

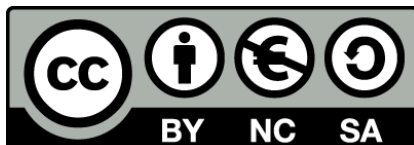


Μαθηματικά III

Ενότητα 6: Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Ενεργειακής Τεχνολογίας ΤΕ



Το περιεχόμενο του μαθήματος διατίθεται με άδεια Creative Commons εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 6

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού

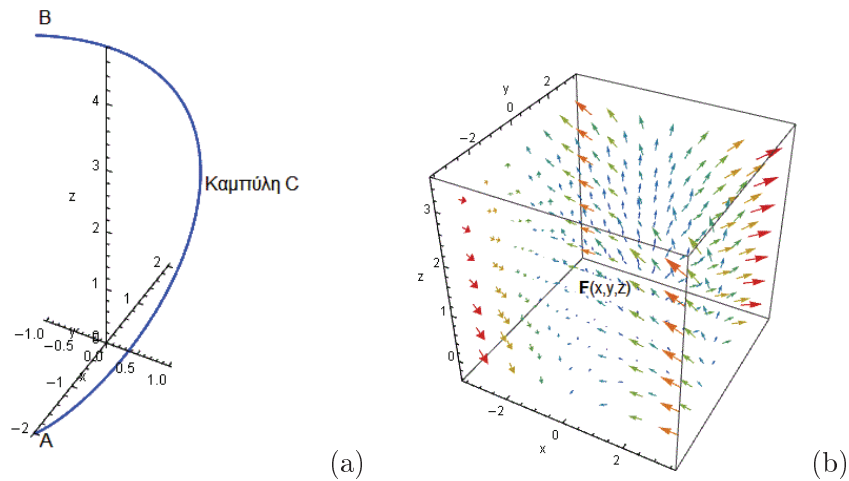
6.1.1 Ορισμός

Στο μάθημα αυτό γίνεται μια γενίκευση της μέχρι τώρα γνωστής έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, σύμφωνα με την οποία το διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha, \beta]$ αντικαθίσταται από μια καμπύλη, έστω C (Σχ. 6.1 - 1a), με πεπερασμένο μήκος, που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση¹ $\mathbf{r}(t)$, ενώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$ από ένα διανυσματικό πεδίο, που περιγράφεται επίσης από μία διανυσματική συνάρτηση², έστω \mathbf{F} (Σχ. 6.1 - 1b), που ορίζεται επί της C (Σχ. 6.1 - 2c), δηλαδή τα σημεία (x, y) , αντίστοιχα (x, y, z) στα οποία ορίζεται η \mathbf{F} , είναι επίσης σημεία της C (Σχ. 6.1 - 2d). Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται τότε **επικαμπύλια** και η καμπύλη C **δρόμος ολοκλήρωσης**.

Δίνεται στη συνέχεια ο ορισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

¹Βλέπε: Μάθημα 4. Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, Παράγραφος 4.2: παραμετρική παράσταση καμπυλών.

²Βλέπε: Μάθημα 5. Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός, Παράγραφος 5.2: Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία.



Σχήμα 6.1 - 1: (a) η καμπύλη C και (b) το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F}

Ορισμός 6.1 - 1 (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα). Έστω C μία καμπύλη με πεπερασμένο μήκος που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$ και ένα διανυσματικό πεδίο, έστω \mathbf{F} , που είναι ορισμένο επί της C (Σχ. 6.1 - 2). Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της \mathbf{F} επί της C , συμβολίζεται με $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ και ορίζεται από τον τύπο

