Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά II

Ενότητα 3: Μετασχηματισμός Laplace

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 3

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

3.1 Μετασχηματισμός Laplace

3.1.1 Ορισμός

Ορισμός 3.1.1 - 1 (ορισμός μετασχηματισμού). *Έστω $f(t)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[0, +\infty]$ και $\sigma > 0$ σταθερά. Τότε ορίζεται σαν μετασχηματισμός Laplace της f και συμβολίζεται με $\mathcal{L}[f(t)]$ ή συντομότερα $\mathcal{L}(f)$, η συνάρτηση που ορίζεται από την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος του 1ου είδους*[1]

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \mu\varepsilon \quad s \geq \sigma, \tag{3.1.1 - 1}$$

όταν το ολοκλήρωμα υπάρχει. Η παράμετρος s είναι δυνατόν να είναι και μιγαδικός αριθμός, αν υποτεθεί ότι $Re(s) \geq 0$.

Ο αρχικός μετασχηματισμός χρησιμοποιήθηκε από τον Laplace για την επίλυση ενός προβλήματος στις πιθανότητες. Χρησιμοποιείται στη λύση διαφορικών εξισώσεων, στη φυσική και τη μηχανική κ.λπ. Στις περιπτώσεις που το

[1] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.
Επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform*

πρόβλημα εξαρτάται από το χρόνο, ο μετασχηματισμός το ανάγει από το *πεδίο του χρόνου* στο *πεδίο συχνοτήτων*, όπου η επίλυσή του γενικά γίνεται ευκολότερα.

Στην (3.1.1 − 1) η $f(t)$ λέγεται τότε ο **αντίστροφος μετασχηματισμός** της $F(s)$ και συμβολίζεται με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \qquad (3.1.1 - 2)$$

Στο εξής θα θεωρείται ότι το s είναι πραγματικός αριθμός και θα συμβολίζεται με τα κεφαλαία γράμματα F, X, I κ.λπ. οι μετασχηματισμένες κατά Laplace συναρτήσεις των f, x, i κ.λπ., αντίστοιχα.

3.1.2 Θεώρημα ύπαρξης

Ορισμός 3.1.2 - 1. *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ θα λέγεται* **κατά τμήματα συνεχής** *(Σχ. 3.1.2 - 1), όταν είναι ορισμένη για κάθε $t \in [a, b]$ και υποδιαιρώντας το διάστημα $[a, b]$ σε ν το πλήθος υποδιαστήματα της μορφής (a_k, b_k); $k = 1, 2, \ldots, \nu$ το όριό της στα άκρα του διαστήματος (a_k, b_k) είναι πεπερασμένο για κάθε $k = 1, 2, \ldots, \nu$.*

Ο ορισμός αυτός εύκολα γενικεύεται για την περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

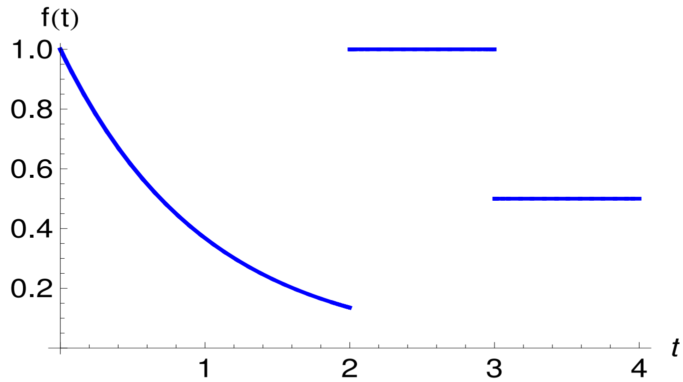
Ορισμός 3.1.2 - 2. *Μια συνάρτηση $f(t)$ λέγεται* **συνάρτηση εκθετικής τάξης** *(function of exponential order), όταν υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με t_0, $M > 0$, έτσι ώστε*

$$|f(t)| < M\, e^{\gamma t} \quad \text{για κάθε} \quad t > t_0. \qquad (3.1.2 - 1)$$

Τότε το γ ορίζει την τάξη της f.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η συνθήκη που πρέπει να ισχύει, έτσι ώστε να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 3.1.2 - 1 (ύπαρξης του μετασχηματισμού). *Έστω η συνάρτηση $f(t)$ που είναι ορισμένη για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν η f είναι*



Σχήμα 3.1.2 - 1: συνάρτηση $f(t)$ συνεχής για κάθε $t \in [0,2) \cup (2,3) \cup (3,4)$, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια στα σημεία $t = 2, 3$ με $\lim_{t \to 2-0} e^{-t} = e^{-1}$, $\lim_{t \to 2+0} f(t) = 1$, $\lim_{t \to 3-0} f(t) = 1$ και $\lim_{t \to 3+0} f(t) = 0.5$.

i) κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$ *όπου* $\alpha > 0$,

ii) εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν σταθερές γ, t_0 *και* M *με* t_0, $M > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t \in [0, +\infty), \tag{3.1.2 - 2}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ *υπάρχει για κάθε* $s > \gamma$.

Η απαίτηση της κατά τμήματα συνεχούς συνάρτησης και η ισχύς της $(3.1.2 - 2)$ ορίζουν τις **συνθήκες Dirichlet**. Το σύνολο των συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet, δηλαδή των συναρτήσεων που υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, θα συμβολίζεται στο εξής με $D_{\mathcal{L}}$.

Δίνονται στη συνέχεια οι μετασχηματισμοί Laplace ορισμένων συναρτήσεων με τον Ορισμό 3.1.1 - 1.

Παράδειγμα 3.1.2 - 1

Έστω $f(t) = A$ όπου A σταθερά. Τότε[2]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_0^{+\infty} A e^{-st} dt = -\frac{A}{s} \lim_{x+\infty} e^{-st}\Big|_0^x \\ &= -\frac{A}{s}\left(\lim_{x+\infty} e^{-sx} - e^0\right) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}(A) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \tag{3.1.2 - 3}$$

Παράδειγμα 3.1.2 - 2

Όμοια, έστω $f(t) = e^{-at}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[e^{-at}\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}\, dt \\ &= -\frac{1}{s+a} \lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)t}\Big|_0^x = -\frac{1}{s+a}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)x} - e^0\right] \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \text{όταν} \quad s+a > 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a} \quad \text{με} \quad s+a > 0. \tag{3.1.2 - 4}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}\left[e^{3t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{-(-3)\,t}\right] = \frac{1}{s+3} \quad \text{με} \quad s+3 > 0.$$

3.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που με τη χρήση τους υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί των διαφόρων συναρτήσεων[3].

