Ενότητα 7

Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή

Ορισμός

Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση,

$$f(x) \geq 0, \quad x \in R,$$

με

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς a και β, με $a < \beta$,

$$P(a < X \leq \beta) = \int_a^\beta f(x)dx.$$

Η $f(x)$, $x \in R$, καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X.

Επίσης, αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x, τότε παραγωγίζοντας παίρνουμε την

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, σε αντίθεση με τη συνάρτηση πιθανότητας, δεν παριστάνει την πιθανότητα κάποιου ενδεχομένου.

Η πιθανότητα $P(X = x) = 0$, για οποιοδήποτε $x \in R$, και επομένως η $f(x)$ δεν παριστάνει βέβαια αυτή την πιθανότητα.

Παράδειγμα

Η ποσότητα βενζίνης X (σε χιλιόλιτρα) που πωλεί πρατήριο βενζίνης σε μία μέρα είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \le x < 1, \\ c, & 1 \le x < 2, \\ c(3-x), & 2 \le x < 3, \\ 0, & 3 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η σταθερά c και (β) οι πιθανότητες $P(X \le 3/4)$, $P(1/2 < X \le 5/2)$ και $P(X > 9/4)$.

Λύση

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_0^1 xdx + c\int_1^2 dx + c\int_2^3 (3-x)dx$$

$$= c\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x\right]_1^2 - \left[\frac{(3-x)^2}{2}\right]_2^3\right\} = 2c, \quad c = 1/2.$$

$$(\beta)\ \ P(X \leq 3/4) = \frac{1}{2}\int_0^{3/4} x dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{3/4} = \frac{9}{64},$$

$$P(1/2 < X \leq 5/2) = = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} x dx + \frac{1}{2}\int_1^2 dx + \frac{1}{2}\int_2^{5/2}(3-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} + \left[x\right]_1^2 - \left[\frac{(3-x)^2}{2}\right]_2^{5/2}\right\} = \frac{7}{8},$$

$$P(X > 9/4) = \frac{1}{2}\int_{9/4}^{3}(3-x)dx = -\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right]_{9/4}^{3} = \frac{9}{64}.$$

Μέση Τιμή Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής

Ορισμός

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Παράδειγμα

Έστω ότι το ετήσιο εισόδημα X ενός μισθωτού μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{4 \cdot 10^4}{x^5}, \quad 10 \leq x < \infty,$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F_X(x), -\infty < x < \infty$ και (β) το μέσο εισόδημα $E(X)$ και η διασπορά του εισοδήματος $V(X)$.

Λύση

(α)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{10}^{x} \frac{4\cdot 10^4}{t^5}dt = -\left[\frac{10^4}{t^4}\right]_{10}^{x} = 1 - \frac{10^4}{x^4},\ \ 10 \le x < \infty,$$

$$F_X(x) = 0,\ \ -\infty < x < 10.$$

(β)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{10}^{\infty} \frac{4\cdot 10^4}{x^4}dx = -\left[\frac{4\cdot 10^4}{3x^3}\right]_{10}^{\infty} = \frac{40}{3},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{10}^{\infty} \frac{4\cdot 10^4}{x^3}dx = -\left[\frac{4\cdot 10^4}{2x^2}\right]_{10}^{\infty} = 200,$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 200 - \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{1800-1600}{9} = \frac{200}{9}.$$