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt, \quad (6.1 - 1)$$

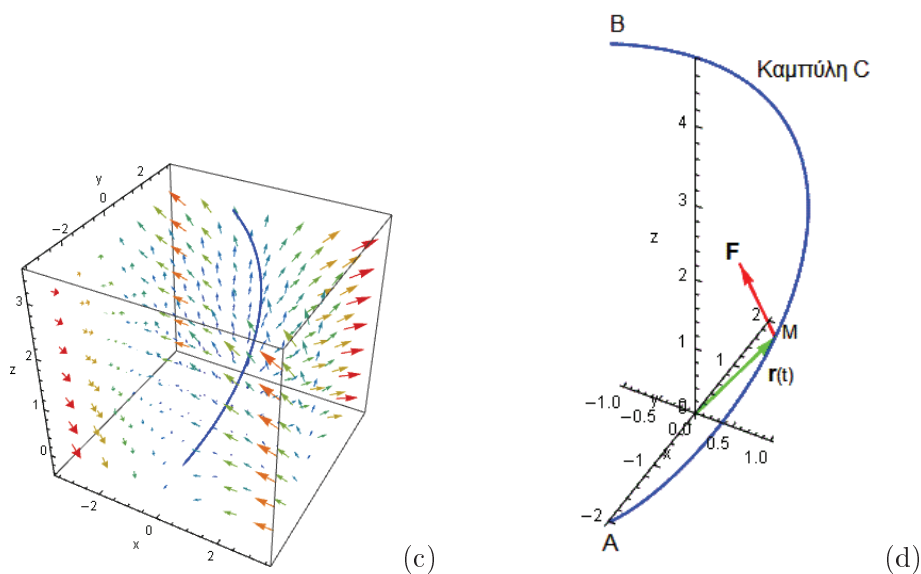
όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Αν η καμπύλη C είναι **κλειστή**, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της C συμβολίζεται με

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

όπου στο σύμβολο της ολοκλήρωσης τίθεται πολλές φορές και βέλος για να καθορισθεί η φορά διαγραφής της C .

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν πολλές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, όπως στο έργο δυνάμεων, τη δυναμική ενέργεια, τη ροή θερμότητας, την εντροπία, τη ροή ρευστών κ.λπ.



Σχήμα 6.1 - 2: (a) το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} με την καμπύλη C και (d) το πεδίο \mathbf{F} επί της C , δηλαδή, όταν τα σημεία (x, y, z) στα οποία ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} , είναι επίσης σημεία της C

6.1.2 Τύπος υπολογισμού

Έστω ότι η διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει το πεδίο \mathbf{F} , εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων του στο χώρο των 3-διαστάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z), \rangle\end{aligned}\quad (6.1 - 2)$$

ενώ η διανυσματική συνάρτηση³ \mathbf{r} ως

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.\quad (6.1 - 3)$$

³Μάθημα 4: Διάνυσμα θέσης ή διανυσματική ακτίνα τύπος (4.1 - 3).

Σύμφωνα με τις (6.1-2) και (6.1-3), λαμβάνοντας υπ' όψιν το γνωστό τύπο υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου⁴, το ολοκλήρωμα (6.1-1) γράφεται

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= P dx + Q dy + R dz.\end{aligned}\quad (6.1-4)$$

Η αντίστοιχη έκφραση της (6.1-4), που θα χρησιμοποιηθεί στην Παράγραφο ?? στο χώρο των 2-διαστάσεων, είναι

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= P dx + Q dy.\end{aligned}\quad (6.1-5)$$

Έστω τώρα ότι η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$, που περιγράφει παραμετρικά την καμπύλη C , είναι της μορφής⁵

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ &= \langle x(t), y(t), z(t) \rangle, \quad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta].\end{aligned}\quad (6.1-6)$$

Αντικαθιστώντας σύμφωνα με την (6.1-6) στην (6.1-2) τα x , y , z με τις αντίστοιχες παραμετρικές μορφές τους $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) &= \langle P(x(t), y(t), z(t)), Q(x(t), y(t), z(t)), \\ &= R(x(t), y(t), z(t)) \rangle.\end{aligned}\quad (6.1-7)$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$, από την (6.1-6) έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \\ &= \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle, \quad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta].\end{aligned}\quad (6.1-8)$$

⁴Αν $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ και $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, τότε το **εσωτερικό γινόμενο** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ισούται με

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

⁵Βλέπε: Μάθημα 4. Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, Παράγραφος 4.2: παραμετρική παράσταση καμπυλών, τύπος (4.2-4).