---

[2] Η συνάρτηση e^x ορίζεται για κάθε $x \in \Re$, ενώ ισχύει: $\lim_{x \to -\infty} = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$.

[3] Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύεται στη συνέχεια του μαθήματος ότι ισχύουν επίσης και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Θεώρημα 3.1.3 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω* $f, g \in D_{\mathcal{L}}$. *Τότε αν* $\kappa, \lambda \in \Re$ *ισχύει*

$$\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa \mathcal{L}[f(t)] + \lambda \mathcal{L}[g(t)]. \tag{3.1.3 - 1}$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται για ν-το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 3.1.3 - 1

Είναι γνωστό ότι αν $f(t) = \sin t$, τότε $\sin t = \left(e^{it} - e^{-it}\right)/2i$ όπου i η φανταστική μονάδα. Σύμφωνα με τον τύπο $(3.1.2 - 4)$ και τη γραμμική ιδιότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin t) &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{it}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{-(-\mathbf{i})\,t}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s+(-i)} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2+1}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}. \tag{3.1.3 - 2}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}(\cos t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{it} + e^{-it}\right] = \frac{s}{s^2+1} \tag{3.1.3 - 3}$$

και

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at} - e^{-at}\right] = \frac{s}{s^2-a^2}, \tag{3.1.3 - 4}$$

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at} + e^{-at}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}, \tag{3.1.3 - 5}$$

όταν $s > a > 0$.

Θεώρημα 3.1.3 - 2. *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *με* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, *τότε*

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right) \quad \text{με} \quad k > 0. \tag{3.1.3 - 6}$$

Παράδειγμα 3.1.3 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 2 και τον τύπο (3.2.2 − 2) είναι

$$\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,, \tag{3.1.3 - 7}$$

$$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{με} \quad \omega > 0. \tag{3.1.3 - 8}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2+4}\,, \quad \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}\,, \quad \text{κ.λπ.}$$

Θεώρημα 3.1.3 - 3 (προπορείας). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a), \quad \textit{όταν} \quad s+a>0 \ \textit{και} \ a>0. \tag{3.1.3 - 9}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 3 και τους τύπους (3.1.3 − 7) - (3.1.3 − 8) είναι:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\cos\omega t\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\,, \tag{3.1.3 - 10}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\,. \tag{3.1.3 - 11}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos 2t\right] &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}\,,\\
\mathcal{L}\left[e^{3t}\sin 2t\right] &= \mathcal{L}\left[e^{-(-\mathbf{3})\,t}\sin 2t\right] = \frac{2}{[s+(-3)]^2+2^2}\\
&= \frac{2}{s^2-6s+13}\,,\\
\mathcal{L}\left[e^{t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \mathcal{L}\left[e^{t}\left(\sin 2t\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{t}\sin 2t\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{t}\cos 2t\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{-(-\mathbf{t})}\sin 2t\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{-(-\mathbf{t})}\cos 2t\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2+2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s+1}{s^2-2s+5}\,.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 3.1.3 - 4. *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *με* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, *τότε*

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d\,F(s)}{ds} = -F'(s).$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά n φορές το Θεώρημα 3.1.3 - 4, τελικά προκύπτει

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n\,\frac{d^n\,F(s)}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s), \tag{3.1.3 - 12}$$

όταν $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

Παράδειγμα 3.1.3 - 3

Σύμφωνα με τον τύπο $(3.1.3-8)$ είναι:

$$\mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2+9}\,.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο $(3.1.3-12)$ για $n = 1,\, 2,$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t\,\sin 3t\right] &= (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\,, \\
\mathcal{L}\left[t^2\,\sin 3t\right] &= (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\right] = \frac{18\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3}\,.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1.3 - 4

Όμοια σύμφωνα με τον τύπο $(3.1.3-8)$ είναι: $\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a}$ με $s+a>0$. Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά τον τύπο $(3.1.3-12)$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t\,e^{-at}\right] &= (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^2\,e^{-at}\right] &= (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = \frac{\overbrace{2}^{2\,!}}{(s+a)^3}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^3\,e^{-at}\right] &= (-1)^3\,\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{2\,!}{(s+a)^3}\right] = \frac{\overbrace{2\cdot 3}^{3\,!}}{(s+a)^4}\,,\\
\vdots\qquad & \quad\vdots\\
\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] &= (-1)^n\,\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{(n-1)\,!}{(s+a)^n}\right] = \frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] = \frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,, \tag{3.1.3 - 13}
$$

όταν $n=0,\,1,\,\ldots$ και $s+a>0$.

Αν στην $(3.1.3-13)$ είναι $a=0$, τότε

$$
\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n\,!}{s^{n+1}}\,, \quad \text{όταν} \quad n=0,\,1,\,\ldots\,. \tag{3.1.3 - 14}
$$

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους $(3.1.3-13)$ και $(3.1.3-14)$ έχουμε

$$
\mathcal{L}\left[t^2\,e^{3t}\right] = \frac{2\,!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3}\,, \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{3\,!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}\,.
$$

Θεώρημα 3.1.3 - 5 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f\in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t\geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$
\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s>a. \tag{3.1.3 - 15}
$$

Εφαρμόζοντας τώρα την (3.1.3 − 15) για τη δεύτερης τάξης παράγωγο της f, υποθέτοντας ότι η f'' είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s\,\mathcal{L}\left[f'(t)\right] - f'(0) = s\left\{s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\right\} - f'(0),$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \tag{3.1.3 - 16}$$

Παράδειγμα 3.1.3 - 5

Έστω $f(t) = t\sin t$. Τότε $f(0) = 0$, ενώ $f'(t) = \sin t + t\cos t$, οπότε $f'(0) = 0$. Άρα σύμφωνα με την $(3.1.3-16)$ και με τύπο $(3.1.3-12)$ για $n = 1$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[t\sin t] - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[t\sin t] = \frac{2s^3}{\left(s^2+1\right)^2}\,.$$

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ με το πρόγραμμα MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB γίνεται με την εντολή:

```
LaplaceTransform[f(t),t,s]
```

αντίστοιχα

```
syms t s
laplace(f(t),t,s)
```

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων $f(t)$: [4, 5]

$i)$	$t^3 - t + 2$	$v)$	$e^{-2t}\cos 3t$
$ii)$	$\sin(2t)$	$vi)$	$t\cos 2t$
$iii)$	$t\sin 2t$	$vii)$	$\sin^2 3t$ (Υπ: $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$)
$iv)$	$t^2\sin 3t$	$viii)$	$\cos^2 2t$ (Υπ: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$).

