σειράς. Οι συντελεστές αυτοί λέγονται **αρμονικοί πλάτους** και το διάγραμμά τους **γραμμικό φάσμα πλάτους** (line spectrum). Είναι προφανές τότε ότι από τη μελέτη του γραμμικού φάσματος προκύπτει η ταχύτητα σύγκλισης της σειράς στην f . Οι γωνίες φ_n , αντίστοιχα, θ_n ; $n = 1, 2, \dots$ ορίζουν τότε τους **αρμονικούς φάσης** και το διάγραμμά τους λέγεται **γραμμικό φάσμα φάσης** (phase spectrum).

Σημείωση 3.2.5 - 1

Πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι, εφόσον ισχύει το Θεώρημα 3.2.3 - 1, οπότε η σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(t)$, τα πλάτη C_n πρέπει να μειώνονται και τελικά να συγκλίνουν στο μηδέν, διαφορετικά σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 - 1 η ακολουθία C_n ; $n = 0, 1, \dots$ να είναι **μηδενική**.

⁹Ισχύει ότι: $\cos \varphi_n = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_n}$.



Σχήμα 3.2.5 - 1: Παράδειγμα 3.2.5 - 1: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum)

Παράδειγμα 3.2.5 - 1

Από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος 3.2.4 - 1 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι για τους όρους περιττής τάξης είναι:

$$C_0 = \frac{|a_0|}{2} = 0.78540, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 1.18545,$$

$$C_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.34076, \quad C_5 = \sqrt{a_5^2 + b_5^2} = 0.20161$$

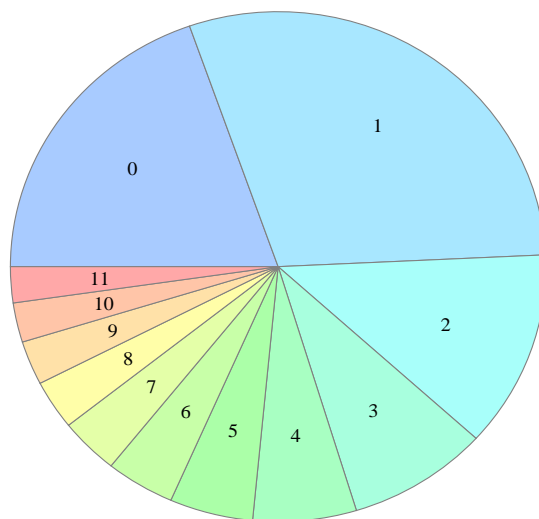
$$C_7 = \sqrt{a_7^2 + b_7^2} = 0.14345, \quad \dots,$$

ενώ για τους όρους άρτιας τάξης

$$C_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |b_2| = 0.5, \quad C_4 = |b_4| = 0.25, \quad C_6 = |b_6| = 0.1667, \dots$$

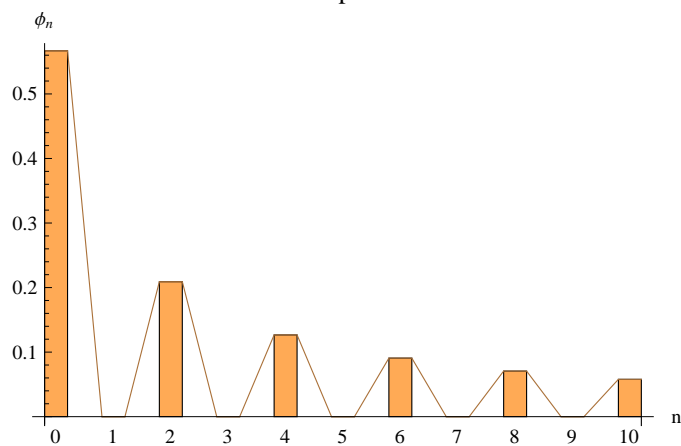
Το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους δίνεται στο Σχ. 3.2.5 - 1. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει αργά προς την f . Επίσης δίνονται το κυκλικό διάγραμμα κατανομής (pie chart) στο Σχ. 3.2.5 - 2 και φάσης στο Σχ. 3.2.5 - 3.

Linear spectrum Pie-chart

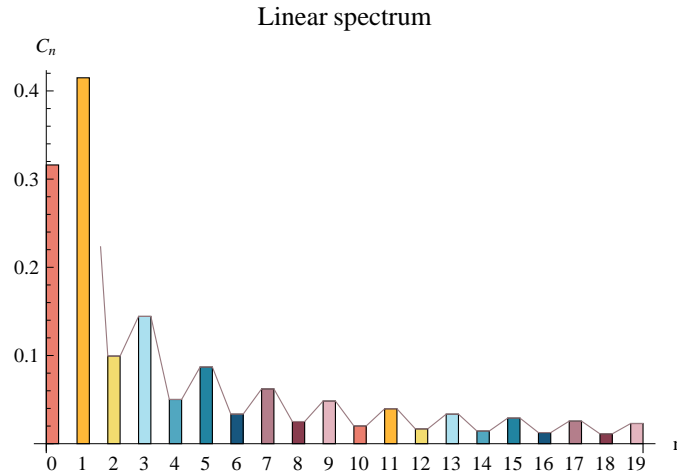


Σχήμα 3.2.5 - 2: Παράδειγμα 3.2.5 - 1: το διάγραμμα κατανομής (pie chart) του γραμμικού φάσματος πλάτους

Phase spectrum



Σχήμα 3.2.5 - 3: Παράδειγμα 3.2.5 - 1: το φάσμα φάσεων (phase spectrum)



Σχήμα 3.2.5 - 4: Παράδειγμα 3.2.5 - 2: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum)

Παράδειγμα 3.2.5 - 2

Από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος 3.2.4 - 2 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι για τους όρους περιττής τάξης είναι:

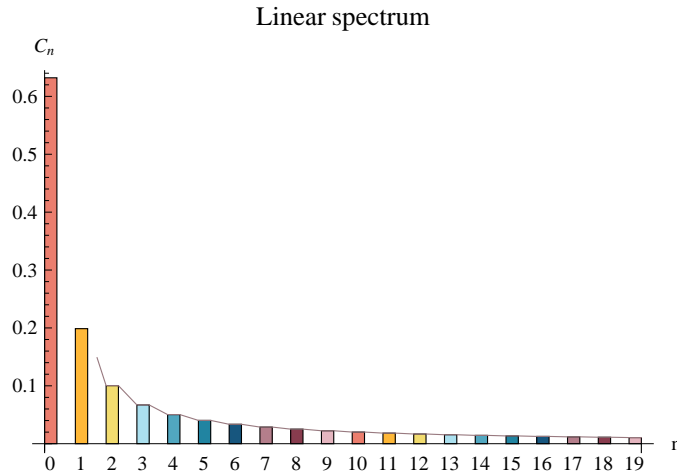
$$C_0 = \frac{|a_0|}{2} = 0.31606, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.41490,$$

$$C_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.14433, \quad C_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.05014, \quad \dots,$$

ενώ για τους όρους άρτιας τάξης

$$C_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 0.09935, \quad C_4 = 0.05014, \quad C_6 = 0.03349, \quad \dots$$

Το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους δίνεται στο Σχ. 3.2.5 - 4. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει επίσης αργά προς την g .



Σχήμα 3.2.5 - 5: Παράδειγμα 3.2.5 - 3: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum)

Παράδειγμα 3.2.5 - 3

Όμοια από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος 3.2.4 - 3 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι:

$$C_0 = \frac{|a_0|}{2} = 0.63212, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.19871,$$

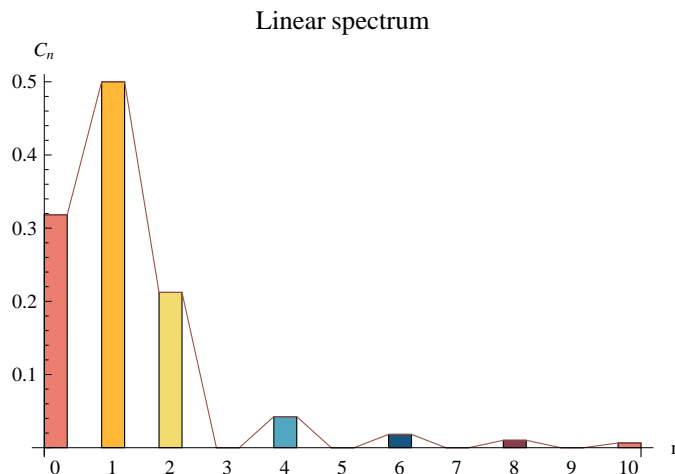
$$C_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 0.10029, \quad C_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.06698,$$

$$C_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.05026, \quad C_5 = \sqrt{a_5^2 + b_5^2} = 0.04026, \quad \dots$$

με αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους που δίνεται στο Σχ. 3.2.5 - 5. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει γρήγορα προς την \tilde{g} .

Παράδειγμα 3.2.5 - 4

Όμοια από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος 3.2.4 - 4 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία



Σχήμα 3.2.5 - 6: Παράδειγμα 3.2.5 - 4: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum)

έχουμε:

$$C_0 = \frac{|a_0|}{2} = 0.31831, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.5,$$

$$C_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.04244, \quad C_6 = \sqrt{a_6^2 + b_6^2} = 0.01819,$$

$$C_8 = \sqrt{a_8^2 + b_8^2} = 0.01011, \quad C_{10} = \sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2} = 0.00643, \quad \dots$$

με αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους που δίνεται στο Σχ. 3.2.5 - 6. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει επίσης γρήγορα προς την \tilde{f} .

3.2.6 Σειρά άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι:

Ορισμός 3.2.6 - 1. Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται **άρτια** (even), όταν για κάθε t , $-t \in D$ ισχύει

$$f(-t) = f(t). \quad (3.2.6 - 1)$$

Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $\cos t$, $(t^2 + 1)^{1/2}$ κ.λπ.

Ορισμός 3.2.6 - 2. Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται **περιττή** (*odd*), όταν για κάθε t , $-t \in D$ ισχύει

$$f(-t) = -f(t). \quad (3.2.6 - 2)$$

Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η t , $\sin \omega t$ κ.λπ.

Από τις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών έχουμε:

- i) το διάγραμμα μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα yy' , ενώ μιας περιττής συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων,
- ii) όταν η f είναι άρτια, τότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) dt = 2 \int_0^{\alpha} f(t) dt, \quad (3.2.6 - 3)$$

ενώ, όταν είναι περιττή,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) dt = 0, \quad (3.2.6 - 4)$$

- iii) το γινόμενο μιας περιττής με μία άρτια είναι περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

Με χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων (i)-(iii) από τους τύπους (3.2.2 - 4) - (3.2.2 - 6) προκύπτουν τα εξής:

f άρτια

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \overbrace{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt}^{(3.2.6-3)} = \frac{2 \cdot 2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt,$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)}_{\text{άρτια}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \quad (3.2.6-3)$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)}_{\text{περιττή}} dt = 0 \quad (3.2.6-4)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$

f περιττή

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0, \quad (3.2.6-4)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)}_{\text{περιττή} \times \text{άρτια} : \text{περιττή}} dt = 0, \quad (3.2.6-4)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)}_{\text{περιττή} \times \text{περιττή} : \text{άρτια}} dt && (3.2.6-3) \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \end{aligned}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$

Επομένως έχει αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.6 - 1 (σειρά Fourier άρτιων-περιττών συναρτήσεων).

Έστω $f(t)$ μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο T που πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.3 - 1. Τότε, αν η $f(t)$ είναι **άρτια**, το ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier είναι

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

όπου

$$\alpha_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \text{ και}$$

$$\alpha_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad (3.2.6 - 5)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ενώ, όταν είναι **περιττή**,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

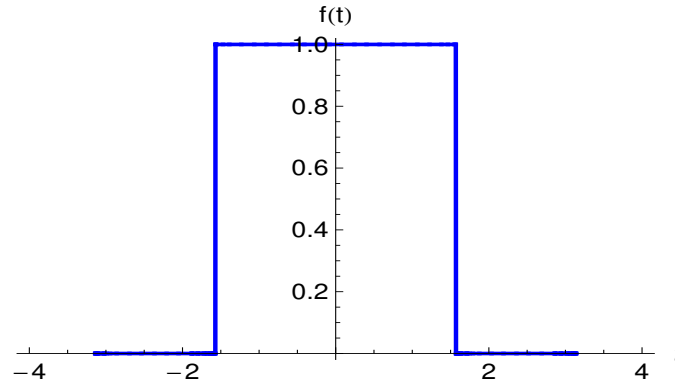
όπου

$$\beta_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad (3.2.6 - 6)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

Παρατηρήσεις 3.2.6 - 1

- Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.6 - 1, όταν η f είναι άρτια, πρέπει $\beta_n = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ενώ, όταν η f είναι περιττή, πρέπει $\alpha_n = 0$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$,
- τα άκρα του πεδίου ορισμού της f στη θεμελιώδη περίοδο πρέπει να είναι συμμετρικά ως προς το 0.



Σχήμα 3.2.6 - 1: Παράδειγμα 3.2.6 - 1: η συνάρτηση $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο

Παράδειγμα 3.2.6 - 1

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 3.2.6 - 1)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -\pi < t \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{αν } -\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{αν } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases} \quad \text{και } f(t+2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η f είναι μία **άρτια** συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, οπότε $\beta_n = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους (3.2.6 - 5) ολοκληρώνοντας στο διάστημα

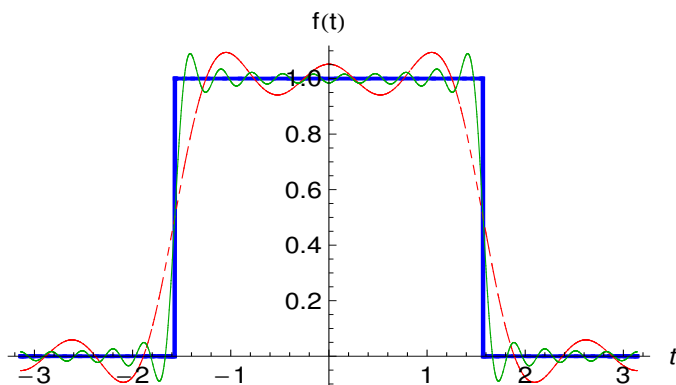
$$[0, T/2] = [0, 2\pi/2] = [0, \pi] = [0, \pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$$

έχουμε

$$\alpha_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\pi/2} f(t) dt + \frac{4}{T} \int_{\pi/2}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dt = 1$$

και

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nt) dt = \frac{2}{n\pi} \sin(nt) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$



Σχήμα 3.2.6 - 2: Παράδειγμα 3.2.6 - 1: διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, αθροίσματος S_5 κόκκινη και S_{19} πράσινη καμπύλη

για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

Στο Σχ. 3.2.6 - 2 δίνεται το διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_5 των 5 πρώτων όρων (κόκκινη καμπύλη) και του S_{19} (πράσινη καμπύλη). Από το Σχ. 3.2.6 - 2 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της f , όταν το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας $-\pi/2$ και $\pi/2$ δημιουργούνται κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει. Το φαινόμενο αυτό είναι ήδη γνωστό από τα Παραδείγματα 3.2.4 - 1 έως και 3.2.4 - 3 σαν **φαινόμενο Gibbs**. ■

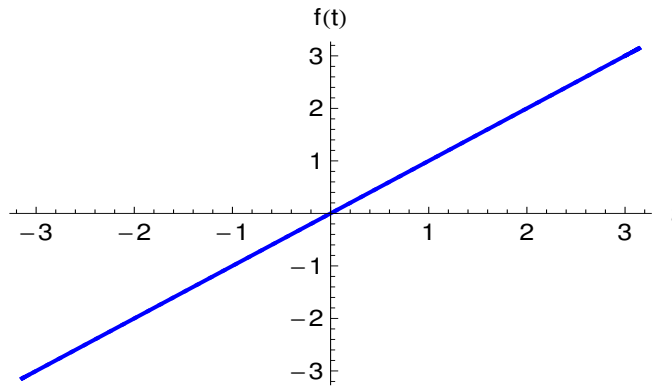
Παράδειγμα 3.2.6 - 2

Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 3.2.6 - 3)

$$f(t) = t, \text{ όταν } -\pi \leq t < \pi \text{ και } f(t + 2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η f είναι μία **περιττή** συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, οπότε $a_n = 0$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους (3.2.6 - 6) ολοκληρώνοντας όμοια στο διάστημα

$$[0, T/2] = [0, 2\pi/2] = [0, \pi]$$



Σχήμα 3.2.6 - 3: Παράδειγμα 3.2.6 - 2: η συνάρτηση $f(t)$, όταν $t \in [-\pi, \pi]$

έχουμε

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \\
 &= -\frac{2}{n\pi} t \cos(nt) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \\
 &= -\frac{2(-1)^n}{n}.
 \end{aligned}$$

Ανάλογο διάγραμμα με αυτό του Σχ. 3.2.6 - 2 γίνεται και στην περίπτωση αυτή.

■

Άσκηση

Να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier και να γίνει το γραμμικό φάσμα των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων $f(t)$, που ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι:^{10, 11}

$$\begin{array}{ll}
 i) & f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{αν } 0 \leq t < \pi \end{cases} & v) & f(t) = e^t; \quad 0 \leq t < 1 \\
 ii) & f(t) = t; \quad -1 \leq t < 1 & vi) & f(t) = t^2; \quad -\pi \leq t < \pi \\
 iii) & f(t) = t; \quad 0 \leq t < 2\pi & vii) & f(t) = |\sin t| \\
 iv) & f(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{αν } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{αν } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} & viii) & f(t) = \begin{cases} -t; & -\pi \leq t < 0 \\ t; & 0 \leq t < \pi. \end{cases}
 \end{array}$$

3.2.7 Εκθετική μορφή της σειράς Fourier

Έστω η περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T , που το ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier είναι

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)] \quad (3.2.7 - 1)$$

όπου $\omega = 2\pi/T$. Είναι γνωστό ότι από την ταυτότητα $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$, προκύπτουν οι τύποι του Euler

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{και} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \quad (3.2.7 - 2)$$

¹⁰ **Λύση.**

¹¹ (i) περιττή $T = 2\pi$, $b_n = (4/T) \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$; $n = 1, 2, \dots$, (ii) ανάλογη του Παραδείγματος 3.2.6 - 2, $T = 2$, $b_n = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$; $n = 1, 2, \dots$, (iii) $a_0 = 2\pi$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n}$; $n = 1, 2, \dots$, (iv) βλέπε Παράδειγμα 3.2.4 - 4, (v) όμοια Παράδειγμα 3.2.4 - 3, $a_0 = 2 - \frac{2}{e}$, $a_n = \frac{2(e-1)}{e(1+4n^2\pi^2)}$, $b_n = \frac{4n\pi(e-1)}{e(1+4n^2\pi^2)}$; $n = 1, 2, \dots$, (vi) άρτια $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$; $n = 1, 2, \dots$, (vii) $T = \pi$. Όταν $t \in [0, \pi/2]$ είναι $|\sin t| = \sin t$ (η λύση όμοια με Παράδειγμα 3.2.4 - 4), $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_n = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$; $n = 1, 2, \dots$, (viii) άρτια $T = 2\pi$, $a_0 = \int_0^\pi t dt = \pi$, $a_n = \frac{2[-1+(-1)^n]}{n^2\pi}$; $n = 1, 2, \dots$.

Αντικαθιστώντας στην (3.2.7-1) τους όρους του συνημιτόνου και του ημιτόνου με τις (3.2.7-2) η σειρά διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + \beta_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right] \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} (\alpha_n - i\beta_n) e^{in\omega t} + \frac{1}{2} (\alpha_n + i\beta_n) e^{-in\omega t} \right]. \end{aligned}$$

Αν

$$c_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2} (\alpha_n - i\beta_n) \quad \text{και} \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (\alpha_n + i\beta_n), \quad (3.2.7-3)$$

τότε

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{-in\omega t}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}. \quad (3.2.7-4)$$

Η (3.2.7-4) είναι γνωστή σαν η **εκθετική ή μιγαδική μορφή** της σειράς Fourier. Οι συντελεστές c_n με $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ υπολογίζονται ή μέσω των τύπων (3.2.7-3), όταν είναι γνωστά τα α_n και β_n ή όπως αποδεικνύεται από την $f(t)$ σύμφωνα με τον τύπο

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad \text{για κάθε} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2.7-5)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι πραγματική, από την (3.2.7-5) προκύπτει ότι γενικά οι συντελεστές c_n είναι μιγαδικοί αριθμοί, για τους οποίους σύμφωνα με τους τύπους (3.2.7-3) ισχύει:

i)

$$c_{-n} = \overline{c_n} \quad \text{για κάθε} \quad n = 1, 2, \dots \text{ ενώ} \quad (3.2.7-6)$$

ii) επειδή $c_n = |c_n|e^{i\theta_n}$ και $c_{-n} = |c_n|e^{-i\theta_n}$, πρέπει

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots \quad (3.2.7 - 7)$$

Όπως έχει ήδη αναπτυχθεί στην Παράγραφο 3.2.5, είναι δυνατόν και για την εκθετική μορφή της σειράς Fourier να οριστεί το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους, το οποίο όμως στην περίπτωση αυτή εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$, επειδή οι τιμές της κυκλικής συχνότητας είναι και αρνητικές, δηλαδή $\pm\omega, \pm 2\omega, \dots$, όπως επίσης και το φάσμα των φάσεων.

Παράδειγμα 3.2.7 - 1

Έστω η περιοδική συνάρτηση

$$\tilde{g}(t) = e^{-t}, \quad \text{όταν } 0 \leq t < 1 \quad \text{και} \quad \tilde{g}(t + 1) = \tilde{g}(t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathfrak{R}$$

του Παραδείγματος 3.2.4 - 3 (Σχ. 3.2.4 - 5) με θεμελιώδη περίοδο $T = 1$, δηλαδή $\omega = 2\pi$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (3.2.7 - 5) έχουμε

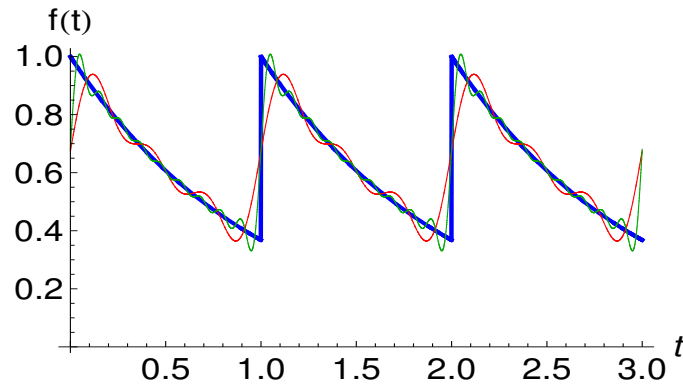
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{1} \int_0^1 e^{-t} e^{-in\omega t} dt = \int_0^1 e^{-t} e^{-2\pi n i t} dt \\ &= \int_0^1 e^{-(1+2n\pi i)t} dt = - \left. \frac{e^{-(1+2n\pi i)t}}{1+2n\pi i} \right|_0^1 \\ &= \frac{1 - e^{-1}}{1+2n\pi i} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{1 - 2n\pi i}{1 + 4n^2\pi^2} \end{aligned} \quad (3.2.7 - 8)$$

όπου $e^{-2n\pi i} = \cos(2n\pi) - i \sin(2n\pi) = 1$. Άρα σύμφωνα με την (3.2.7 - 4) η εκθετική μορφή της σειράς Fourier είναι

$$\tilde{g}(t) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - 2n\pi i}{1 + 4n^2\pi^2} e^{2n\pi i t}. \quad (3.2.7 - 9)$$

Όμοια, όπως και στο Σχ. 3.2.4 - 6, στο Σχ. 3.2.7 - 1 δίνεται το διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος

$$S_3 = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{n=-3}^3 \frac{1 - 2n\pi i}{1 + 4n^2\pi^2} e^{2n\pi i t} \quad (\text{κόκκινη καμπύλη})$$



Σχήμα 3.2.7 - 1: Παράδειγμα 3.2.7 - 1: διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ όταν $t \in [0, 3]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_9 πράσινη

και του S_9 (πράσινη καμπύλη). Παρατηρούμε ότι στα σημεία ασυνέχειας εξακολουθεί να εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs, ενώ τα διαγράμματα των S_3 και S_9 διέρχονται από τα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g(t_i))$ με $t_i = 0, 1, 2, 3$.

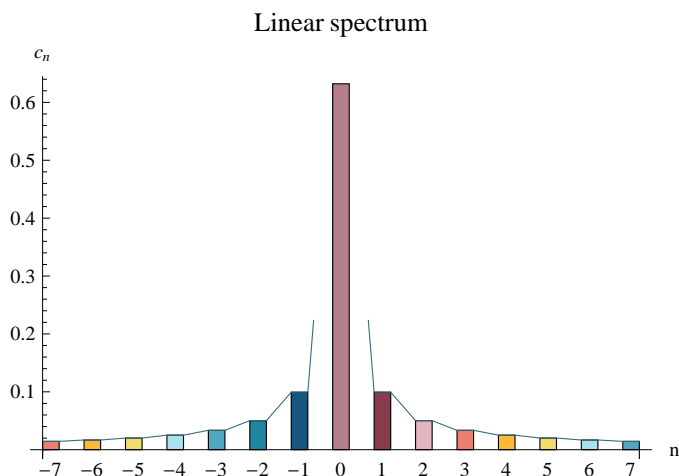
Από την (3.2.7 - 8), όταν $n = 7$, προκύπτει

$$\begin{aligned} |c_{\pm 7}| &= 0.01437, & |c_{\pm 6}| &= 0.01676, & |c_{\pm 5}| &= 0.02011, \\ |c_{\pm 4}| &= 0.02513, & |c_{\pm 3}| &= 0.03349, & |c_{\pm 2}| &= 0.05014, \\ |c_{\pm 1}| &= 0.09936, & |c_0| &= 0.63212. \end{aligned} \quad (3.2.7 - 10)$$

Τότε από το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους (Σχ. 3.2.7 - 2), όπως και στο αντίστοιχο (Σχ. 3.2.5 - 5), προκύπτει η γρήγορη σύγκλιση της σειράς (3.2.7-9) στην $\tilde{g}(t)$. Επίσης παρατηρούμε ότι οι τιμές (3.2.7-10) επαληθεύουν τις (3.2.7 - 6) - (3.2.7 - 7).

Το Σχ. 3.2.7 - 2 έγινε με τις εξής εντολές του MATHEMATICA:

```
Clear["n"]; T = 1;
cn = Integrate[(1/T) Exp[-t]*Exp[-I*n*2*Pi*t], {t, 0, 1}];
m1 = Array[b1, {15, 1}];
Do[n = i; x = N[Abs[cn]]; m1[[i + 8]] = x;
  Print["c", i, "=", x], {i, -7, 7}];
fgr1 = BarChart[m1, PlotLabel -> "Linear spectrum",
```



Σχήμα 3.2.7 - 2: Παράδειγμα 3.2.7 - 1: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum)

```
Joined -> True, BarSpacing -> 1.50,
AxesLabel->{"n", "|cn|"}, ChartLabels -> {"-7", "-6",
"-5", "-4", "-3", "-2", "-1", "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6",
"7"}, ChartStyle->24, PlotRange -> All]
```

Άσκηση

Να υπολογιστεί η εκθετική μορφή της σειράς Fourier των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι

$$\begin{array}{ll}
 i) & f(t) = t; \quad -\pi \leq t < \pi \\
 ii) & f(t) = t^2; \quad -\pi \leq t < \pi \\
 iii) & f(t) = |\sin t| \\
 iv) & f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{αν } 0 \leq t < \pi. \end{cases}
 \end{array}$$

¹² Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978-960-351-874-7.
- [2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [3] Bronson, R. (1978), Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, McGraw-Hill Book Company, ISBN 07-008009-7.
- [4] Churchill R., Brown J. (2005), Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960-7309-41-3.
- [5] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978-960-524-184-1 .
- [6] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978-960-461-000-6.
- [7] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960-418-087-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright TEI Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Ανώτερα Μαθηματικά II. Ενότητα 3: Σειρά Fourier». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- Το Σημείωμα Αναφοράς
- Το Σημείωμα Αδειοδότησης
- Τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- Το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.