Σύμφωνα με τις (6.1 – 7) και (6.1 – 8), λαμβάνοντας υπ' όψιν και το γνωστό τύπο υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου⁶, η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (6.1 – 1) γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) &= P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t), \\ &+ R(x(t), y(t), z(t)) z'(t). \end{aligned} \quad (6.1 - 9)$$

Τότε από την (6.1–9) προκύπτει ο παρακάτω τύπος υπολογισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος (6.1 – 1) για το χώρο των 3-διαστάσεων

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt, \quad (6.1 - 10)$$

ενώ ο αντίστοιχος τύπος για το χώρο των 2-διαστάσεων είναι

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t)] dt. \quad (6.1 - 11)$$

Κρίνεται αναγκαίο στο σημείο αυτό να γίνει υπενθύμιση των παρακάτω χρήσιμων για τα επόμενα παραμετρικών παραστάσεων.

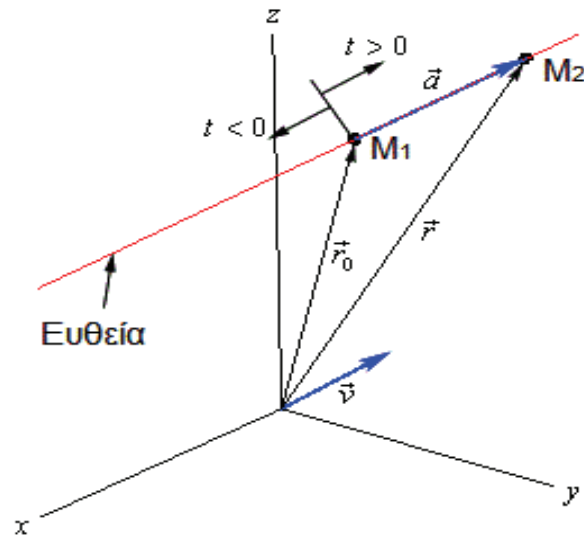
Ευθεία

Οι παραμετρικές μορφές των $x(t)$, $y(t)$, αντίστοιχα $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ της παραμετρικής εξίσωσης του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 για την περίπτωση του χώρου των

- **2-διαστάσεων**, όταν $M_1(x_1, y_1)$ η αρχή και $M_2(x_2, y_2)$ το τέλος, είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1 \quad \text{με } t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (6.1 - 12)$$

⁶Βλέπε παραπάνω υποσημείωση.



Σχήμα 6.1 - 3: παραμετρική παράσταση ευθείας

- 3-διαστάσεων, όταν $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - αρχή και $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - τέλος (Σχ. 6.1 - 3), είναι

$$x(t) = tx_2 + (1-t)x_1,$$

$$y(t) = ty_2 + (1-t)y_1,$$

$$z(t) = tz_2 + (1-t)z_1 \quad \text{με } t \in [0, 1]. \quad (6.1 - 13)$$

Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε, αν R η ακτίνα, η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

οπότε παραμετρικές μορφές των $x(t)$ και $y(t)$ είναι

$$x(t) = R \cos t \quad \text{και}$$

$$y(t) = R \sin t \quad \text{με } t \in [0, 2\pi). \quad (6.1 - 14)$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α, β) , τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= (\alpha + R \cos t) \quad \text{και} \\ y(t) &= (\beta + R \sin t) \quad \text{με } t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (6.1 - 15)$$

Σημείωση 6.1 - 1

Σε κάθε άλλη διαφορετική των παραπάνω περίπτωση η παραμετρική μορφή της C θα δίνεται.

Παράδειγμα 6.1 - 1

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz + y)\mathbf{k}$$

και C το ευθύγραμμο τμήμα AB με αρχή το $A(1, -1, 2)$ και τέλος το $B(3, 1, -1)$.

Λύση. Έστω

$$A: \quad x_1 = 1, \quad y_1 = -1, \quad z_1 = 2. \quad B: \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = -1,$$

Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB σύμφωνα με τον τύπο (6.1 - 13) εκφράζεται παραμετρικά ως εξής:

$$x(t) = t \cdot 3 + (1 - t) \cdot 1 = 2t + 1 \quad (1)$$

$$y(t) = t \cdot 1 + (1 - t) \cdot (-1) = 2t - 1 \quad (2)$$

$$z(t) = t \cdot (-1) + (1 - t) \cdot 2 = -3t + 2, \quad \text{όταν } t \in [0, 1]. \quad (3)$$