[4] **Λύση**.

[5] $(i)\ \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$, $(i)\ \frac{2}{4+s^2}$,$(iii)\ \frac{4s}{\left(4+s^2\right)^2}$ $(iv)\ \frac{18\left(-3+s^2\right)}{\left(9+s^2\right)^3}$, $(v)\ \frac{2+s}{13+4s+s^2}$ $(vi)\ \frac{-4+s^2}{\left(4+s^2\right)^2}$, $(vii)\ \frac{18}{36s+s^3}$, $(viii)\ \frac{8+s^2}{16s+s^3}$.

2. Όμοια των συναρτήσεων[6, 7]

$i)$	$t\,e^{-t}\cos t$	$v)$	$t\,e^{-t}\sin 2t$
$ii)$	$t\,e^{-t}\cos\omega t$	$vi)$	$t^2\,e^{-2t}$
$iii)$	$t^3 e^{-2t}$	$vii)$	$t\,e^{-t}\sin\omega t$.

3.2 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

3.2.1 Ορισμός και βασικό θεώρημα

Από το Θεώρημα 3.1.2 - 1 προκύπτουν:

Παρατηρήσεις 3.2.1 - 1

i) αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής ή τμηματικά συνεχής στο $[0,+\infty)$ και εκθετικής τάξης, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$.

ii) Έστω ότι $f(t)$, $g(t)$ δύο συνατήσεις ορισμένες στο $[0,+\infty)$. Τότε, αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ και αν η συνάρτηση $g(t)$ διαφέρει από τη $f(t)$ σε πεπερασμένο μόνο πλήθος σημείων του $[0,+\infty)$, τότε υπάρχει και ο μετασχηματισμός Laplace της $g(t)$ και ισχύει $\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[g(t)]$, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.1 - 1

Έστω ότι

$$f(t)=e^{-2t} \quad \text{με} \quad \mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{s+3}$$

και

$$g(t)=\begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t=1 \\ e^{-2t} & \text{αν} \quad t\in[0,+\infty)-\{1\}, \end{cases} \qquad \text{με} \quad \mathcal{L}[g(t)]=\frac{1}{s+3}\,,$$

δηλαδή $\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[g(t)]$, ενώ προφανώς $f(t)\neq g(t)$.

---

[6] **Λύση**.

[7] $(i)\ \frac{2s+s^2}{\left(2+2s+s^2\right)^2}$, $(ii)\ \frac{1-\omega^2-2s+s^2}{\left(1+\omega^2-2s+s^2\right)^2}$, $(iii)\ \frac{6}{(2+s)^4}$, $(iv)\ \frac{4(1+s)}{\left(5+2s+s^2\right)^2}$ $(v)\ \frac{2}{(2+s)^3}$, $(vi)\ \frac{2\omega(1+s)}{\left(1+\omega^2+2s+s^2\right)^2}$.

Από την Παρατήρηση 3.2.1 - 1 (ii) προκύπτει ότι, αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f(t)$ της $\mathcal{L}^{-1}F(s)$, τότε η $f(t)$ δεν είναι πάντοτε μονοσήμαντα ορισμένη.

Το μονοσήμαντο του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{L}^{-1}$ εξασφαλίζεται με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.1 - 1. *Έστω ότι η $f(t)$ είναι μια πραγματική, συνεχής ή τμηματι-κά συνεχής, εκθετικής τάξης συνάρτηση για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν για το μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ ορίζει μονοσήμαντα την $f(t)$.*

Στο εξής θα θεωρείται ότι οι συναρτήσεις πληρούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Θεώρημα 3.2.1 - 1, οπότε η αντίστροφη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace θα είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

3.2.2 Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace ισχύουν ανάλογα και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Οι περισσότερο εφαρμοζόμενες δίνονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.2.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, τότε αν $k, \lambda \in \Re$ ισχύει*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[kF(s) + \lambda G(s)] &= k\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \lambda\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \\ &= kf(t) + \lambda g(t). \end{aligned} \tag{3.2.2 - 1}$$

Παράδειγμα 3.2.2 - 1

Έστω $f(t) = e^{-3t}$ και $g(t) = e^{t}$. Τότε

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\right] = \frac{1}{s+3} = F(s) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left[e^{t}\right] = \frac{1}{s-1} = G(s),$$

οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 1 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[2\,F(s) + 5\,G(s)] = 2\,\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + 5\,\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 2\,e^{-3t} + 5\,e^{t}.$$

Θεώρημα 3.2.2 - 2. *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \quad \mu\varepsilon \quad k > 0. \tag{3.2.2 - 2}$$

Παράδειγμα 3.2.2 - 2

Έστω

$$f(t) = \cos 4t, \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2+16} = F(s).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 2, όταν $k = 2$, έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F(\mathbf{2}s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{2}s}{(\mathbf{2}s)^2+16}\right] = \frac{1}{\mathbf{2}}\cos\left(4\frac{t}{\mathbf{2}}\right) = \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Θεώρημα 3.2.2 - 3 (προπορείας). *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] = e^{-at} f(t), \quad \text{όταν} \quad s + a > 0 \ \text{και} \ a > 0. \tag{3.2.2 - 3}$$

Παράδειγμα 3.2.2 - 3

Έστω

$$f(t) = \sin 2t, \quad \text{οπότε} \quad F(s) = \frac{2}{s^2+4}.$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 3 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+4}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+\underbrace{(-1)}_{a=-1})^2+4}\right] \\ &= e^{-(-1)\,t}\sin 2t = e^t \sin 2t. \end{aligned}$$

Πίνακας 3.2.3 - 1: των κυριότερων μετασχηματισμών Laplace

α/α	$f(t)$	$F(s)$	α/α	$f(t)$	$F(s)$
1	A	$\dfrac{A}{s}$	5	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	6	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
3	$t^n;\ n=1,\,2,\,\ldots$	$\dfrac{n\,!}{s^{n+1}}$	7	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
4	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	8	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$

3.2.3 Μέθοδοι υπολογισμού

Δίνονται τώρα οι σημαντικότερες μέθοδοι προσδιορισμού της αντίστροφης συνάρτησης για μορφές της $F(s)$, που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Με αναφορά στον Πίνακα 3.2.3 - 1

Παράδειγμα 3.2.3 - 1

Έστω

$$F(s)=\frac{1}{s^3}$$

που για ευκολία γράφεται και

$$F(s)=\frac{1}{s^{2+1}}=\frac{1}{2\,!}\,\frac{2\,!}{s^{2+1}}\,.$$

Τότε η $F(s)$ σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 3.2.3 - 1 και τη γραμμική ιδιότητα 3.2.2 - 1 δίνει σαν αντίστροφη συνάρτηση την

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{t^2}{2}\,.$$

Παράδειγμα 3.2.3 - 2

Έστω

$$F(s) = \frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{s^2+2^2}\,.$$

Όμοια με τον τύπο 4 του Πίνακα 3.2.3 - 1 είναι

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sin 2t.$$

Παράδειγμα 3.2.3 - 3

Έστω

$$F(s) = \frac{5}{s^2+2s+37}$$

που γράφεται και

$$F(s) = \frac{5}{6}\,\frac{6}{(s+\underbrace{1}_{a=1})^2+(\underbrace{6}_{\omega=6})^2}\,.$$

Τότε ο τύπος 5 του Πίνακα 3.2.3 - 1 δίνει σαν αντίστροφη συνάρτηση, την

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{5}{6}\,e^{-t}\sin 6t.$$

Σημειώσεις 3.2.3 - 1

i) Όταν στον παρονομαστή υπάρχει σαν παράγοντας τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές ($\Delta<0$) ή ειδική περίπτωση φανταστικές, τότε ο παρανομαστής μετασχηματίζεται σε άθροισμα τετραγώνων σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}\,. \tag{3.2.3 - 1}$$

ii) Η περίπτωση (i) εφαρμόζεται μόνον, όταν ο αριθμητής είναι βαθμού μικρότερου του παρονομαστή.

Παράδειγμα 3.2.3 - 4

Έστω

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+4s+5}\,.$$

Επειδή η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι $\Delta = 4^2 - 20 = -6 < 0$ σύμφωνα με τη Σημείωση 3.2.3 - 1 (i) ο παρονομαστής γράφεται:

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1^2.$$

Στη συνέχεια δημιουργείται στον αριθμητή το $s+2$ ως εξής:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s+1}{s^2+4s+5} = \frac{2s+1}{(s+2)^2+1^2} = \frac{2s+4-4+1}{(s+2)^2+1^2} \\ &= \frac{2s+4\overbrace{-4+1}^{-3}}{(s+2)^2+1^2} = 2\,\frac{s+2}{(s+2)^2+1^2} - 3\,\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\,. \end{aligned}$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι συνδυασμός των τύπων 5 και 7 του Πίνακα 3.2.3 - 1, δηλαδή

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\,e^{-2t}\cos 2t - 3\,e^{-2t}\sin t = e^{-2t}\,(2\cos 2t - 3\sin t)\,.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων $F(s)$[8]

$i)$	$\dfrac{2}{s^4}$	$vii)$	$\dfrac{6}{(s+1)^4}$
$ii)$	$\dfrac{1}{(s+3)^2}$	$viii)$	$\dfrac{1}{9s^2+4}$
$iii)$	$\dfrac{2(s+2)}{s^2+4}$	$ix)$	$\dfrac{s-1}{4s^2+9}$
$iv)$	$\dfrac{s-1}{s^2-9}$	$x)$	$\dfrac{1}{s^2+4s+4}$
$v)$	$\dfrac{1}{s^2+8s+17}$	$xi)$	$\dfrac{4s+1}{s^2+2s+1}$
$vi)$	$\dfrac{s}{s^2-2s+1}$	$xii)$	$\dfrac{s}{s^2+s+1}\,.$

[8] **Λύση.** $(i)\ \frac{t^3}{3}$, $(ii)\ t\,e^{-3t}$, $(iii)\ 2(\cos 2t + \sin 2t)$, $(iv)\ \frac{2e^{-3t}}{3} + \frac{e^{3t}}{3}$, $(v)\ e^{-4t}\sin t$, $(vi)\ e^t(1+t)$, $(vii)\ t^3e^{-t}$, $(viii)\ \frac{1}{6}\sin\left(\frac{2t}{3}\right)$, $(ix)\ \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$, $(x)\ t\,e^{-2t}$, $(xi)\ (4-3\,t)\,e^{-t}$, $(xii)\ -\frac{1}{3}e^{-t/2}\left[-3\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$.

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα

Θα εξεταστεί μόνον η περίπτωση όπου η συνάρτηση $F(s)$ είναι ρητή, δηλαδή είναι της μορφής

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

όταν $P(s)$ και $Q(s)$ είναι ακέραια πολυώνυμα του s και ο βαθμός του πολυωνύμου $P(s)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του πολυωνύμου $Q(s)$. Τότε η συνάρτηση $F(s)$ αναλύεται κατά τα γνωστά σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Παράδειγμα 3.2.3 - 5

Έστω

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

με ρίζες του παρονομαστή τις -1 και -2. Τότε

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $(s+1)(s+2)$, έχουμε

$$s-1 = (A+B)s + (A+2B).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του s, προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 1 \\ A & + & 2B & = & -1, \end{array}\right\} \quad \text{οπότε} \quad A = 3 \ \text{ και } \ B = -2.$$

Τότε

$$F(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}\,.$$

Άρα

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 3e^{-2t} - 2e^{-t}.$$

Παράδειγμα 3.2.3 - 6

Όμοια, έστω

$$F(s) = \frac{1}{s\,(s^2+9)}\,.$$

Θέτοντας

$$\frac{1}{s\left(s^2+9\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+9}$$

και σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, τελικά προκύπτει

$$F(s)=\frac{1}{9}\frac{1}{s}-\frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}\,,$$

οπότε

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos 3t.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η συνάρτηση $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, όταν η $F(s)$ είναι ίση με[9, 10]

$i)\quad \dfrac{1}{s\left(s^2-4\right)}$

$ii)\quad \dfrac{1}{s^3-s}$

$iii)\quad \dfrac{1}{s\left(s^2-4s+4\right)}$

$iv)\quad \dfrac{1}{s\left(s^2+\pi^2\right)}$

$v)\quad \dfrac{1}{s^3+8}$

$vi)\quad \dfrac{s}{s^4-1}$

$vii)\quad \dfrac{s+1}{s^3-1}$

$viii)\quad \dfrac{s}{(s+2)\left(s^2+1\right)}\,.$

3.3 Εφαρμογές στη λύση Διαφορικών Εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή δίνεται **ενδεικτικά** μια εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στη λύση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές 1ης και 2ης τάξης. Περισσότερες εφαρμογές θα δοθούν σε άλλα εξάμηνα.

3.3.1 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωσης 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

[9] **Λύση**.

[10] $(i)\ -\frac{1}{4}+\frac{e^{-2t}}{8}+\frac{e^{2t}}{8}\,,\ (ii)\ -1+\frac{e^{-t}}{2}+\frac{e^{t}}{2}\,,\ (iii)\ \frac{1}{4}-\frac{e^{2t}}{4}+\frac{1}{2}\,t\,e^{2t}\,,\ (iv)\ \frac{1}{\pi^2}-\frac{\cos\pi t}{\pi^2}\,,$ $(v)\ \frac{e^{-2t}}{12}-\frac{1}{12}\,e^{t}\,\cos\left(\sqrt{3}t\right)+\frac{e^{t}\,\sin\left(\sqrt{3}t\right)}{4\sqrt{3}}\ \ (vi)\ \frac{e^{-t}}{4}+\frac{e^{t}}{4}-\frac{\cos t}{2}\,,\ (vii)\ \frac{2\,e^{t}}{3}-\frac{2}{3}\,e^{-t/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right),$ $(viii)\ -\frac{2}{5}\,e^{-2t}+\frac{2\cos t}{5}+\frac{\sin t}{5}.$

$$\mathbf{y' + a\,y = r(x)}, \tag{3.3.1 - 1}$$

όταν α σταθερά, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$. Η αντίστοιχη **ομογενής** είναι

$$\mathbf{y' + a\,y = 0}. \tag{3.3.1 - 2}$$

Έστω ότι οι συναρτήσεις $y, r \in D_{\mathcal{L}}$ και ορίζονται για κάθε $x \geq 0$. Θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της μη ομογενούς εξίσωσης $(3.3.1-1)$ έχουμε $\mathcal{L}\,(y' + ay) = \mathcal{L}[r(x)]$, που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες του μετασχη-ματισμού Laplace[11] γράφεται

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + \alpha\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}[r(x)].$$

Θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0$ αρχική συνθήκη και λύνοντας αλγεβρικά ως προς $Y(s)$, τελικά έχουμε τον παρακάτω τύπο υπολογισμού της μετασχηματισμένης συνάρτησης $Y(s)$ της μερικής λύσης της $(3.3.1-1)$

$$\mathbf{Y(s) = \frac{\mathcal{L}[r(x)]}{s+a} + \frac{y_0}{s+a}} \quad \text{με} \quad s + a > 0. \tag{3.3.1 - 3}$$

Τότε από από την $(3.3.1-3)$ προκύπτει η μερική λύση της $(3.3.1-1)$ ως εξής:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)].$$

Παρατηρήσεις 3.3.1 - 1

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace:

---

[11] Βλέπε Παράγραφος 1.1.3

Θεώρημα 1.1.3-1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω $f, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $\kappa, \lambda \in \Re$ ισχύει*

$$\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)].$$

Θεώρημα 1.1.3-6 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s > a > 0.$$

i) εφαρμόζεται κυρίως, όταν ζητείται η μερική λύση της $(3.3.1-1)$, δηλαδή έχουν δοθεί και οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος ή όταν η είσοδος $r(x)$ είναι περιοδική, μοναδιαία κρούση, κ.λπ.[12],

ii) δεν εφαρμόζεται συνήθως, όταν η $f(x)$ δεν είναι σταθερά και γενικότερα δεν εφαρμόζεται σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου σε σχέση με την αντίστοιχη κλασική μέθοδο είναι ότι η διαφορική εξίσωση λύνεται με αλγεβρικό τρόπο και εισάγονται στη λύση άμεσα, χωρίς να χρειάζεται επί πλέον υπολογισμός, οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα 3.3.1 - 1

Να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = e^{-3x}, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{1}$$

Λύση. Έστω ότι η (1) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 3.2.3 - 1 θα είναι

$$\mathcal{L}\left[e^{-3x}\right] = \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+3 > 0.$$

Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (1). Επειδή σύμφωνα με την (1) είναι $a = 2$, θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = 0$ στην $(3.3.1-3)$ και μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα του δεξιού μέλους, προκύπτει

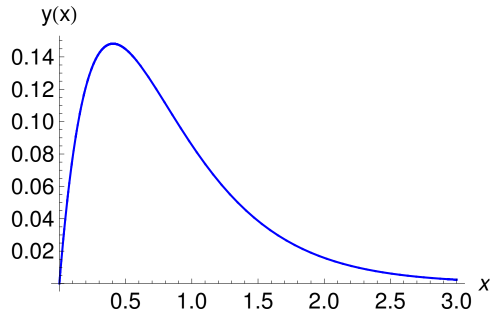
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+3}}{s+2} + \frac{0}{s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+2 > 0. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση είναι (Σχ. 3.3.1 - 1)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2x} - e^{-3x} = e^{-3x}\left(-1 + e^{x}\right).$$

■

[12] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 1.



Σχήμα 3.3.1 - 1: Παράδειγμα 3.3.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-3x}(-1+e^x)$, όταν $x \in [0,3]$

Παράδειγμα 3.3.1 - 2

Να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + y = e^{-x} \quad \text{όταν} \quad y(0) = -1. \tag{2}$$

Λύση. Όμοια υποθέτουμε ότι η (2) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = e^{-x}$, οπότε σύμφωνα με το με τον τύπο 2 του Πίνακα 3.2.3 - 1 θα είναι

$$\mathcal{L}\left[e^{-x}\right] = \frac{1}{s+1}, \quad \text{όταν} \quad s+1 > 0.$$

Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (2). Επειδή σύμφωνα με την (2) είναι $a = 1$, θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = -1$ στην $(3.3.1-3)$ προκύπτει

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{s+1} + \frac{-1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}, \quad \text{όταν} \quad s+1 > 0.$$

Άρα η μερική λύση είναι (Σχ. 3.3.1 - 2)

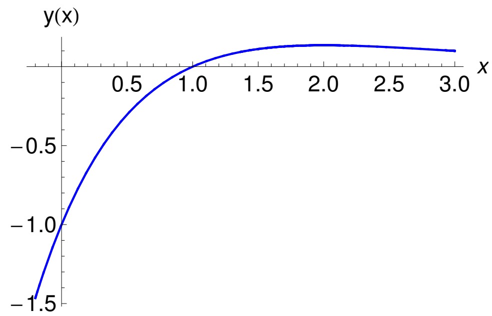
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = x\,e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(-1+x)\,.$$

■

Παράδειγμα 3.3.1 - 3

Όμοια να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \sin 2x, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{3}$$



Σχήμα 3.3.1 - 2: Παράδειγμα 3.3.1 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x}(-1+x)$, όταν $x \in [-0.2, 3]$

Λύση. Όμοια έστω ότι η (3) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 3.2.3 - 1 θα είναι

$$\mathcal{L}[\sin 2x] = \frac{2}{s^2+4}\,.$$

Αν $y(x)$ η μερική λύση της (3), τότε $a = 1$, οπότε θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = 0$ στην $(3.3.1 - 3)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{2}{s^2+4}} = \frac{2}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{2}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\frac{s-1}{s^2+4} \\ &= \frac{2}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{5}\frac{2}{s^2+2^2}\,, \quad \text{όταν} \quad s+1>0. \end{aligned}$$

Άρα όμοια (Σχ. 3.3.1 - 3)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{5}e^{-x} + \frac{1}{5}\left(-2\cos 2x + \sin 2x\right),$$

Από τη λύση προκύπτουν τα εξής:

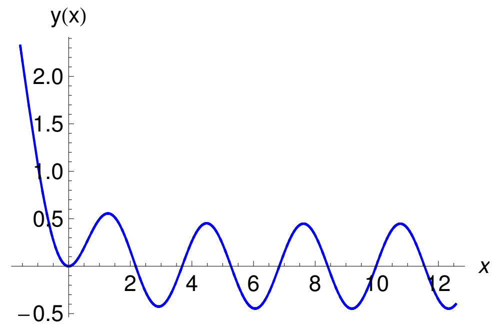
i) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$,

ii) όταν $x \geq \pi$, ο όρος e^{-x} πρακτικά μηδενίζεται, οπότε η λύση γράφεται[13]

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \frac{1}{5}\left(-2\cos 2x - \sin 2x\right) = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{5}\sin(2x+\phi) \\ &\approx 0.45\sin(2x+\phi), \quad \text{όταν} \quad \phi = \arctan(-2) \approx -1.107\,\text{rad}, \end{aligned}$$

δηλαδή εκτελεί μια αμείωτη περιοδική ταλάντωση πλάτους 0.45.

[13] Έστω η παράσταση $\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$. Αν $\beta \neq 0$ και $\tan\varphi = \alpha/\beta$, όπου $-\pi \leq$



Σχήμα 3.3.1 - 3: Παράδειγμα 3.3.1 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)=\frac{2}{5}\,e^{-x}+\frac{1}{5}\,(-2\cos 2x+\sin 2x)$, όταν $x\in[-\pi/3,10\pi]$

■

$\varphi_n<\pi$, χρησιμοποιώντας κατάλληλους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x) &= \beta_n\left[\frac{\alpha}{\beta}\cos(\omega x)+\sin(\omega x)\right]=\beta\left[\tan\varphi\cos(\omega x)+\sin(\omega x)\right]\\
&= \frac{\beta}{\cos\varphi}\left[\sin\varphi_n\cos(n\omega t)+\cos\varphi_n\sin(n\omega t)\right]\\
&= \beta\sqrt{1+\tan^2\varphi}\,\sin\left(\omega x+\varphi\right)\\
&= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sin\left(\omega x+\varphi\right).
\end{aligned}$$

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις[14], [15]

$i)$	$y' + y = x;\ y(0) = -1$	$v)$	$y' + 3y = e^{-x}\,\sin 2x;\ y(0) = 0$
$ii)$	$y' + 4y = e^{-3x};\ y(0) = 0$	$vi)$	$y' + y = \sin^2 x;\ y(0) = -1$
$iii)$	$y' + y = x\,e^{-x};\ y(0) = 0$	$vii)$	$y' + 4y = 1 - \sinh x;\ y(0) = 0$
$iv)$	$y' + y = \sin 2x;\ y(0) = 0$	$viii)$	$y' + y = \sin x\,\cos 2x;\ y(0) = 0.$

3.3.2 Γραμμικές 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Ομογενής γραμμική

Η γενική μορφή της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = 0}, \tag{3.3.2 - 1}$$

όταν a, b σταθερές, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Αν $y \in D_{\mathcal{L}}$, τότε από την $(3.3.2 - 1)$ έχουμε $\mathcal{L}\left[y'' + ay' + b\right] = 0$, που

[14] **Λύση**.

[15] $(i)\, y(x) = -1 + x + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$, $(ii)\, y(x) = e^{-3x} + c\,e^{-4x}$, μερική: $c = -1$, $(iii)\, y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$, $(iv)\, y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{2}\left(-2\cos 2x + \sin 2x\right)$, μερική: $c = \frac{2}{5}$, $(v)\, y(x) = c\,e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{13}\left(-3\cos 3x + 2\sin 3x\right)$, μερική: $c = -\frac{1}{13}$, $(vi)\, y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{10}\left(5 - \cos 2x - \sin 2x\right)$, μερική: $c = -\frac{14}{10}$, $(vii)\, y(x) = c\,e^{-4x} - \frac{1}{60}\left(10 - 15e^{x} + 6e^{2x}\right)$, μερική: $c = -\frac{19}{60}$, $(viii)\, y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{20}\left(5\cos x - 3\cos 3x - 5\sin x + \sin 3x\right)$, μερική: $c = -\frac{1}{10}$.

σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες[16] του μετασχηματισμού Laplace γράφεται

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - {y_0}'(0) + a[s\mathcal{L}(y) - y(0)] + b\mathcal{L}(y) = 0$$

Θέτοντας $\mathcal{L}(y) = Y(s)$ και $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ (αρχικές συνθήκες), η παραπάνω σχέση, αν λυθεί ως προς $Y(s)$, τελικά δίνει

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{\mathbf{(s+a)y_0 + {y_0}'}}{\mathbf{s^2 + as + b}} \qquad (3.3.2 - 2)$$

Τότε η γενική λύση της $(3.3.2-1)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y(x)} = \mathcal{L}^{-\mathbf{1}}[\mathbf{Y(s)}]. \qquad (3.3.2 - 3)$$

Είναι φανερό ότι η γενική λύση $(3.3.2-3)$ εξαρτάται από το είδος των ριζών του παρονομαστή $s^2 + \alpha s + \beta$ στην $(3.3.2-2)$. Οι Παρατηρήσεις 3.3.1 - 1 ισχύουν ανάλογα και στην περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 3.3.2 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 0 \quad \text{και} \quad y_0' = 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(3.3.2-2)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+5)\cdot 0 + 1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{(s+3)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

---

[16] Βλέπε Παράγραφος 1.1.3

Θεώρημα 1.1.3-1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω $f,\, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $\kappa,\, \lambda \in \Re$ ισχύει*

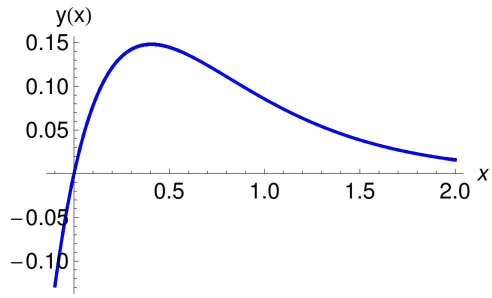
$$\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)].$$

Θεώρημα 1.1.3-6 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s > a > 0,$$

ενώ με τον τύπο $(1.1.3-17)$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0), \quad \text{όταν} \quad s > a > 0.$$



Σχήμα 3.3.2 - 1: Παράδειγμα 3.3.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$, όταν $x \in [-0.1, 2]$.

Άρα (Σχ. 3.3.2 - 1)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -e^{-3x} + e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή σαν **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**. ■

Παράδειγμα 3.3.2 - 2

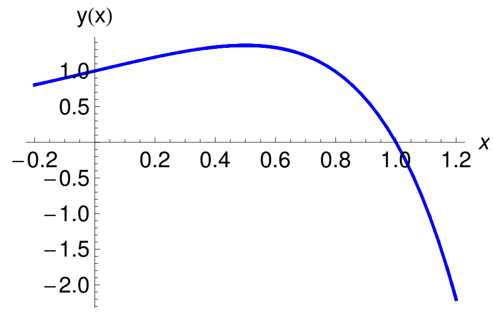
Όμοια η εξίσωση

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(3.3.2 - 2)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s-4)\cdot 1 + 1}{s^2 - 4s + 4} \\ &= \frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} \\ &= \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \left(\frac{1}{s-2}\right)' \\ &= \frac{1}{s-2} - (-1)^1 \left(\frac{1}{s-2}\right)'. \end{aligned}$$

Επειδή σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace ισχύει ότι, αν $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$, τότε $\mathcal{L}[x\, f(x)] = (-1)^1 F'(s)$, από την παραπάνω



Σχήμα 3.3.2 - 2: Παράδειγμα 3.3.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-2x}(1-x)$, όταν $x \in [-0.2, 1.2]$

σχέση προκύπτει τελικά ότι (Σχ. 3.3.2 - 2)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{2x}(1-x).$$

Η λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, η $y_h(x) = 0$, όταν $x_0 = 1$. Τότε το x_0 είναι το σημείο στατικής ισορροπίας.
■

Παράδειγμα 3.3.2 - 3

Όμοια η εξίσωση

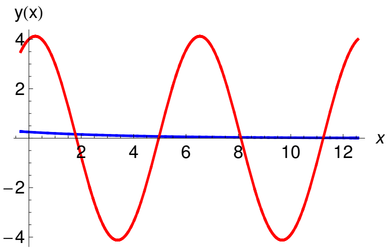
$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y'_0 = 0.$$

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

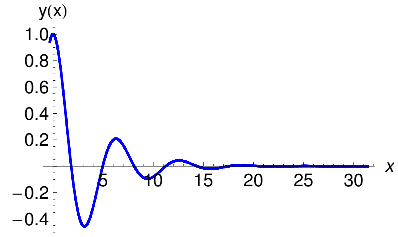
$$y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{17}{16}y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την $(3.3.2-2)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+\frac{1}{2})\cdot 1 + 0}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{17}{16}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2 + 2\,\frac{1}{4}s + \frac{16+1}{16}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2 + 2\,\frac{1}{4}s + \frac{1}{16} + 1} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1} = \frac{s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{s+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2}. \end{aligned}$$



(a)



(b)

Σχήμα 3.3.2 - 3: Παράδειγμα 3.3.2 - 2, όταν $x \in [-\pi/10, 4\pi]$:(a) το διάγραμμα της $\frac{1}{4}\,e^{-x/4}$ μπλε (απόσβεση) και της $4\cos x + \sin x$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = \frac{1}{4}\,e^{-x/4}(4\,\cos x + \sin x)$. Η απόσβεση προκαλεί τελικά το μηδενισμό της μερικής λύσης

Άρα σύμφωνα με τους τύπους 5 και 7 του Πίνακα 2.2-1 είναι (Σχ. 3.3.2 - 3)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-x/4}\,\cos x + \frac{1}{4}\,e^{-x/4}\,\sin x,$$

Η λύση περιγράφει μια **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**.

■

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις[17, 18]

$i)$	$y'' + 4y' + 5y = 0;\; y_0' = y_0 = 1$	$iv)$	$y'' + 25y = 0;\; y_0' = y_0 = 1$
$ii)$	$y'' - y' - 12y = 0;\; y_0' = 1,\; y_0 = 0$	$v)$	$y'' + 2y' + 4y = 0;$ $y_0' = 1,\; y_0 = 0$
$iii)$	$y'' + 2y' + 10y = 0;\; y_0' = 1,\; y_0 = 0$	$vi)$	$y'' - 2y' + y = 0;$ $y_0' = -1,\; y_0 = 1.$

[17] **Λύση**.

[18] $(i)\; e^{-2x}\,(\cos x + 3\,\sin x)$, $(ii)\; \frac{1}{7}\left(-e^{-3x} + e^{4x}\right)$, $(iii)\; \frac{1}{3}\,e^{-x}\sin 3x$, $(iv)\; \frac{1}{5}\;(5\cos 5x + \sin 5x)$, $(v)\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-x}\,\sin\left(\sqrt{3}\,x\right)$, $(vi)\; -e^{x}\,(-1 + 2x)$.

Μη ομογενής γραμμική 2ης τάξης

Η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y''+ay'+by=r(x)} \tag{3.3.2 - 4}$$

όταν $a,\, b \in \Re$, $y = y(x)$, $r(x) \neq 0$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Έστω $y,\, r \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε, ανάλογα με την αντίστοιχη λύση της ομογενούς, θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της $(3.3.2-4)$, τελικά προκύπτει

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{\mathcal{L}[\mathbf{r(x)}]}{\mathbf{s^2+as+b}} + \frac{\mathbf{(s+a)y_0+y_0{}'}}{\mathbf{s^2+as+b}}\,, \tag{3.3.2 - 5}$$

οπότε η γενική λύση της μη ομογενούς θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y(x)} = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y(s)}]. \tag{3.3.2 - 6}$$

Παράδειγμα 3.3.2 - 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''-3y'+2y=x, \quad \text{όταν} \quad y_0=y_0'=0.$$

Λύση. Είναι $a=-3$, $b=2$ και

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2}\,.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $(3.3.2–5)$ μετά και την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2\,(s^2-3s+2)} = \frac{1}{s^2(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s-1} + \frac{\Delta}{s-2} \\ &= \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4(s-2)}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(3.3.2-6)$ η μερική λύση είναι

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{3}{4}+\frac{x}{2}-e^{x}+\frac{e^{2x}}{4}\,.$$

■

Παράδειγμα 3.3.2 - 5

Όμοια της

$$y''+2y'+y=e^{-2x},\quad \text{όταν}\quad y_0=y_0'=0.$$

Λύση. Όμοια είναι $a=2$, $b=1$ και

$$\mathcal{L}[r(x)]=\mathcal{L}(e^{-2x})=\frac{1}{s+2}\,.$$

Τότε από τον τύπο $(3.3.2-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+2)\,(s^2+2s+1)}=\frac{1}{(s+2)(s+1)^2} \\ &= \frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{\Gamma}{s+1} \\ &= \frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα και την $(3.3.2-6)$ η μερική λύση είναι

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=e^{-2x}+x\,e^{-x}-e^{-x}=e^{-2x}\left(1+x\,e^{x}-e^{x}\right).$$

■

Παράδειγμα 3.3.2 - 6

Όμοια η

$$y''+4y=x,\quad \text{όταν}\quad y_0=y_0'=0.$$

Λύση. Όμοια είναι $a=0$, $b=4$ και

$$\mathcal{L}[r(x)]=\mathcal{L}(x)=\frac{1}{s^2}\,.$$

Τότε από τον τύπο $(3.3.2-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2\,(s^2+4)} \\ &= \frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4\cdot 2}\frac{2}{s^2+2^2} \end{aligned}$$

μετά την κατάλληλη τροποποίηση του τελευταίου όρου στο δεξιό μέλος στην παραπάνω ισότητα.

Άρα σύμφωνα με την $(3.3.2-6)$ η μερική λύση είναι

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x.$$

■

Παράδειγμα 3.3.2 - 7

Όμοια η

$$y''+2y'+10y=1, \quad \text{όταν} \quad y_0=y_0'=0.$$

Λύση. Είναι $a=2$, $b=10$ και $\mathcal{L}[r(x)]=\mathcal{L}(1)=1/s$. Τότε από τον τύπο $(3.3.2-5)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s\,(s^2+2s+10)} \\ & \quad \text{(επειδή το } s^2+2s+2 \text{ έχει ρίζες μιγαδικές δεν αναλύεται)} \\ &= \frac{A}{s}+\frac{Bs+\Gamma}{s^2+2s+10}=\frac{1}{10}\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\frac{s+2}{s^2+2s+10} \\ &= \frac{1}{10}\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\frac{s+2}{(s+1)^2+3^2} \\ &= \frac{1}{10}\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+\frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right] \end{aligned}$$

μετά την τροποποίηση του παρανομαστή $s^2+2s+10$ σε άθροισμα τετραγώνων.

Άρα η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\left(e^{-x}\,\cos 3x + \frac{1}{3}\,e^{-x}\sin 3x\right).$$

■

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν $y = y(x)$ και $y_0 = y_0' = 0$[19, 20]

$i)$	$y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$	$iv)$	$y'' + 2y' + y = \sin x$
$ii)$	$y'' + y = \sin x$	$v)$	$y'' + y' = e^{-x}\sin x$
$iii)$	$y'' + 3y' + 2y = x$	$vi)$	$y'' + 4y' + 3y = 4\,e^{-x}.$

2. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 13y = 2\delta(t)$, όπου $y = y(x)$ και $y_0 = y_0' = 0$, έχει λύση την

$$y(x) = 2e^{-2x}\left(\cos 3x + \sin 3x\right).$$

[21]

---

[19] **Λύση**.

[20] $(i)\ \frac{1}{30}\,e^{-2x}\,(3e^x - 3\cos 3x - \sin 3x)$, $(ii)\ \frac{1}{2}\,(-x\cos x + \sin x)$, $(iii)\ -\frac{3}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + e^{-x} + \frac{x}{2}$, $(iv)\ -\frac{1}{2}\,e^{-x}\,(1 + x - e^x\cos c)$, $(v)\ \frac{1}{2}\,e^{-x}\,(-2 + e^x + \cos x - \sin x)$, $(vi)\ e^{-3x}\left(1 - e^{2x} + 2x\,e^{2x}\right)$.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Bronson, R. (1978), Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική, ISBN 978–000–761–014–3.

[4] Αθανασιάδη, Α. (1993), Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–219–7.

[5] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[6] Spiegel M., Schaum's Outlines – Laplace Transforms (1965), McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 978–007–060–231–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων