Ενότητα 6

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος στοχαστικού πειράματος και A, B ενδεχόμενα ως προς αυτόν. Αν $P(A) = 3/4$, $P(B) = 2/3$ και $P(AB) = 3/5$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A - B)$, $P(A \cup B)$ και $P(A'B')$.

Λύση

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{49}{60},$$

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{11}{60}.$$

Άσκηση 2

Στο στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος δύο φορές ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα όπως εμφανισθεί A: η ένδειξη κεφαλή μία τουλάχιστο φορά, B: στην πρώτη ρίψη η ένδειξη γράμματα και Γ: σε κάθε ρίψη διαφορετική ένδειξη. Υπολογίζοντας τις σχετικές πιθανότητες, δείξτε ότι

$$P(B|A) < P(B), \quad P(\Gamma|A) > P(\Gamma), \quad P(\Gamma|B) = P(\Gamma).$$

Λύση

$$\Omega = \{(\gamma,\gamma),(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa)\}$$

$$A = \{(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa)\},\ \ B = \{(\gamma,\gamma),(\gamma,\kappa)\},\ \ \Gamma = \{(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma)\},$$

$$AB = \{(\gamma,\kappa)\},\ \ A\Gamma = \{(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma)\},\ \ B\Gamma = \{(\gamma,\kappa)\}.$$

$$P(B|A) = \frac{1}{3},\ \ P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ \ P(B|A) < P(B),$$

$$P(\Gamma|A) = \frac{2}{3},\ \ P(\Gamma) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ \ P(\Gamma|A) > P(\Gamma),$$

$$P(\Gamma|B) = \frac{1}{2},\ \ P(\Gamma) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ \ P(\Gamma|B) = P(\Gamma).$$

Άσκηση 3

Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, δείξτε ότι τα ενδεχόμενα (α) A και B', (β) A' και B και (γ) A' και B' είναι ανεξάρτητα.

Λύση

(α)

$$P(AB') = P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$
$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B').$$

(β)

$$P(A'B) = P(B - A) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B)$$
$$= [1 - P(A)]P(B) = P(A')P(B).$$

(γ)

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$
$$= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A')P(B').$$

Άσκηση 4

Έστω ότι ο χρόνος αναμονής X, σε λεπτά, σε συγκεκριμένο σταθμό του μετρό είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ x/2, & 0 \leq x < 1, \\ 1/2, & 1 \leq x < 2, \\ x/4, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & 4 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) οι πιθανότητες $P(X \leq 3/2)$, $P(X > 3)$ και $P(3 < X \leq 5)$ και (β) η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$.

Λύση

(α)

$$P(X \leq 3/2) = F(3/2) = \frac{1}{2},$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P(3 < X \leq 5) = F(5) - F(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

(β)

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x < 1, \\ 1/4, & 2 \leq x < 4, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Άσκηση 5

Έστω X μία αρνητική ακέραιη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 4p^3, & x = 0, \\ 5p(1-3p), & x = 1, \\ 2p(p+3)-1, & x = 2, \\ 0, & x \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες p, $P(X \leq 1)$ και $P(0 < X \leq 2)$.

Λύση

$$\sum_{x=0}^{2} f(x) = 1, \;\; 4p^3 - 13p^2 + 11p - 2 = 0$$

Η $p = 1$ είναι λύση, οπότε

$$4p^3 - 13p^2 + 11p - 2 = (p-1)(4p^2 - 9p + 2), \quad 4p^2 - 9p + 2 = 0$$

και $p = 2$, $p = 1/4$ είναι οι δύο άλλες λύσεις.
Η μόνη αποδεκτή λύση είναι η $p = 1/4$ και έτσι

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1/16, & x = 0, \\ 5/16, & x = 1, \\ 10/16, & x = 2, \\ 0, & x \neq 0, 1, 2, \end{cases}$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 3/8,$$

$$P(0 < X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 15/16.$$

Άσκηση 6

Ας θεωρήσουμε στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου και έστω X ο αριθμός που εμφανίζεται στην επάνω έδρα του.
Να υπολογισθεί η διασπορά $V(X)$. .

Λύση

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Επομένως:

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}.$$

Χρησιμοποιώντας

ότι $E(X) = 7/2$, παίρνουμε

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$