Άρα

$$x'(t) = 2 \quad (4)$$

$$y'(t) = 2 \quad (5)$$

$$z'(t) = -3. \quad (6)$$

Από το διανυσματικό πεδίο προκύπτει ότι

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz + y)\mathbf{k} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Άρα σύμφωνα με τις (1)-(3) έχουμε

$$P = x = 2t + 1,$$

$$Q = -y = -2t + 1,$$

$$R = xz + y = (2t + 1)(-3t + 2) + 2t - 1 = -6t^2 + 3t + 1.$$

Τότε από τον τύπο (6.1 - 10) προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt, \\ &= \int_0^1 \left[(2t + 1) \cdot \overbrace{2}^{(4)} + (-2t + 1) \cdot \overbrace{2}^{(5)} + (-6t^2 + 3t + 1) \cdot \overbrace{(-3)}^{(6)} \right] dt \\ &= \left. t - \frac{9t^2}{2} + 6t^3 \right|_0^1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.1 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$$

και C η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο $(0, 0)$, όταν η περιφέρεια διαγράφεται δεξιόστροφα, δηλαδή αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (6.1 - 14) η περιφέρεια έχει την παρακάτω παραμετρική παράσταση ($R = 1$)

$$x(t) = \cos t \quad \text{και} \quad (1)$$

$$y(t) = \sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi), \quad (2)$$

οπότε

$$x'(t) = -\sin t \quad \text{και} \quad (3)$$

$$y'(t) = \cos t. \quad (4)$$

Το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$\mathbf{F} = (x - y) \mathbf{i} + (x + y) \mathbf{j} = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}.$$

Άρα σύμφωνα με τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$P = x - y = \cos t - \sin t,$$

$$Q = x + y = \cos t + \sin t.$$

Τότε από τον τύπο (6.1 – 11) έχουμε

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} [Px'(t) + Qy'(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(\cos t - \sin t) \cdot \overbrace{(-\sin t)}^{(3)} + (\cos t + \sin t) \cdot \overbrace{\cos t}^{(4)} \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

■

6.2 Ιδιότητες επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των ήδη γνωστών ολοκληρωμάτων. Οι βασικότερες από αυτές είναι:

i) $\int_C (\chi \mathbf{F} + \lambda \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \chi \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \lambda \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}; \quad \chi, \lambda \in \mathfrak{R} \text{ (γραμμική),}$

ii) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
 που είναι γνωστή σαν η **προσθετική ιδιότητα** της C , όπου C_1 και C_2 είναι δύο τόξα της C , τέτοια ώστε το άθροισμά τους να είναι η C και να διαγράφονται από το ίδιο διάνυσμα $\mathbf{r}(t)$ που διαγράφεται και η C ,

iii) $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$
 δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παραμένει αμετάβλητο σε μία αλλαγή

της παραμέτρου, που διατηρεί τον προσανατολισμό της C και αλλάζει πρόσημο, όταν η αλλαγή αυτή αντιστρέψει τον προσανατολισμό. Η ιδιότητα αυτή εκφράζει την ανεξαρτησία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την εκλογή της παραμέτρου.

6.3 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και κλίσης

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ δεν είναι γενικά ανεξάρτητο από το δρόμο της ολοκλήρωσης C , δηλαδή, αν υποθεθεί ότι η C έχει αρχή το σημείο A και τέλος το B , τότε η τιμή του, όταν ο δρόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB , είναι διαφορετική εκείνης που ο δρόμος είναι μια οποιαδήποτε άλλη καμπύλη με αρχή το A και τέλος το B .

Τα παραπάνω δεν ισχύουν και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα του τρόπου διαγραφής της C από το A στο B , μόνον όταν το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρούμενο⁷. Σχετικά αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.⁸

Θεώρημα 6.3 - 1 (ανεξαρτησίας επικαμπύλιου ολοκληρώματος). Έστω $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, όπου φ βαθμωτή συνάρτηση της οποίας υπάρχουν τουλάχιστον οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (6.3 - 1)$$

όταν C η καμπύλη από το σημείο $A(x_1, y_1, z_1)$ στο $B(x_2, y_2, z_2)$ του πεδίου, είναι ανεξάρτητο από το δρόμο της ολοκλήρωσης και αντίστροφα, αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (6.3-1) είναι ανεξάρτητο από το δρόμο της ολοκλήρωσης, τότε υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση, έστω φ , έτσι ώστε $\mathbf{F} = \nabla\varphi$.

Παράδειγμα 6.3 - 1

Έστω το διανυσματικό πεδίο (Σχ. 6.3 - 1a)

$$\mathbf{F} = 2xy \mathbf{i} + (x^2 + 2y^2) \mathbf{j}.$$

Δείξτε ότι

⁷Βλέπε Μάθημα 5 Παράγραφος 5.4.1.

⁸Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.

- i) το πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρούμενο.
 ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όταν C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(0, -1)$ στο $B(1, 2)$.

Λύση.

- i) Αρκεί να δειχθεί⁹ ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Αν

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ &\text{(υποχρεωτικά η συνιστώσα που λείπει ίση με μηδέν)} \\ &= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

τότε

$$P = 2xy, \quad Q = x^2 + 2y^2 \quad \text{και} \quad R = 0. \quad (1)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + 2y^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0 - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - 0)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Τότε από το Θεώρημα 7.7-1¹⁰ προκύπτει ότι το πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρούμενο, δηλαδή $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, όπου φ το δυναμικό.

- ii) Σύμφωνα με την (i), αν

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \nabla\varphi = \varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} + \varphi_z\mathbf{k},$$

τότε από την (1) προκύπτει ότι

$$\varphi_x = P = 2xy \quad \varphi_y = Q = x^2 + 2y^2 \quad \text{και} \quad \varphi_z = R = 0.$$

⁹Βλέπε Μάθημα 5, Θεώρημα 5.7-1: Ένα διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, όταν είναι συντηρούμενο και αντίστροφα.

¹⁰Βλέπε υποσημείωση 9.

Για να προσδιοριστεί το δυναμικό φ , πρέπει να ολοκληρωθούν οι παραπάνω σχέσεις. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του ολικού διαφορικού της φ ως εξής:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_x dx + \varphi_y dy \\ &= 2xy dx + (x^2 + 3y^2) dy \\ &= d_x(x^2y) + d_y(x^2y + y^3) \\ &= d_x(x^2y + \overbrace{y^3}^{d_x(y^3)=0}) + d_y(x^2y + y^3) \\ &= d(x^2y + y^3). \end{aligned}$$

Άρα το δυναμικό του πεδίου είναι

$$\phi(x, y) = x^2y + y^3 + c,$$

όταν c σταθερά (Σχ. 6.3 - 1b), οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 6.3 - 1 έχουμε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(0,-1)}^{B(1,2)} d\varphi = \varphi(1,2) - \varphi(0,-1) = 11.$$

■

Παράδειγμα 6.3 - 2

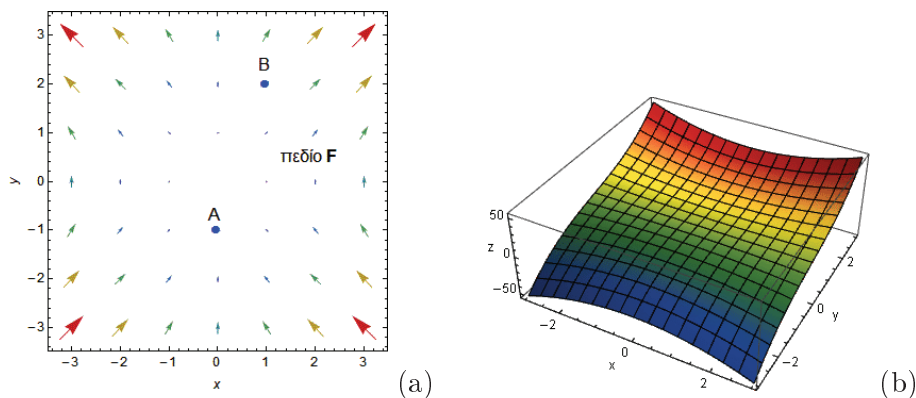
Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = 3x^2z \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + (x^3 + 2yz) \mathbf{k}.$$

και C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(-1, 1, 2)$ στο $B(1, 2, 4)$.

Λύση. Αν

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 3x^2z \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + (x^3 + 2yz) \mathbf{k} \\ &= P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}, \end{aligned}$$



Σχήμα 6.3 - 1: (a) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{j}$ και τα σημεία $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ και (b) το δυναμικό $\phi(x, y) = x^2y + y^3$.

τότε

$$P = 3x^2z, \quad Q = z^2 \quad \text{και} \quad R = x^3 + 2yz. \quad (2)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2z & z^2 & x^3 + 2yz \end{vmatrix} \\ &= (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Άρα όμοια σύμφωνα με το γνωστό Θεώρημα 5.7-1 το πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρούμενο, οπότε, αν

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} = \nabla\phi = \phi_x\mathbf{i} + \phi_y\mathbf{j} + \phi_z\mathbf{k},$$

τότε σύμφωνα με τη (2) είναι

$$\phi_x = 3x^2z, \quad \phi_y = z^2 \quad \text{και} \quad \phi_z = x^3 + 2yz.$$

Για να προσδιοριστεί το δυναμικό ϕ , πρέπει να ολοκληρωθούν οι παραπάνω σχέσεις. Τότε από το ολικό διαφορικό της ϕ έχουμε

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz$$

$$\begin{aligned}
&= 3x^2z dx + z^2 dy + (x^3 + 2yz) dz \\
&= d_x(x^3z) + d_y(yz^2) + d_z(x^3z + y^2z) \\
&= d_x(x^3z + \overbrace{y^2z}^{d_x(y^2z)=0}) + d_y(yz^2 + \overbrace{x^3z}^{d_y(x^3z)=0}) + d_z(x^3z + y^2z) \\
&= d(x^3z + y^2z).
\end{aligned}$$

Άρα το δυναμικό του πεδίου είναι $\phi(x, y, z) = x^3z + y^2z + c$, όταν c σταθερά, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 6.3 - 1 έχουμε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(-1,1,2)}^{B(1,2,4)} d\phi = \phi(1, 2, 4) - \phi(-1, 1, 2) = 6.$$

■

Ασκήσεις

1. Αφού πρώτα δειχθεί ότι τα παρακάτω πεδία είναι συντηρούμενα, στη συνέχεια να υπολογιστεί το έργο που παράγεται κατά τη μετατόπιση υλικού σημείου, όταν:¹¹

- i) $\mathbf{F} = y^4z^2 \mathbf{i} + 4xy^3z^2 \mathbf{j} + 2xy^4z \mathbf{k}$ από το σημείο $(-1, 2, 4)$ στο $(3, 2, 2)$,
- ii) $\mathbf{F} = (y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) e^{xy}$ από το $(1, 0)$ στο $(2, 2)$,
- iii) $\mathbf{F} = (4xy - 3x^2z^2) \mathbf{i} + 2x^2 \mathbf{j} - 2x^3z \mathbf{k}$ από το $(0, 1, 1)$ στο $(2, 2, 4)$,
- iv) $\mathbf{F} = (2x \cos y + z \sin y) \mathbf{i} + (xz \cos y - x^2 \sin y) \mathbf{j} + x \sin y \mathbf{k}$
από το $(1, \pi, 3)$ στο $(-1, 0, 1)$,
- v) $\mathbf{F} = (y^2z^3 \cos x - 4x^3z) \mathbf{i} + 2yz^3 \sin x \mathbf{j} + (3y^2z^2 \sin x - x^4) \mathbf{k}$
από το $(\pi/2, 1, 1)$ στο $(\pi, 3, 3)$.

2. Να προσδιοριστεί το δυναμικό των πεδίων:

- i) $\mathbf{E} = r \mathbf{r}$
- ii) $\mathbf{E} = r^2 \mathbf{r}$,

¹¹Το αντίστοιχο δυναμικό είναι:

(i) xy^4z^2 , (ii) e^{xy} , (iii) $2x^2y - x^3z^2$, (iv) $x^2 \cos y + xz \sin y$, (v) $y^2z^3 \sin x - x^4z$.

όταν \mathbf{r} διάνυσμα θέσης. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, όταν C το άνω τμήμα της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 4$.

¹²Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: <http://users.teiath.gr/bratsos/>

Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978-960-351-874-7.
- [2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [3] Apostol, T. (1962), Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός II, Εκδόσεις Ατλαντίς-Μ. Πεχλιβανίδης, Αθήνα, ISBN 61-11601.
- [4] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978-960-524-184-1 .
- [5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960-418-087-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright TEI Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Μαθηματικά III. Ενότητα 6: Επικαμπύλια Ολοκληρώματα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- Το Σημείωμα Αναφοράς
- Το Σημείωμα Αδειοδότησης
- Τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- Το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.