Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 1: Διαφορικές Εξισώσεις – Μέρος Ι

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΡΟΣ Ι

Από την Άλγεβρα είναι γνωστή η έννοια της αλγεβρικής εξίσωσης ή και του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων. Στις εξισώσεις ή και τα συστήματα αυτά οι άγνωστοι, έστω x, y κ.λπ. υπολογίζονται τότε στο σύνολο των πραγματικών ή γενικότερα των μιγαδικών αριθμών.

Υπάρχουν όμως προβλήματα καθαρά μαθηματικά, αλλά και γενικότερα των εφαρμοσμένων επιστημών, που οδηγούν σε εξισώσεις, όπου οι παρουσιαζόμενες άγνωστες συναρτήσεις της μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών, εμφανίζονται με τις παραγώγους τους διαφόρων τάξεων. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται τότε **διαφορικές εξισώσεις**. Οι διαφορικές εξισώσεις που οι άγνωστες συναρτήσεις εξαρτώνται από μία μεταβλητή, λέγονται **συνήθεις διαφορικές εξισώσεις** (ODE's), ενώ εκείνες που εξαρτώνται από περισσότερες της μιας μεταβλητές, λέγονται **διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους** (PDE's). Επομένως

- η $y' + xy + \sin 2x = 0$, όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ εξαρτάται από μια μεταβλητή την x και εμφανίζεται με την πρώτη παράγωγό της είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση 1ης τάξης,

- η $x^2y''' + xy' + (x^2 - y^2)\, y + e^x = 0$, όπου $y = y(x)$, είναι όμοια μία συνήθης διαφορική εξίσωση 3ης τάξης, ενώ

- η $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, όπου η άγνωστη συνάρτηση $u = u(x,t)$ εξαρτάται από τις μεταβλητές x και t, είναι μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους 2ης τάξης ως προς x και t.

Στο μάθημα αυτό θα εξεταστούν μόνον οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και από την κατηγορία αυτή μόνον αυτές που έχουν άμεσο ενδιαφέρον στις τεχνολογικές εφαρμογές[1].

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

1.1.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

Ορισμός 1.1.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης ν- τάξης είναι*

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu)}\right) = 0, \qquad (1.1.1 - 1)$$

όπου $y = y(x)\,|\,(a,b) \subseteq \Re$ μία άγνωστη προσδιοριστέα συνάρτηση και η $y^{(k)}(x)\,|\,(a,b)$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, \nu$ συμβολίζει την k-τάξης παράγωγο της y.

Αν υπάρχει συνάρτηση $y(x)$, που να επαληθεύει την $(1.1.1-1)$, τότε αυτή θα λέγεται **γενική λύση** ή και **ολοκληρωτική καμπύλη** της.

Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της $(1.1.1-1)$ έχει γενικά τη μορφή

$$y(x) = \varphi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right) \qquad (1.1.1 - 2)$$

όπου c_1, c_2, ..., c_ν αυθαίρετες σταθερές, δηλαδή η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $(1.1.1-1)$ περιέχει τόσες αυθαίρετες σταθερές όσες και η τάξη της.

Στη γενική λύση $(1.1.1-2)$ οι ν το πλήθος σταθερές c_1, c_2, ..., c_ν προσδιορίζονται, όταν δοθούν σε ένα σημείο του πεδίο ορισμού, έστω το $x_0 \in (a,b)$, οι παρακάτω ν - **αρχικές συνθήκες**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = {y_0}', \quad \ldots, \quad y^{(\nu-1)}(x_0) = {y_0}^{(\nu-1)}. \qquad (1.1.1 - 3)$$

[1] Ο αναγνώστης για εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 12.

Τότε, επειδή $y(x) = \varphi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right)$, από την $(1.1.1{-}2)$ παραγωγίζοντας την $y(x)$ στο σημείο x_0 διαδοχικά μέχρι και την $\nu - 1$ τάξη και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες $(1.1.1-3)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right) \\ y_0' &= \varphi_x{}'\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right) \\ &\ldots \\ y_0^{(\nu-1)} &= \varphi_x{}^{(\nu-1)}\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right). \end{aligned} \qquad (1.1.1 \text{ - } 4)$$

Το σύστημα $(1.1.1-4)$ έχει ν - εξισώσεις με ν - αγνώστους τις σταθερές c_1, c_2, $\ldots$, c_ν. Η αντικατάσταση των τιμών των σταθερών που προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος $(1.1.1{-}4)$ στην $y(x)$ ορίζει τότε τη **μερική λύση** της $(1.1.1-1)$.

Ορισμός 1.1.1 - 2 (πρόβλημα αρχικής τιμής). *Η διαφορική εξίσωση* $(1.1.1-1)$ *με τις αρχικές συνθήκες* $(1.1.1-3)$, *δηλαδή η*

$$\begin{aligned} y^{(\nu)} &= f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}\right) \quad \textit{με τις} \\ y^{(i)}\left(x_0\right) &= y_0^{(i)} \quad \textit{για κάθε } i = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1, \end{aligned} \qquad (1.1.1 \text{ - } 5)$$

ορίζει ένα πρόβλημα αρχικής τιμής (initial value problem ή IVP) ν - τάξης.

Παράδειγμα 1.1.1 - 1

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad \text{όπου} \quad y = y(x).$$

Λόγω της ύπαρξης της $y''(x)$ η διαφορική εξίσωση είναι τάξης $\nu = 2$, οπότε η γενική της λύση σύμφωνα με την $(1.1.1-2)$ θα είναι της μορφής $y(x) = \varphi\left(x, y, c_1, c_2\right)$, όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Αποδεικνύεται ότι η γενική της λύση είναι στην περίπτωση αυτή

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Έστω τώρα ότι ζητείται η μερική λύση, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

i) $y(0) = 1,\, y'(0) = -2,$ αντίστοιχα

ii) $y(0) = 2,\, y'(0) = 3.$

Λύση. Σύμφωνα και με την (1.1.1 − 3) έχουμε

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} \quad \text{οπότε} \quad y'(x) = c_1 e^{x} - 2c_2 e^{-2x}.$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή οι αρχικές συνθήκες δίνονται στο σημείο $x_0 = 0$, θέτοντας $x = 0$ στις $y(x)$ και $y'(x)$ προκύπτει σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες (i), αντίστοιχα (ii) το σύστημα:

i)

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & + & c_2 & = & 1 \\ c_1 & - & 2c_2 & = & -2, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad c_1 = 0 \ \text{και} \ c_2 = 1,$$

δηλαδή η μερική λύση είναι η $y = e^{-2x}$ (Σχ. 1.1.1 - 1) - μπλε καμπύλη, αντίστοιχα

ii)

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & + & c_2 & = & 21 \\ c_1 & - & 2c_2 & = & 3, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad c_1 = \frac{7}{3} \ \text{και} \ c_2 = -\frac{1}{3},$$

με μερική λύση $y = \frac{7}{3}\, e^{x} - \frac{1}{3}\, e^{-2x}$ (Σχ. 1.1.1 - 1) - κόκκινη καμπύλη.

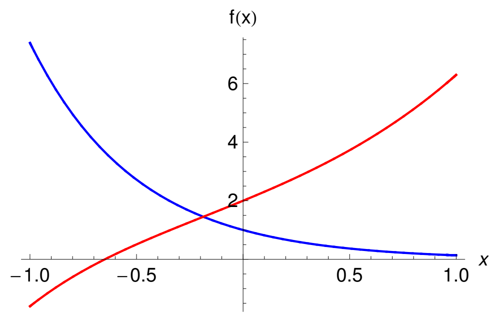
■

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές παρουσιάζει μια ειδική κατηγορία διαφορικών εξισώσεων, που είναι γνωστή σαν γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ορίζονται στη συνέχεια.

Ορισμός 1.1.1 - 3 (μη ομογενής γραμμική). *Μία διαφορική εξίσωση που γράφεται στη μορφή*

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x) y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x) y' + f_0(x) y = r(x) \qquad (1.1.1 - 6)$$

όπου η $r(x)$ και οι συντελεστές $f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_{\nu-1}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς για κάθε $x \in (a, b)$, λέγεται μη ομογενής γραμμική (nonhomogeneous linear) διαφορική εξίσωση ν -τάξης.



Σχήμα 1.1.1 - 1: Παράδειγμα 1.1.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $x \in [-1, 1]$ στην περίπτωση (i) μπλε και (ii) κόκκινη καμπύλη

Ενδεικτικά στα προβλήματα του ηλεκτρισμού η $r(x)$ ορίζει την είσοδο (source term).

Ορισμός 1.1.1 - 4 (μη γραμμική). *Λέγεται μη γραμμική (nonlinear) διαφορική εξίσωση, κάθε διαφορική εξίσωση, που δεν είναι δυνατόν να γραφεί στη μορφή* $(1.1.1-6)$.

Ορισμός 1.1.1 - 5 (ομογενής γραμμική). *Ορίζεται σαν ομογενής γραμμική (homogeneous linear) διαφορική εξίσωση ν - τάξης, κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής* $(1.1.1-6)$ *με* $r(x) = 0$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0. \qquad (1.1.1 - 7)$$

Αποδεικνύεται το παρακάτω σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.1 - 1 *Αν y_h είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης* $(1.1.1-7)$ *και y_p μία μερική (particular) λύση της μη ομογενούς* $(1.1.1-6)$, *τότε η γενική λύση της* $(1.1.1-6)$ *είναι*

$$y = y_h + y_p. \qquad (1.1.1 - 8)$$

Σημείωση 1.1.1 - 1

Η μερική λύση y_p, σε αντίθεση με τη λύση y_h της ομογενούς, **δεν** περιέχει σταθερές.

Ορισμός 1.1.1 - 6. *Ορίζεται σαν μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(1.1.1-6)$ *όπου οι συναρτήσεις* $f_k(x)$ *είναι σταθερές για κάθε* $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = r(x), \qquad (1.1.1 - 9)$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1$.

Ορισμός 1.1.1 - 7. *Ορίζεται σαν ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(1.1.1 - 9)$ *όπου* $r(x) = 0$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (1.1.1 - 10)$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1$.

Στην περίπτωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(1.1.1 - 10)$ η λύση της προσδιορίζεται θέτοντας

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με} \quad \lambda \ \text{σταθερά}. \qquad (1.1.1 - 11)$$

Τότε

$$y'(x) = \lambda\, e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2\, e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(\nu)}(x) = \lambda^\nu\, e^{\lambda x},$$

οπότε, επειδή προφανώς $e^{\lambda x} \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, αντικαθιστώντας στην $(1.1.1 - 10)$ προκύπτει τελικά ότι

$$\lambda^\nu + a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (1.1.1 - 12)$$

Η $(1.1.1 - 12)$ είναι η **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic ή auxiliary equation) της $(1.1.1 - 10)$ και από τη λύση της προκύπτουν οι ν - το πλήθος ρίζες $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_\nu$, που ορίζουν τις τιμές του λ στην $(1.1.1 - 11)$. Σύμφωνα με την $(1.1.1 - 2)$ αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της $(1.1.1 - 10)$, όταν οι ρίζες είναι απλές, είναι της μορφής

$$y_h(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_\nu\, e^{\lambda_\nu x}, \qquad (1.1.1 - 13)$$

ενώ όταν μια ρίζα, έστω η λ, έχει πολλαπλότητα ρ με $\rho \leq \nu$, τότε

$$y_h(x) = (c_1 + \ldots + c_\rho)\, e^{\lambda x} + c_{\rho+1}\, e^{\lambda_{\rho+1} x} + \ldots + c_\nu\, e^{\lambda_\nu x}. \qquad (1.1.1 - 14)$$

Εφαρμογές της παραπάνω θεωρίας στις περιπτώσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης και 2ης τάξης θα δοθούν στις επόμενες παραγράφους.

1.2 Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

1.2.1 Ορισμοί

Ορισμός 1.2.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι*

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \qquad (1.2.1 - 1)$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, b) \subseteq \Re$ και υπάρχει η $y'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Τότε η λύση $y(x)$, εφόσον είναι δυνατόν να προσδιοριστεί, θα ορίζει τη λύση της $(1.2.1 - 1)$.

Ορισμός 1.2.1 - 2. *Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής $(1.2.1-1)$ θα λέγεται ότι γράφεται σε λυμένη (explicit) μορφή, όταν*

$$y' = f(x, y). \qquad (1.2.1 - 2)$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση η $(1.2.1 - 1)$ θα λέγεται ότι ορίζεται με πεπλεγμένη (implicit) μορφή.

Σαν ειδική περίπτωση του Ορισμού 1.1.1 - 2 δίνεται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.2.1 - 3. *Μία λυμένη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, που επαληθεύει μία αρχική τιμή, δηλαδή η*

$$y' = f(x, y) \quad \mu\varepsilon \quad y_0 = y\left(x_0\right), \qquad (1.2.1 - 3)$$

θα λέγεται ότι ορίζει ένα **πρόβλημα αρχικής τιμής** *(initial value problem) 1ης τάξης.*

Εξετάζεται στη συνέχεια μια ειδική κατηγορία των διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης, που είναι απαραίτητη για τα επόμενα.

1.2.2 Διαφορικές εξισώσεις χωρισμένων μεταβλητών

Ορισμός 1.2.2 - 1. *Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής*[2]

$$g(y)\, y' = f(x) \quad \text{με } x \in (a,b) \subseteq \Re \text{ και } y = y(x) \in (\gamma, \delta) \subseteq \Re \qquad (1.2.2 - 1)$$

λέγεται ότι ορίζει μια διαφορική εξίσωση με **χωρισμένες μεταβλητές**.

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης ο συμβολισμός

$$y' = y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad \text{οπότε} \quad dy(x) = y'(x)\, dx.$$

Επομένως το κλάσμα $dy(x)/dx$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί σαν το πηλίκο των διαφορικών $dy(x)$ και dx, οπότε η $(1.2.2-1)$ γράφεται

$$g(y)\, y' = f(x) \quad \text{γράφεται} \quad g(y)dy = f(x)dx,$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει τελικά ότι

$$\int \mathbf{g(y)dy} = \int \mathbf{f(x)dx + c} \qquad (1.2.2 - 2)$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Αν υποτεθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς, τότε τα ολοκληρώματα στην $(1.2.2-2)$ υπάρχουν, οπότε από τον υπολογισμό τους προκύπτει η γενική λύση της $(1.2.2-1)$.

Παρατηρήσεις 1.2.2 - 1

Από την $(1.2.2-2)$ προκύπτουν τα εξής:

i) η σταθερά c συμπεριλαμβάνει τις σταθερές, που προκύπτουν από την ολοκλήρωση του αριστερού και του δεξιού μέλους. Επομένως **δεν** απαιτείται στην $(1.2.2-2)$ η πρόσθεση άλλων σταθερών.

ii) Μετά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, θα πρέπει η $(1.2.2-2)$ να λυθεί ως προς y. Αν αυτό δεν είναι δυνατόν, τότε λέγεται ότι η λύση της $(1.2.2-1)$ δίνεται με **πεπλεγμένη μορφή**.

[2] Βλέπε επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Separation_of_variables*

iii) Αν κάποιο από τα ολοκληρώματα στην $(1.2.2-2)$ δεν υπολογίζεται, τότε αναζητούνται προσεγγιστικές λύσεις[3] της $(1.2.2-2)$.

iv) Έστω ότι για την αναγωγή της $(1.2.2-1)$ στη μορφή $(1.2.2-2)$ απαιτείται η διαίρεση με το y, οπότε πρέπει να υποτεθεί $y \neq 0$. Τότε, αν στη γενική λύση η τιμή $y=0$ δε συμπεριλαμβάνεται, θα λέγεται ότι η $y=0$ είναι μια **ιδιάζουσα ή προφανής λύση** (trivial solution) της $(1.2.2-1)$.

Παράδειγμα 1.2.2 - 1

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y\,y' + 4x = 0 \tag{1}$$

που διαδοχικά γράφεται

$$y\,\frac{dy}{dx} + 4x = 0 \quad ή \quad y\,dy = -4x\,dx,$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$\frac{y^2}{2} = -4\,\frac{x^2}{2} + c,$$

όταν c μια αυθαίρετη σταθερά. Άρα έχουμε την παρακάτω με πεπλεγμένη μορφή γενική λύση της (1)

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = c. \tag{2}$$

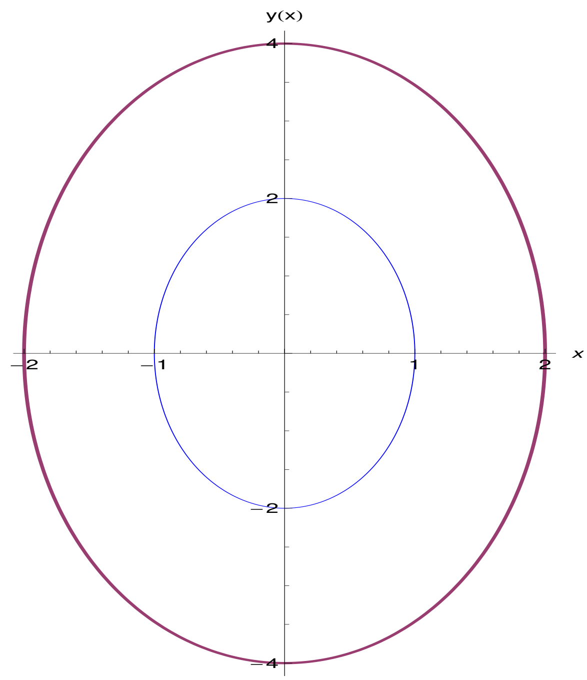
Η (2) για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c παριστάνει μια οικογένεια ελλείψεων (Σχ. 1.2.2 - 1).

Παράδειγμα 1.2.2 - 2

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\left(x^2+1\right) y' - y^2 = 0 \quad \text{όπου } y_0 = y(0) = 1. \tag{3}$$

[3] Βλέπε βιβλιογραφία: προσεγγιστική λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 10.



Σχήμα 1.2.2 - 1: Παράδειγμα 1.2.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $c = 1$ μπλε και $c = 4$ κόκκινη έλλειψη

Λύση. Είναι $1 + x^2 \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$. Υποθέτοντας ότι $y \neq 0$ η (3) γράφεται

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2},$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$-\frac{1}{y} = \tan^{-1} x + c,$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Επομένως η γενική λύση της (3) είναι

$$y = -\frac{1}{\tan^{-1} x + c}. \tag{4}$$

Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 1.2.2 - 1 (iv), επειδή για την εύρεση της γενικής λύσης έχει υποτεθεί $y \neq 0$, εξετάζεται αν η $y = 0$ συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση (4). Επειδή αυτό δεν συμβαίνει, η $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (3).

Υπολογισμός μερικής λύσης

Σύμφωνα με την (3) η αρχική συνθήκη είναι $y(0) = 1$. Τότε από την (4) έχουμε

$$1 = -\frac{1}{\underbrace{\tan^{-1} 0}_{0} + c}, \quad \text{δηλαδή} \quad c = -1.$$

Άρα η μερική λύση της (3) είναι

$$y = \frac{1}{1 - \tan^{-1} x} \tag{5}$$

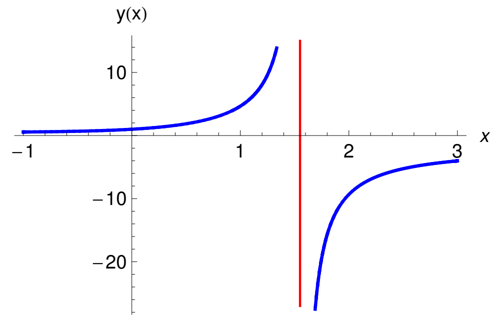
με $1 - \tan^{-1} x \neq 0$, δηλαδή $x \not\approx 1.5574$ - κάθετη ασύμπτωτη στο Σχ. 1.2.2 - 2. ■

Η εύρεση της γενικής λύσης του Παραδείγματος 1.2.2 - 2 με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
DSolve[(x^2+1)y'[x]-(y[x])^2==0,y[x],x]
```

ενώ της μερικής λύσης με την:

```
DSolve[{(x^2+1)y'[x]-(y[x])^2==0,y[0]==1},y[x],x]
```



Σχήμα 1.2.2 - 2: Παράδειγμα 1.2.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $x \in [-2, 5]$ με κάθετη ασύμπτωτη την $x \approx 1.5574$

Παρατήρηση 1.2.2 - 1

Πολλές φορές για να απλουστεύσουμε την έκφραση της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης, η αυθαίρετη σταθερά c αντικαθίσταται από την επίσης αυθαίρετη σταθερά $\ln c$ με $c > 0$. Η αντικατάσταση αυτή δεν περιορίζει τη γενικότητα της λύσης, επειδή $(\ln c) \in \Re$.

Σημείωση 1.2.2 - 1

Όταν υπάρχουν τιμές της μεταβλητής, που μηδενίζουν το συντελεστή της y', οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται μια εξίσωση με άγνωστο το y, τότε οι τιμές αυτές εξετάζονται χωριστά.

Παράδειγμα 1.2.2 - 3

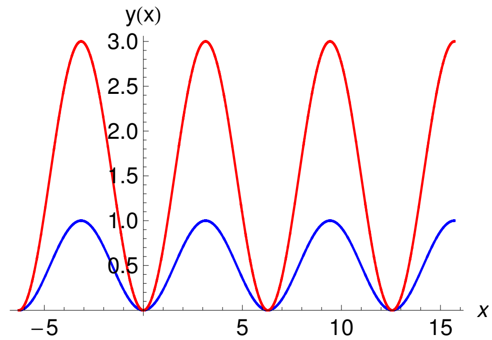
Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1 - \cos x)y' = y \, \sin x. \tag{6}$$

Λύση. Σύμφωνα και με τη Σημείωση 1.2.2 - 1 πρέπει $1 - \cos x \neq 1$, δηλαδή $x \neq k\pi$ με $k \in Z$, ενώ αν $x = k\pi$, τότε προφανώς η (6) ισχύει για κάθε $x \in \Re$.

Έστω τώρα ότι $y \neq 0$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y \, \sin x}{1 - \cos x} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos x}, \quad \text{δηλαδή} \\ \frac{dy}{y} &= \frac{(1 - \cos x)' \, dx}{1 - \cos x}. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.2.2 - 3: Παράδειγμα 1.2.2 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = c\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ με $x \in [-2\pi, 5\pi]$, όταν $c = 1$ μπλε και $c = 3$ κόκκινη καμπύλη

Άρα ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1-\cos x)'\,dx}{1-\cos x} + c, \quad \text{δηλαδή} \quad \ln|y| = \ln|1-\cos x| + c,$$

που σύμφωνα και με την Παρατήρηση 1.2.2 - 1 γράφεται

$$\ln|y| = \ln|1-\cos x| + \ln c = \ln|c\,(1-\cos x)| \quad \text{με} \quad c > 0,$$

δηλαδή $|y| = |c\,(1-\cos x)|$ ή ισοδύναμα $y = \pm\, c\,(1-\cos x)$ με $c > 0$, οπότε

$$y = c\,(1-\cos x) \quad \text{με} \quad c \neq 0.$$

Επειδή $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η γενική λύση της (6) τελικά γράφεται

$$y = c\,\sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{7}$$

Η γραφική παράσταση της (7) για τις τιμές $c = 1,\, 3$ δίνεται στο Σχ. 1.2.2 - 3.

Επειδή για την εύρεση της γενικής λύσης (7) έχει υποτεθεί $y \neq 0$ και η τιμή $y = 0$, εφόσον στην (7) είναι $c \neq 0$, δεν συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση, η $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (6). ■

Παράδειγμα 1.2.2 - 4

Όμοια η

$$x \ln x \, y' - y = 0, \quad \text{όταν} \quad y(e) = 1. \tag{8}$$

Λύση. Λόγω του παράγοντα $\ln x$ πρέπει $x > 0$. Έστω $y \neq 0$. Τότε από την (8) υποθέτοντας ότι και $\ln x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$, διαφορετικά πρέπει $y = 0$, άτοπο, έχουμε

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \, \ln x} = \frac{d \ln x}{\ln x}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.2.2 - 1 και το Παράδειγμα 1.2.2 - 3 προκύπτει

$$\ln |y| = \ln | \ln x| + \ln c = \ln |c \, \ln x| \quad \text{με} \quad c > 0.$$

Άρα $y = \pm \, c \, \ln x$, δηλαδή η γενική λύση της (8) τελικά γράφεται

$$y = c \, \ln x, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0 \quad \text{και} \quad x > 0 \text{ με } x \neq 1. \tag{9}$$

Επειδή $y(e) = 1$, από την (9) προκύπτει $c = 1$, οπότε η μερική λύση της (8) είναι $y = \ln x$. Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (8).

Εφαρμογή 1.2.2 - 1 (ορθογώνιες τροχιές)

Έστω ότι μία οικογένεια καμπύλων του xy-επιπέδου επαληθεύει την εξίσωση

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1.2.2 - 3}$$

όπου $y = y(x)$ και c μία παράμετρος. Ζητείται να προσδιοριστεί μια άλλη οικογένεια καμπύλων, έστω η $G\,(x, y, c) = 0$, που να τέμνει κάθετα κάθε καμπύλη της $(1.2.2-3)$. Η G ορίζει τότε τις **ορθογώνιες τροχιές** της $(1.2.2-3)$. Παραγωγίζοντας την $(1.2.2-3)$ και απαλείφοντας την παράμετρο c μεταξύ της $(1.2.2 - 3)$ και της εξίσωσης που προκύπτει μετά την παραγώγισή της, έχουμε μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Άρα οι ορθογώνιες τροχιές της $(1.2.2 - 3)$ θα είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}. \tag{1.2.2 - 4}$$

Παράδειγμα 1.2.2 - 5

Αν η οικογένεια καμπυλών είναι η $x^2 + y^2 = c$, τότε $2x + yy' = 0$, δηλαδή $y' = -x/y$. Άρα η ζητούμενη οικογένεια καμπύλων θα προκύψει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

δηλαδή είναι η $y = kx$ όπου k σταθερά. Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθείες, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$i)\quad x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}y' = 0$ $\qquad iii)\quad xy\left(1+x^2\right)y' = 1 + y^2$

$ii)\quad xyy' - \left(1+y^2\right)^{1/2} = 0$ $\qquad iv)\quad \sin x\,\cos y + y'\cos x\,\tan y = 0.$

2. Να υπολογιστούν οι ορθογώνιες τροχιές των οικογενειών των καμπυλών $y = ce^{-x}$ και $x^2 - y^2 = cx$.

1.2.3 Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.1 - 3 η γενική μορφή της **μη ομογενούς** γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι

$$\mathbf{y' + f(x)y = r(x)} \tag{1.2.3 - 1}$$

όπου $y = y(x)$ και $f(x)$, $r(x)$ συνεχείς συναρτήσεις με $r(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b) \subseteq \Re$.

Τότε η αντίστοιχη **ομογενής** της $(1.2.3 - 1)$ σύμφωνα και με τον Ορισμό 1.1.1 - 5 θα είναι

$$\mathbf{y' + f(x)y = 0}, \quad \text{όταν} \quad x \in (a, b). \tag{1.2.3 - 2}$$

Λύση ομογενούς

Η $(1.2.3 - 2)$, που είναι μια διαφορική εξίσωση με χωρισμένες μεταβλητές, αν $y \neq 0$, γράφεται

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx, \quad \text{οπότε} \quad \ln|y| = -\int f(x)\,dx + c^*,$$

όπου c^* αυθαίρετη σταθερά. Άρα

$$\begin{aligned} |y| &= e^{-\int f(x)\,dx + c^*} = e^{-\int f(x)\,dx} \underbrace{e^{c^*}}_{c\neq 0\ \text{σταθερά}}, \quad \text{δηλαδή} \\ y &= \pm c\, e^{-\int f(x)\,dx}, \end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση y_h της ομογενούς εξίσωσης $(1.2.3-2)$ θα είναι

$$y_h(x) = c\, e^{-\int f(x)\,dx} \quad \text{με} \quad c \neq 0 \tag{1.2.3 - 3}$$

όπου προφανώς είναι $y > 0$, όταν $c > 0$ και $y < 0$, όταν $c < 0$. Τότε, επειδή η τιμή $y = 0$ δεν περιλαμβάνεται στη λύση $(1.2.3-3)$, θα είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(1.2.3-2)$.

Λύση μη ομογενούς - Μέθοδος του Lagrange

Για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης $y_p(x)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(1.2.3-1)$, δηλαδή της

$$y' + f(x)y = r(x),$$

εφαρμόζεται η μέθοδος του Lagrange. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η σταθερά c στη γενική λύση $(1.2.3-3)$ της ομογενούς, δηλαδή στην

$$y_h(x) = c\, e^{-\int f(x)\,dx}$$

θεωρείται σαν συνάρτηση του x. Έστω ότι είναι $c = k(x)$, οπότε η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$y_h(x) = y(x) = k(x)\, e^{-\overbrace{\int f(x)\,dx}^{q(x)}} = k(x)\, e^{-q(x)}.$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} y(x) &= k(x)\, e^{-q(x)}, \quad \text{όταν} \qquad (1.2.3 - 4) \\ q(x) &= \int f(x)\,dx \quad \text{και} \quad q'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1.2.3 − 4) έχουμε

$$\begin{aligned} y' = y'(x) &= k'(x)\, e^{-q(x)} + k(x)\ [-q(x)]'\ e^{-q(x)} \\ &= k'(x)\, e^{-q(x)} - k(x)\, f(x)\, e^{-q(x)}. \end{aligned} \qquad (1.2.3\text{ - }5)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.2.3 − 4) και (1.2.3 − 5) στην $y' + f(x)y = r(x)$ τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} k'(x) &= r(x)\, e^{q(x)} \quad \text{ή} \quad \frac{d\,k(x)}{dx} = r(x)\, e^{q(x)}, \quad \text{δηλαδή} \\ d\,k(x) &= r(x)\, e^{q(x)}\, dx, \end{aligned}$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$k(x) = \int r(x)\, e^{q(x)}\, dx. \qquad (1.2.3\text{ - }6)$$

Αντικαθιστώντας την (1.2.3 − 6) στην (1.2.3 − 4) προκύπτει ότι η μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1.2.3 − 1), δηλαδή της $y' + f(x)y = r(x)$, είναι[4]

$$y_p(x) = e^{-q(x)} \int r(x)\, e^{q(x)}\, dx. \qquad (1.2.3\text{ - }7)$$

Επειδή σύμφωνα με την (1.2.3 − 4) είναι $q(x) = \int f(x)\, dx$, από το Θεώρημα 1.1.1 - 1, την (1.2.3 − 7) και την (1.2.3 − 3) προκύπτει ότι η γενική λύση $y(x)$ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης (1.2.3 − 1), δηλαδή της $y' + f(x)y = r(x)$, είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y(x)} &= \mathbf{y_h + y_p} \qquad (1.2.3\text{ - }8) \\ &= c\, e^{-\int f(x)\, dx} + e^{-\int f(x)\, dx} \int r(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx \\ &= e^{-\int f(x)\, dx} \left[\int r(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx \, + \, c\right] \\ &= e^{-q(x)} \left[\int r(x)\, e^{q(x)}\, dx \, + \, c\right] \end{aligned}$$

[4]Υπενθυμίζεται ότι η μερική λύση δεν περιέχει σταθερά - Σημείωση 1.1.1 - 1.

για κάθε $x \in (a, b)$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Παράδειγμα 1.2.3 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2\,x\,y = e^{-x^2}, \quad \text{όταν } y(0) = 1. \tag{1}$$

Λύση ομογενούς. Έστω $y \neq 0$. Τότε συγκρίνοντας την αντίστοιχη ομογενή

$$y' - 2xy = 0$$

με την $(1.2.3 - 2)$ προκύπτει ότι $f(x) = 2x$. Άρα από την $(1.2.3 - 3)$ για τη λύση της ομογενούς έχουμε

$$y_h(x) \;=\; c\,e^{-\int f(x)\,dx} = c\,e^{-2\int x\,dx} = c\,e^{-x^2},$$

όταν $c \neq 0$. Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της ομογενούς.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = 2\,x$, οπότε από την $(1.2.3 - 4)$ προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x)\,dx = \int 2\,x\,dx = x^2.$$

Επειδή $r(x) = e^{-x^2}$, από την $(1.2.3 - 7)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y_p(x) \;&=\; e^{-q(x)} \left[\int r(x)\,e^{q(x)}\,dx\right] \\ &=\; e^{-x^2} \left[\int e^{-x^2}\,e^{x^2}\,dx\right] = x\,e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(1.2.3 - 8)$ η γενική λύση της (1) θα είναι

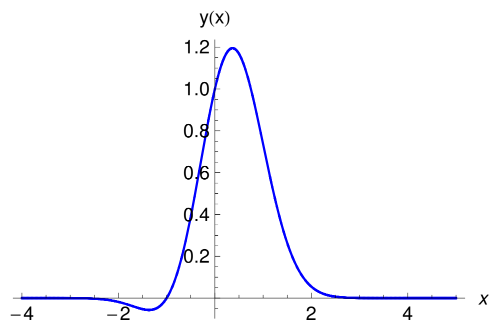
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x^2}\,(x + c) \tag{2}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (1) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 1$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (2) θέτοντας $x = 0$. Τότε $1 = y(0) = 1(0 + c)$, οπότε $c = 1$ και η μερική λύση της (1) θα είναι (Σχ. 1.2.3 - 1)

$$y(x) = e^{-x^2}(x + 1).$$

■



Σχήμα 1.2.3 - 1: Παράδειγμα 1.2.3 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x^2}(x+1)$, όταν $x \in [-4, 5]$

Παράδειγμα 1.2.3 - 2

Όμοια η

$$x\,y' - y = x^2, \quad \text{όταν } y(1) = 0. \tag{3}$$

Λύση ομογενούς. Αν $x = 0$, τότε προφανώς είναι και $y = 0$. Έστω $x \neq 0$ Τότε η (3) γράφεται

$$y' - \frac{y}{x} = x, \quad \text{όταν } y(1) = 0. \tag{4}$$

με αντίστοιχη ομογενή την

$$y' - \frac{y}{x} = 0. \tag{5}$$

Έστω $y \neq 0$. Τότε όμοια συγκρίνοντας την (5) με την $(1.2.3-2)$ προκύπτει ότι $f(x) = -\frac{1}{x}$. Άρα από την $(1.2.3-3)$ για τη λύση της ομογενούς έχουμε

$$y_h(x) \;=\; c\,e^{-\int f(x)\,dx} = c\,e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} = c\,e^{\ln|x|} = c\,|x|,$$

όταν $c \neq 0$, δηλαδή $y = \pm c\,x$. Επομένως τελικά η λύση της ομογενούς είναι:

$$y_h(x) = c\,x, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0.$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (5).

Μη ομογενής

Επειδή είναι $f(x) = -\frac{1}{x}$, από την $(1.2.3-4)$ προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x)\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x|.$$

Τότε, επειδή $r(x) = x$, από την $(1.2.3-7)$ έχουμε για τη μερική λύση της μη ομογενούς

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-q(x)}\left[\int r(x)\,e^{q(x)}\,dx\right] = e^{-(-\ln|x|)}\left[\int x\,e^{-\ln|x|}\,dx\right] \\ &= |x|\int x\,\frac{1}{|x|}\,dx = \begin{cases} x\displaystyle\int x\,\frac{1}{x}\,dx = x^2 & \text{αν}\quad x>0, \\ -x\displaystyle\int x\,\frac{1}{-x}\,dx = x^2 & \text{αν}\quad x<0, \end{cases} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$y_p(x) = x^2.$$

Άρα σύμφωνα με την $(1.2.3-8)$ η γενική λύση της (4) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = x(x+c) \tag{6}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (4) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(1) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (6) θέτοντας $x = 1$. Άρα $0 = y(1) = 1 + c$, οπότε $c = -1$ και η μερική λύση της (4) θα είναι (Σχ. 1.2.3 - 2)

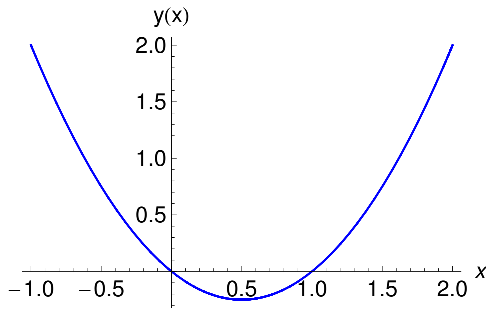
$$y(x) = -x + x^2.$$

■

Παράδειγμα 1.2.3 - 3

Όμοια η

$$y' - y\,\cos x = \cos x, \quad \text{όταν}\ \ y(0) = 1. \tag{7}$$



Σχήμα 1.2.3 - 2: Παράδειγμα 1.2.3 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -x + x^2$, όταν $x \in [-1, 2]$

Λύση ομογενούς. Έστω $y \neq 0$. Όμοια συγκρίνοντας την αντίστοιχη ομογενή

$$y' - y\,\cos x = 0$$

με την $(1.2.3 - 2)$ προκύπτει ότι $f(x) = -\cos x$, οπότε από την $(1.2.3 - 3)$ έχουμε

$$y_h(x) \;=\; c\,e^{-\int f(x)\,dx} = c\,e^{-\int(-\cos x)\,dx} = c\,e^{\sin x},$$

όταν $c \neq 0$. Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της ομογενούς.

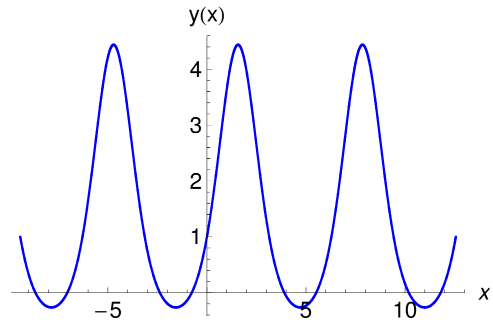
Μη ομογενής

Όμοια από την $(1.2.3 - 4)$ προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x)\,dx = -\int \cos x\,dx = -\sin x$$

και επειδή $r(x) = \cos x$, από την $(1.2.3 - 7)$ έχουμε για τη μερική λύση της μη ομογενούς

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-q(x)}\left[\int r(x)\,e^{q(x)}\,dx\right] = e^{-(-\sin x)}\left[\int \cos x\,e^{-\sin x}\,dx\right] \\ &= e^{\sin x}\int e^{-\sin x}\,d\sin x = -\,e^{\sin x}\left[\int e^{-\sin x}\,d(-\sin x)\right] \\ &= -e^{\sin x}\left[e^{-\sin x}\right] = -e^0 = -1. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.2.3 - 3: Παράδειγμα 1.2.3 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -1 + 2\,e^{\sin x}$, όταν $x \in [-3\pi, 4\pi]$

Άρα σύμφωνα με την $(1.2.3-8)$ η γενική λύση της (7) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -1 + c\,e^{\sin x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{8}$$

Επειδή από την (7) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 1$, η μερική λύση θα προκύψει από την (8) θέτοντας $x = 0$. Άρα $1 = y(0) = -1 + c\,e^0$, οπότε $c = 2$ και η μερική λύση της (7) θα είναι (Σχ. 1.2.3 - 3)

$$y(x) = -1 + 2\,e^{\sin x}.$$

Η μελέτη της περιοδικότητας ή μη της μερικής λύσης αφήνεται σαν άσκηση. ■

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις[5]

$i)$ $y' + 2xy = -x^3 + x;\ y(0) = -1$ $\quad iii)$ $y' + \dfrac{y}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2};\ y(0) = 0$

$ii)$ $y'\cos x - y\sin x = \sin x;\ y(0) = 0$ $\quad iv)$ $xy' - y = x^2\cos x;\ y\left(\pi/2\right) = 0.$

[5]**Λύση.** $(i)\, y(x) = 1/2\left(2 - x^2\right) + c\,e^{-x^2}$, μερική: $c = -1/2$, $(ii)\, y(x) = -1 + 1/\cos x$, μερική: $c = 1$, $(iii)\, y(x) = 1 + c\,\exp\left(-\tan^{-1} x\right)$, μερική: $c = -1$, $(iv)\, y(x) = c\,x + x\,\sin x$, μερική: $c = -1$.

1.2.4 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Από τον Ορισμό 1.1.1 - 6 προκύπτει ότι η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωσης 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$\mathbf{y' + a\,y = r(x)}, \tag{1.2.4 - 1}$$

όταν α σταθερά, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και αντίστοιχη **ομογενή** την

$$\mathbf{y' + a\,y = 0}. \tag{1.2.4 - 2}$$

Έστω $y \neq 0$. Σύμφωνα με την $(1.1.1 - 11)$ αντικαθιστώντας στην $(1.2.4 - 2)$ $y = e^{\lambda x}$ με λ σταθερά προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι

$$\lambda + a = 0 \quad \text{με ρίζα} \quad \lambda = -a. \tag{1.2.4 - 3}$$

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$\mathbf{y_h = c\,e^{-ax}}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{1.2.4 - 4}$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(1.2.4 - 2)$.

Επειδή

$$f(x) = a, \quad \text{οπότε} \quad q(x) = \int f(x)\,dx = ax,$$

σύμφωνα με την $(1.2.3 - 4)$ η μερική λύση y_p της μη ομογενούς θα είναι

$$\mathbf{y_p(x) = e^{-ax}\left[\int e^{ax}\,r(x)\,dx\right]}. \tag{1.2.4 - 5}$$

Τότε από το Θεώρημα 1.1.1 - 1 προκύπτει ότι η γενική λύση της $(1.2.4 - 1)$ είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \qquad (1.2.4 - 6)\\ &= e^{-\alpha x}\left[\int e^{ax}\,r(x)\,dx + c\right] \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (a, b)$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Παράδειγμα 1.2.4 - 1

Να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = e^{-3x} \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{1}$$

Λύση ομογενούς. Η αντίστοιχη ομογενής της (1) είναι η

$$y' + 2y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την $(1.2.4-3)$ η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 2 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -2$. Άρα από την $(1.2.4-4)$ προκύπτει ότι η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c\,e^{-2x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0, \tag{2}$$

όταν προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = a = 2$ και $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με την $(1.2.4-5)$ η μερική λύση y_p της (1) είναι

$$y_p(x) = e^{-2x} \int e^{2x}\, e^{-3x}\, dx = e^{-2x} \overbrace{\int e^{-x}\, dx}^{-e^{-x}} = -e^{-3x}. \tag{3}$$

Επομένως από την $(1.2.4-6)$ και τις (2), (3) η γενική λύση της (1) προκύπτει ότι είναι η

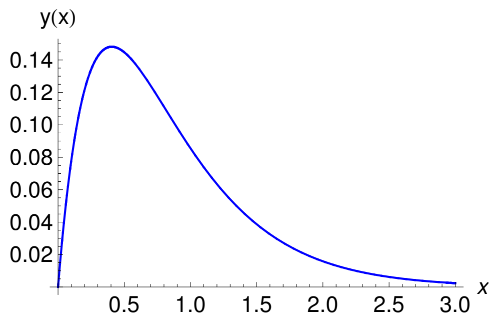
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -e^{-3x} + c\,e^{-2x} \tag{4}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (1) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (4) θέτοντας $x = 0$. Άρα $0 = y(0) = -1 + c$, οπότε $c = 1$ και η μερική λύση της (1) θα είναι (Σχ. 1.2.4 - 1)

$$y(x) = e^{-3x}\left(-1 + e^{x}\right).$$

■



Σχήμα 1.2.4 - 1: Παράδειγμα 1.2.4 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-3x}\,(-1+e^{x})$, όταν $x \in [0,3]$

Παράδειγμα 1.2.4 - 2

Να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + y = e^{-x} \quad \text{όταν} \quad y(0) = -1. \tag{5}$$

Λύση ομογενούς. Η αντίστοιχη ομογενής της (5) είναι η

$$y' + y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την (1.2.4−3) η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 1 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1$. Άρα όμοια η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c\,e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0, \tag{6}$$

όταν η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.

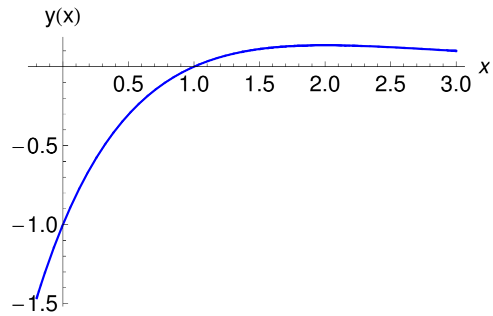
Μη ομογενής

Είναι $f(x) = a = 1$ και $r(x) = e^{-x}$, οπότε σύμφωνα με την $(1.2.4-5)$ η μερική λύση y_p της (5) είναι

$$y_p(x) = e^{-x} \int e^{x}\, e^{-x}\, dx = e^{-x} \int dx = x\, e^{-x}. \tag{7}$$

Επομένως από την $(1.2.4-6)$ και τις (6), (7) προκύπτει ότι η γενική λύση της (5) είναι η

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\,(x + c) \tag{8}$$



Σχήμα 1.2.4 - 2: Παράδειγμα 1.2.4 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x}\,(-1+x)$, όταν $x \in [-0.2, 3]$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή σύμφωνα με την (5) η αρχική τιμή είναι $y(0) = -1$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (8) θέτοντας $x = 0$. Άρα $-1 = y(0) = 1(0 + c)$, οπότε $c = -1$ και η μερική λύση της (5) θα είναι (Σχ. 1.2.4 - 2)

$$y(x) = e^{-x}\,(-1+x)\,.$$

■

Παράδειγμα 1.2.4 - 3

΄Ομοια να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \sin 2x, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{9}$$

Λύση ομογενούς. Η αντίστοιχη ομογενής της (9) είναι $y' + y = 0$, οπότε όμοια με την $(1.2.4 - 3)$ η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 1 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c\,e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{10}$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = a = 1$ και $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με την $(1.2.4-5)$ η μερική λύση y_p της (9) είναι[6]

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x}\left[\int e^{x}\,\sin 2x\,dx\right] = e^{-x}\left[\frac{e^{x}}{5}\,(-2\cos 2x+\sin 2x)\right] \\ &= \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x+\sin 2x)\ . \end{aligned} \tag{11}$$

Επομένως από την $(1.2.4-6)$ και τις (10), (11) η γενική λύση της (9) προκύπτει ότι είναι η

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x+\sin 2x) \tag{12}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (9) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (12) θέτοντας $x = 0$. Άρα $0 = y(0) = c + \frac{1}{5}(-2+0)$, οπότε $c = \frac{2}{5}$ και η μερική λύση της (9) θα είναι (Σχ. 1.2.4 - 3)

$$y(x) = \frac{2}{5}\,e^{-x} + \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x+\sin 2x)\,. \tag{13}$$

Από τη λύση (13) προκύπτουν τα εξής:

i) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$,

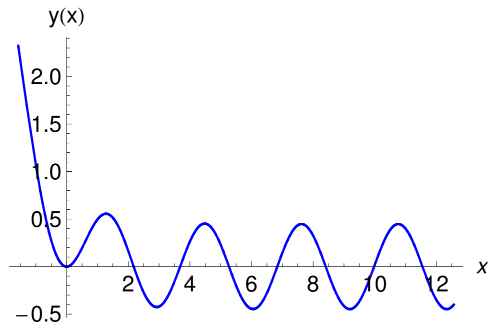
ii) όταν $x \geq \pi$, ο όρος e^{-x} πρακτικά μηδενίζεται, οπότε η λύση γράφεται

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x-\sin 2x) = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{5}\sin(2x+\phi) \\ &\approx 0.45\sin(2x+\phi), \quad \text{όταν} \quad \phi = \arctan(-2) \approx -1.107\,\mathrm{rad}, \end{aligned}$$

δηλαδή εκτελεί μια αμείωτη περιοδική ταλάντωση πλάτους 0.45.

■

[6]**Παραγοντική ολοκλήρωση**: γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση, οπότε εφαρμόζεται δύο φορές η παραγοντική ολοκλήρωση (βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 7).



Σχήμα 1.2.4 - 3: Παράδειγμα 1.2.4 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = \frac{2}{5}\,e^{-x} + \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)$, όταν $x \in [-\pi/2, 4\pi]$

1.2.5 Εφαρμογές από τον Ηλεκτρισμό

Εφαρμογή 1.2.5 - 1 (φόρτιση πυκνωτή)

Έστω πυκνωτής χωρητικότητας C που πρόκειται να φορτιστεί με τη βοήθεια πηγής σταθερής ΗΕΔ E δια μέσου ωμικής αντίστασης R. Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, δεχόμαστε ότι ο πυκνωτής είναι κενός, δηλαδή $q_0 = q(0) = 0$ (αρχική συνθήκη). Κλείνοντας το διακόπτη στο κύκλωμα υπάρχουν δύο ΗΕΔ, που είναι η της πηγής E και αυτής που επικρατεί στους οπλισμούς του πυκνωτή. Εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε $E - q/C = iR$, που επειδή $i = dq/dt = q'(t)$, τελικά γράφεται

$$q' + \frac{1}{RC}\,q = \frac{E}{R}\,. \qquad (1.2.5 - 1)$$

Η $(1.2.5{-}1)$ είναι μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές με αντίστοιχη ομογενή την

$$q' + \frac{1}{RC}\,q = 0. \qquad (1.2.5 - 2)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $(1.2.5 - 2)$ είναι η $\lambda + 1/RC = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1/RC$. Τότε η γενική λύση της $(1.2.5 - 1)$ σύμφωνα με την $(1.2.4 - 4)$ είναι

$$q(t) = E + ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Αλλά $q_0 = 0$, οπότε $k = -CE$. Άρα η μερική λύση της είναι

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \qquad (1.2.5 - 3)$$

Εφαρμογή 1.2.5 - 2 (κύκλωμα RL)

Όμοια εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε

$$\frac{d\,i}{dt} + \frac{R}{L}\,i = \frac{E}{L}\,, \qquad (1.2.5 - 4)$$

οπότε η γενική της λύση υπολογίζεται ότι είναι

$$i = \frac{E}{R} + c\,e^{-\frac{R}{L}\,t}.$$

Αν $i(0) = i_0$, η μερική λύση της $(1.2.5 - 4)$ θα είναι

$$i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)\,e^{-\frac{R}{L}\,t}. \qquad (1.2.5 - 5)$$

Ο τελευταίος όρος στην $(1.2.5 - 5)$ μηδενίζεται, όταν ο χρόνος t απειρίζεται, οπότε στην περίπτωση αυτή εύκολα προκύπτει ότι $i_{\max} = E/R$.

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις[7]

$i)$	$y' + y = x;\ y(0) = -1$	$v)$	$y' + 3y = e^{-x}\,\sin 2x;\ y(0) = 0$
$ii)$	$y' + 4y = e^{-3x};\ y(0) = 0$	$vi)$	$y' + y = \sin^2 x;\ y(0) = -1$
$iii)$	$y' + y = x\,e^{-x};\ y(0) = 0$	$vii)$	$y' + 4y = 1 - \sinh x;\ y(0) = 0$
$iv)$	$y' + y = \sin 2x;\ y(0) = 0$	$viii)$	$y' + y = \sin x\,\cos 2x;\ y(0) = 0.$

[8]

[7] **Λύση.** $(i)\,y(x) = -1 + x + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$, $(ii)\,y(x) = e^{-3x} + c\,e^{-4x}$, μερική: $c = -1$, $(iii)\,y(x) = \frac{1}{2}\,x^2 e^{-x} + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$, $(iv)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)$, μερική: $c = \frac{2}{5}$, $(v)\,y(x) = c\,e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{13}\,(-3\cos 3x + 2\sin 3x)$, μερική: $c = -\frac{1}{13}$, $(vi)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{10}\,(5 - \cos 2x - \sin 2x)$, μερική: $c = -\frac{14}{10}$, $(vii)\,y(x) = c\,e^{-4x} - \frac{1}{60}\,\left(10 - 15e^{x} + 6e^{2x}\right)$, μερική: $c = -\frac{19}{60}$, $(viii)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{20}\,(5\cos x - 3\cos 3x - 5\sin x + \sin 3x)$, μερική: $c = -\frac{1}{10}$.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Bronson, R. (1978), Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική, ISBN 978–000–761–014–3.

[4] Αθανασιάδη, Α. (1997), Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Διόσκουροι, ISBN 960–650–00–4.

[5] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[6] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων