Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 4: Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών – Μέρος Ι

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 4

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ - ΜΕΡΟΣ Ι

Στο μάθημα αυτό θα γίνει μια γενίκευση της ήδη γνωστής στον αναγνώστη έννοιας της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής σε **δύο**, αντίστοιχα **τρεις** μεταβλητές.

4.1 Εισαγωγικές έννοιες

4.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 4.1.1 - 1 (συνάρτησης πολλών μεταβλητών) *Έστω $D \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $D \subseteq \Re^3$ και $T \subseteq \Re$ δύο τυχόντα μη κενά σύνολα. Τότε μία συνάρτηση δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T είναι μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, τέτοια ώστε:*

$$\begin{aligned} D \ni (x, y) \;\longrightarrow &\quad f(x, y) = w \in T, \\ \textit{αντίστοιχα} & \\ D \ni (x, y, z) \;\longrightarrow &\quad f(x, y, z) = w \in T. \end{aligned} \tag{4.1.1 - 1}$$

Τα x, y, αντίστοιχα x, y, z είναι στην περίπτωση αυτή οι ανεξάρτητες μεταβλητές ή απλά μεταβλητές ή επίσης και τα στοιχεία (arguments) της f, ενώ w η εξαρτημένη μεταβλητή. Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, η f ορίζει τον **τύπο** της συνάρτησης, δηλαδή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η παραπάνω απεικόνιση.

Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού D γίνεται όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης με μία μεταβλητή, με τη διαφορά ότι προσδιορίζονται οι τιμές για τις οποίες ορίζεται η f για κάθε μεταβλητή x, y, αντίστοιχα x, y, z χωριστά και στη συνέχεια το D σαν η ένωση των επί μέρους πεδίων ορισμού. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D θα συμβολίζεται στο εξής με $f|D$ ή αναλυτικά $f(x,y)|D$, αντίστοιχα $f(x,y,z)|D$. Τα πεδία ορισμού και τιμών είναι μια **καμπύλη επιφάνεια** ή γενικότερα μια **τρισδιάστατη περιοχή** του χώρου.

Έστω $w = f(x,y)|D$, αντίστοιχα $w = f(x,y,z)|D$. Τότε η γραφική παράσταση της f θα είναι το σύνολο των σημείων

$$\{((x,y),w) \in D \times T, \quad \text{αντίστοιχα} \quad ((x,y,z),w) \in D \times T.\}$$

Παράδειγμα 4.1.1 - 1

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f_1(x,y) = \sqrt{x+y}, \quad f_2(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y} \quad \text{και} \quad f_3(x,y) = \ln\left(4 - x^2 - 4y^2\right).$$

Λύση. Επειδή από τον τύπο της f_1 πρέπει να προκύπτει πραγματικός αριθμός, το πεδίο ορισμού D_1 θα είναι

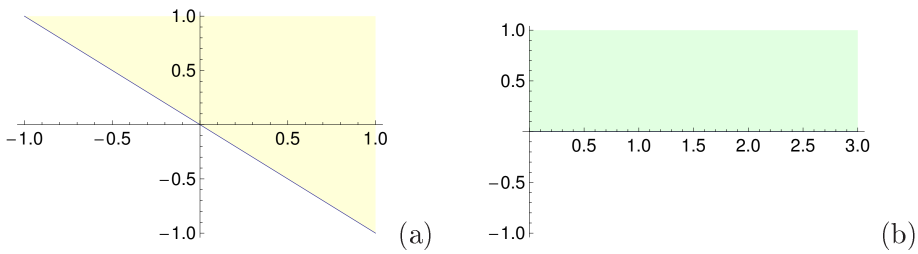
$$D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad x+y \geq 0\}.$$

Γραφικά το D_1 ορίζεται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο άνω μέρος της ευθείας $x+y=0$ (Σχ. 4.1.1 - 1a).[1]

Όμοια το πεδίο ορισμού D_2 της f_2 θα είναι

$$D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\},$$

[1]Υπενθυμίζεται ότι η ανισότητα $Ax + By + \Gamma > 0$ λύνεται γραφικά, όταν χαραχθεί η ευθεία $\varepsilon : \quad Ax + By + \Gamma = 0$ και θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων $(x,y) \in \Re^2$, που είναι στο άνω μέρος της ε.



Σχήμα 4.1.1 - 1: Παράδειγμα 4.1.1 - 1: (a) το πεδίο ορισμού $D_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : \quad x + y \geq 0, \}$ της συνάρτησης $f_1(x, y) = \sqrt{x + y}$. Η μπλε ευθεία έχει εξίσωση $x + y = 0$. (b) Το πεδίο ορισμού $D_2 = \{(x, y) \in \Re^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ της $f_2(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

δηλαδή το 1ο τεταρτημόριο του Σχ. 4.1.1 - 1b.

Τέλος, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής της, για το πεδίο ορισμού D_3 της f_3 πρέπει $4 - x^2 - 4y^2 > 0$ ή $1 > \frac{x^2}{4} + y^2$, οπότε

$$D_3 = \{(x, y) \in \Re^2 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\},$$

δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι το εσωτερικό της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (Σχ. 4.1.1 - 2a). Στο Σχ. 4.1.1 - 2b δίνεται η γραφική παράσταση της f_3.

■

Παράδειγμα 4.1.1 - 2

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

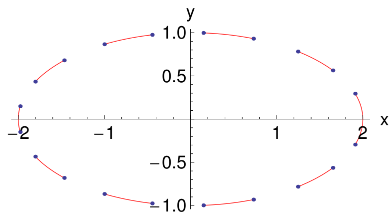
$$f(x, y) = \sin^{-1} x + \sqrt{xy}.$$

Λύση. Είναι γνωστό[2] ότι η συνάρτηση $\sin^{-1} x$ ορίζεται για κάθε $x \in [-1, 1]$. Επομένως ο πρώτος όρος της f ορίζεται όταν $-1 \leq x \leq 1$.

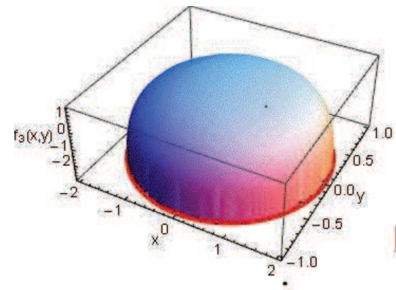
[2] Όταν η συνάρτηση $\sin x$ θεωρηθεί ότι έχει πεδίο ορισμού το $[-\pi/2, \pi/2]$, τότε ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση τόξο ημιτόνου x, που συμβολίζεται με $\sin^{-1} x$ ή $\arcsin x$ και έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, δηλαδή το πεδίο τιμών της $\sin x$.

Όμοια, όταν η συνάρτηση $\tan x$ θεωρηθεί ότι έχει πεδίο ορισμού το $(-\pi/2, \pi/2)$, τότε ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση τόξο εφαπτομένης x, που συμβολίζεται με $\tan^{-1} x$ ή $\arctan x$ και έχει πεδίο ορισμού το $\Re$, δηλαδή το πεδίο τιμών της $\tan x$.

Βλέπε επίσης βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 4.



(a)



(b)

Σχήμα 4.1.1 - 2: Παράδειγμα 4.1.1 - 1: (a) το πεδίο ορισμού $D_3 = \{(x, y) \in \Re^2 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$ της συνάρτησης $f_3(x, y) = \ln\left(4 - x^2 - 4y^2\right)$. Η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (b) Η γραφική παράσταση της $f_3(x, y)$. Η κόκκινη καμπύλη δεν συμπεριλαμβάνεται στο διάγραμμα

Ο δεύτερος όρος $\sqrt{xy}$ ορίζεται όταν $xy \geq 0$, δηλαδή όταν τα x, y είναι ομόσημα. Άρα το πεδίο ορισμού της f θα είναι $D = D_1 \cup D_2$, όπου

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \Re^2 : \ -1 \leq x \leq 0, \quad y \leq 0\} \quad \text{και} \\ D_2 &= \{(x, y) \in \Re^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \quad y \geq 0\}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 4.1.1 - 3

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x, y, z) = \ln(x - y + 4z) \quad \text{και} \quad g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}.$$

Λύση. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής της, το πεδίο ορισμού D_f της f είναι

$$D_f = \{(x, y, z) \in \Re^3 : \quad x - y + 4z > 0\},$$

δηλαδή πρόκειται για το άνω μέρος του επιπέδου με εξίσωση $\pi: \quad x-y+4z=0$.[3]

Όμοια το πεδίο ορισμού D_g της g, λόγω της τετραγωνικής ρίζας και του παρονομαστή, θα είναι

$$D_g = \{(x,y,z) \in \Re^3: \quad x^2+y^2+z^2 > 9\},$$

δηλαδή το εξωτερικό της σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0,0,0)$ και ακτίνα $R=3$. ■

Από το Παράδειγμα 4.1.1 - 3 προκύπτει ότι στις περιπτώσεις συναρτήσεων τριών μεταβλητών το πεδίο ορισμού είναι ή μια επιφάνεια - περίπτωση πεδίου ορισμού D_f - ή ένας όγκος - πεδίο ορισμού D_g. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, έστω f, στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να γίνει από το διάγραμμα του πεδίου τιμών T των σημείων, δηλαδή του συνόλου $T = \{f(x,y,z) \quad \text{με} \quad (x,y,z) \in D\}$, όταν D το πεδίο ορισμού της f και είναι γενικά μια επιφάνεια ή και ένας όγκος του χώρου των τριών διαστάσεων.

---

[3] Υπενθυμίζεται ότι η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου είναι

$$ax+by+cz=d, \tag{4.1.1 - 2}$$

που, όταν η $(4.1.1-2)$ λυθεί ως προς z, ισοδύναμα γράφεται και

$$z=f(x,y)=Ax+By+D. \tag{4.1.1 - 3}$$

Η γραφική παράσταση ενός επιπέδου γενικά γίνεται με τον προσδιορισμό των σημείων τομής του επιπέδου με τους άξονες συντεταγμένων. Τότε ενώνοντας τα τρία παραπάνω σημεία τομής το δημιουργούμενο τρίγωνο δείχνει και τη μορφή του επιπέδου. Για παράδειγμα, έστω ότι ζητείται η γραφική παράσταση του επιπέδου $3x+4y+z=12$, που είναι της μορφής $(4.1.1-2)$ και σύμφωνα με την $(4.1.1-3)$ ισοδύναμα γράφεται

$$z=12-3x-4y, \quad \text{δηλαδή} \quad f(x,y)=12-3x-4y. \tag{4.1.1 - 4}$$

Τότε θέτοντας στην $(4.1.1-4)$ $x=y=0$ προσδιορίζεται ότι το σημείο τομής του επιπέδου με τον z-άξονα είναι το $(0,0,12)$. Όμοια το σημείο τομής με τον x-άξονα είναι το $(4,0,0)$ και με τον y-άξονα το $(0,3,0)$.

Η ανισότητα $ax+by+cz>0$ λύνεται γραφικά, όταν αρχικά γίνει η γραφική παράσταση του επιπέδου

$$\pi: \quad ax+by+cz=0$$

και στη συνέχεια θεωρηθεί το σύνολο των σημείων $(x,y,z) \in \Re^3$, που είναι στο άνω μέρος του π.

Άσκηση

Των παρακάτω συναρτήσεων να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού και να γίνει η γραφική παράσταση

$i)$ $(4-x^2-y^2)^{1/2}$	$v)$ $1/\ln(x+y+z)$,
$ii)$ $\ln(x-y)$	$vi)$ $\tan^{-1} y+\sqrt{xy}$,
$iii)$ $(9-x^2)^{1/2}+(4-y^2)^{1/2}$	$vii)$ $\ln(xyz)$,
$iv)$ $\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$viii)$ $\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)$.

4.1.2 Σύγκλιση συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

Ορισμός 4.1.2 - 1 (δύο μεταβλητών). *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$ με πεδίο ορισμού $D\subseteq\Re^2$. Τότε θα είναι*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l, \tag{4.1.2 - 1}$$

τότε και μόνον όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, έτσι ώστε $|f(x,y)-l|<\varepsilon$ για κάθε $(x,y)\in D$ και $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$.

Ορισμός 4.1.2 - 2 (τριών μεταβλητών). *Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z)$ με πεδίο ορισμού $D\subseteq\Re^3$. Τότε θα είναι*

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=l, \tag{4.1.2 - 2}$$

τότε και μόνον όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, έτσι ώστε $|f(x,y,z)-l|<\varepsilon$ για κάθε $(x,y,z)\in D$ και $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\,(z-z_0)^2}<\delta$.

Σχετικά με τη διαδικασία υπολογισμού των επί μέρους οριακών τιμών στην περίπτωση του Ορισμού 4.1.2 - 1 ισχύει η παρακάτω πρόταση[4].

[4] Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την περίπτωση του Ορισμού 4.1.2 - 2 (βλέπε βιβλιογραφία).

Πρόταση 4.1.2 - 1. *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$ με $(x,y) \in D \subseteq \Re^2$ ανοικτό σύνολο και σημείο $(x_0,y_0) \in D$. Αν $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ και υπάρχουν στο $\Re$ οι οριακές τιμές $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ και $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$, τότε*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) &= \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] \\ &= \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = l. \qquad (4.1.2 - 3) \end{aligned}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \text{ με πεδίο ορισμόύ } D = \{(x,y) \in \Re^2 \text{ με } (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \begin{cases} \dfrac{0-y}{0+y} = -1 & \text{αν} \quad y \neq 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x+0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x'}{x'} = 1 & \text{αν} \quad y = 0, \end{cases}$$

ενώ

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \begin{cases} \dfrac{x-0}{x+0} = 1 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ \\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-y}{0+y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y'}{y'} = -1 & \text{αν} \quad x = 0, \end{cases}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = 1, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = -1,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.2 - 1 το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Σημειώσεις 4.1.2 - 1

Ανάλογα με τις ιδιότητες των ορίων των συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύει ότι:

- το όριο εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό,
- το όριο του αθροίσματος, της διαφοράς και του γινομένου ισούται με το άθροισμα των ορίων, της διαφοράς και του γινομένου. Όμοια του πηλίκου, όταν το όριο του παρονομαστή είναι διάφορο του μηδενός, ισούται με το πηλίκο των ορίων.

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $(0,0)$

$i)$	$\dfrac{x-y^2}{x+y^2}$	$iv)$	$\dfrac{x-2y}{x+y}$
$ii)$	$\dfrac{\lvert xy\rvert}{xy}$	$v)$	$\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$
$iii)$	$\dfrac{y}{x^2+y^2}$	$vi)$	$(1+y)\,\dfrac{\sin^2 x}{x}\,.$

4.1.3 Συνέχεια συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

Ανάλογα με την Παράγραφο 4.1.2 δίνεται και στην περίπτωση αυτή ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών.

Ορισμός 4.1.3 - 1 (συνέχειας). *Μία συνάρτηση* $f(x,y)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z)$ *με πεδίο ορισμού, έστω* $D\subseteq\Re^2$, *αντίστοιχα* $D\subseteq\Re^3$, *θα είναι συνεχής στο σημείο* $(x_0,y_0)\in D$, *αντίστοιχα* $(x_0,y_0,z_0)\in D$ *τότε και μόνον, όταν*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f\left(x_0,y_0\right),$$

αντίστοιχα

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=f\left(x_0,y_0,z_0\right).$$

Οι παραπάνω οριακές τιμές υπολογίζονται σύμφωνα με τους Ορισμούς 4.1.2 - 1, αντίστοιχα 4.1.2 - 2.

Παράδειγμα 4.1.3 - 1

Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \alpha\nu \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$, επειδή με ανάλογους υπολογισμούς με εκείνους του Παραδείγματος 4.1.2 - 1 προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]=0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]=0,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.2 - 1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, δηλαδή υπάρχει η οριακή τιμή και ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 4.1.3 - 2

Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \alpha\nu \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Η λύση, που προκύπτει με υπολογισμούς ανάλογους των Παραδειγμάτων 4.1.2 - 1 και 4.1.3 - 1, αφήνεται σαν άσκηση.

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Οι παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων δύο μεταβλητών αποτελούν μια γενίκευση των αντίστοιχων για μια μεταβλητή[5]. Ανάλογες προτάσεις ισχύουν και στην περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών.

[5] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 5.

Πρόταση 4.1.3 - 1. *Αν f, $g|D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$, τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$ και fg είναι συνεχείς στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$.*

Πρόταση 4.1.3 - 2. *Αν f, $g|D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$ και $f(x_0, y_0) \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή $\varpi(x_0, y_0)$, τέτοια ώστε $f(x_0, y_0) \neq 0$ για κάθε $x \in \varpi(x_0, y_0)$, οπότε η συνάρτηση $1/f$ έχει έννοια για κάθε $x \in D \cap \varpi(x_0, y_0)$ και είναι συνεχής στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$.*

Σημείωση 4.1.3 - 1

Οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις στα πεδία ορισμού των. ΄Ομοια οι εκθετικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές και οι αντίστροφες αυτών συναρτήσεις.

Άσκηση

Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια οι παρακάτω συναρτήσεις

$$
\begin{array}{llll}
i) & \sin(x+y) & iv) & \dfrac{x}{x^2+y^2} \\[2ex]
ii) & \ln\left(x^2+y^2+z^2\right) & v) & \dfrac{x+y}{1-\cos x} \\[2ex]
iii) & \dfrac{x+y}{x-y} & vi) & \dfrac{1}{x+y}\,.
\end{array}
$$

4.2 Μερική παράγωγος συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

4.2.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ο γνωστός ορισμός της παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής[6] επεκτείνεται και στην περίπτωση μιας συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών για

[6] **Ορισμός 4.2.1 - 1 (παραγώγου συνάρτησης μια μεταβλητής).** *Έστω η συνάρτηση $f|D$, όπου $D \subseteq \Re$ ανοικτό διάστημα και σημείο $x_0 \in D$. Τότε για κάθε $x \in D - \{x_0\}$ με τον τύπο $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ορίζεται μία συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της f*

κάθε μεταβλητή χωριστά θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές σαν σταθερές και λέγεται μερική παράγωγος της συνάρτησης ως προς τη θεωρούμενη μεταβλητή. Συγκεκριμένα έχουμε:

Ορισμός 4.2.1 - 2 (μερική παράγωγος). *Έστω μια συνάρτηση $f\,|S$ όπου S ανοικτό υποσύνολο του $\Re^2$, αντίστοιχα του $\Re^3$ και σημείο $(x_0, y_0) \in S$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Τότε ορίζεται σαν 1ης τάξης μερική παράγωγος (partial derivative) της f ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο (x_0, y_0), αντίστοιχα (x_0, y_0, z_0), η παρακάτω οριακή τιμή*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f\,(x_0, y_0)}{\partial x} &= f_x'\,(x_0, y_0) = D_x f\,(x_0, y_0) \qquad (4.2.1 - 1) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x, y_0) - f\,(x_0, y_0)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \frac{\partial f\,(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} &= f_x'\,(x_0, y_0, z_0) = D_x f\,(x_0, y_0, z_0) \qquad (4.2.1 - 2) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f\,(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

εφόσον υπάρχει.

Η οριακή τιμή (4.2.1−1), αντίστοιχα (4.2.1−2) είναι, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, πραγματικός αριθμός. Το σύμβολο (τελεστής) $\partial/\partial x = \partial_x = D_x$ δηλώνει 1ης τάξης μερική (partial) παράγωγο ως προς τη μεταβλητή ή συνιστώσα x, σε διάκριση με το γνωστό συμβολισμό $D = D^1 = d/dx$ για

στο σημείο x_0. Θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 \in D$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f'\,(x_0)$ τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή

$$f'\,(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} \qquad (1)$$

υπάρχει. Η (1) ισοδύναμα γράφεται

$$f'\,(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0)}{h}.$$

μια μεταβλητή. Όμοια ορίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς τις άλλες μεταβλητές.

Αν η 1ης τάξης μερική παράγωγος υπάρχει για κάθε $x_0 \in S$, τότε ορίζεται η 2ης τάξης μερική παράγωγος της f στο x ως εξής:

$$f_{x\,x} = f_{2x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{4.2.1 - 3}$$

όπου όμοια το σύμβολο $\partial^2/\partial x^2 = \partial_x x = \partial_{2x} = D_{xx}$ δηλώνει 2ης τάξης μερική παράγωγο ως x.

Όμοια ορίζονται οι 3ης, 4ης και γενικά η ν-τάξης μερική παράγωγος της f στο x ως:

$$\begin{aligned} f_{x\,x\,x} &= f_{3x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \\ f_{x\,x\,x\,x} &= f_{4x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) \quad \text{και γενικά} \\ f_{\nu\,x} &= \frac{\partial^\nu f}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x^{\nu-1}}\right). \end{aligned} \tag{4.2.1 - 4}$$

Οι παράγωγοι $(4.2.1-5)$ και $(4.2.1-4)$, σε αντίθεση με τις παραγώγους $(4.2.1-1)$ ή $(4.2.1-2)$ που είναι πραγματικοί αριθμοί, είναι συναρτήσεις δύο, αντίστοιχα τριών κατά περίπτωση μεταβλητών.

Επίσης ορίζονται οι παράγωγοι των παρακάτω μορφών

$$\begin{aligned} f_{x\,y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ f_{x\,x\,y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ f_{x\,y\,y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned} \tag{4.2.1 - 5}$$

Οι παράγωγοι αυτές λέγονται πολλές φορές **ανάμεικτες** ή και **επάλληλες**.

Οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύουν και στην περίπτωση της μερικής παραγώγου[7]. Επίσης ισχύει για κάθε μεταβλητή

[7] Υπενθυμίζονται με τη μορφή προτάσεων οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

και ο κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης[8]. Με τον τύπο 4.2.1 - 6

Πρόταση 4.2.1 - 1 (παράγωγος σταθεράς συνάρτησης). *Έστω η συνάρτηση* $f\,|\,\Re$ *όπου* $f(x) = c$ *σταθερά για κάθε* $x \in \Re$. *Τότε*

$$f'(x) = 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Re.$$

Πρόταση 4.2.1 - 2 (παράγωγος αθροίσματος). *Έστω οι συναρτήσεις* $f,\ \ g\,|\,D$ *παραγωγίσιμες στο* D. *Τότε ισχύει*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in D.$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Πρόταση 4.2.1 - 3 (παράγωγος γινομένου). *Έστω οι συναρτήσεις* $f,\, g\,|\,D$ *παραγωγίσιμες στο* D. *Τότε ισχύει*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in D.$$

Όμοια η ιδιότητα γενικεύεται. Επειδή προφανώς ισχύει $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$ με $\lambda \in \Re$ σταθερά από τις Προτάσεις 4.2.1 - 1 - 4.2.1 - 3 προκύπτει τελικά η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**

$$(kf(x) + \lambda g(x))' = kf'(x) + \lambda g'(x)$$

για κάθε $x \in D$ και $k,\, \lambda \in \Re$.

Πρόταση 4.2.1 - 4. *Αν η συνάρτηση* $f|D$ *παραγωγίζεται στο* D *και επί πλέον υπάρχει* $x_0 \in D$, *έτσι ώστε* $f'(x_0) \neq 0$, *τότε*

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x)}\,.$$

Πρόταση 4.2.1 - 5 (παράγωγος πηλίκου). *Έστω οι συναρτήσεις* $f,\, g|D$ *παραγωγίσιμες στο* D *και επί πλέον* $g'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in D$. *Τότε ισχύει*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in D.$$

[8]

Θεώρημα 4.2.1 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις* $y = f(w)\,|\,D_1$ *και* $w = g(x)\,|\,D_2$ *όπου* $g(D_2) \subseteq D_1$ *και* $D_1,\ D_2$ *ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση* $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ *για κάθε* $x \in D_2$. *Έστω επίσης ότι για ένα σημείο* $x_0 \in D_2$

υπολογίζονται οι παράγωγοι των σύνθετων συναρτήσεων μιας μεταβλητής, έστω x, οι κυριότερες των οποίων δίνονται στον Πίνακα 4.2.1 - 1.

Σημειώσεις 4.2.1 - 1

i) Ανάλογα με την περίπτωση της παραγώγου μιας μεταβλητής, η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης ως προς μια μεταβλητή της, έστω x, θα ορίζει το **συντελεστή μεταβολής** της κατά τον x-άξονα. Όμοια για τις άλλες μεταβλητές.

ii) Οι συντελεστές μεταβολής των μεταβλητών στην περίπτωση (i) είναι δυνατόν να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή να έχουμε ταχύτερη μεταβολή ως προς x σε σύγκριση με τη μεταβολή ως προς y, κ.λπ.

Παράδειγμα 4.2.1 - 1

Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης μερικές μερικές παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + 4\sqrt{y} - 5, \quad g(x,y,z) = x^2 y - y^2 z^3 + \sin(xy), \\ h(s,t) &= t^2 \ln\left(s^2+1\right) + \frac{9}{t^3} - \sqrt[3]{s^4}. \end{aligned}$$

υπάρχουν οι παράγωγοι $g'(x_0) = w_0'$ και $y_0' = f'(w_0)$. Τότε θα υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $h(x)|D_2$ στο σημείο $x_0 \in D_2$ και θα ισχύει

$$\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(w)}{dw}\right|_{w=w_0} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = y_0'\, w_0'.$$

Το θεώρημα είναι γνωστό σαν ο κανόνας της **αλυσιδωτής παραγώγισης** (chain rule).

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα 4.2.1 - 1, αν για κάθε $x \in D_2$ υπάρχει η παράγωγος $g'(x)$ και επί πλέον ότι για την αντίστοιχη τιμή $g(x) = w \in D_1$ υπάρχει η $f'(w) = f'(g(x))$, θα υπάρχει και η παράγωγος της $f(g(x))$ ως προς x για κάθε $x \in D_2$ και θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\,\frac{dg(x)}{dx} = f_g'\, g_x'. \tag{4.2.1 - 6}$$

Πίνακας 4.2.1 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων με μεταβλητή x.

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	$f^a(x)$	$af'(x)f^{a-1}(x)$
2	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
3	$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
4	$\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$
5	$\cos f(x)$	$-f'(x)\sin f(x)$
6	$\tan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
7	$\cot f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
8	$\tan^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
9	$\sin^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
10	$\cos^{-1} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
11	$\sinh f(x)$	$f'(x)\cosh f(x)$
12	$\cosh f(x)$	$f'(x)\sinh f(x)$
13	$\tanh f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\tanh^2 f(x)\right]$
14	$\coth f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\coth^2 f(x)\right]$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_x &= \left(x^4+4\,y^{1/2}-5\right)_x = \left(x^4\right)_x + \overbrace{\left(4\,y^{1/2}-5\right)_x}^{0} = 4x^3,\\
f_y &= \left(x^4+4\,y^{1/2}-5\right)_y = 4\,\overbrace{\left(y^{1/2}\right)_y}^{\frac{1}{2}\,y^{\frac{1}{2}-1}} + \overbrace{\left(x^4-5\right)_y}^{0} = 2\,y^{-1/2},\\
g_x &= \left[x^2y-y^2z^3+\sin(xy)\right]_x = \overbrace{\left(x^2y\right)_x}^{y\,\left(x^2\right)_x} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_x}^{0} + \left[\sin(xy)\right]_x\\
&= 2\,xy+(xy)_x\,\cos(xy) = 2xy+y\,\cos(xy),\\
g_y &= \left[x^2y-y^2z^3+\sin(xy)\right]_y = \overbrace{\left(x^2y\right)_y}^{x^2(y\,)_y} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_y}^{z^3\left(y^2\right)_y} + \left[\sin(xy)\right]_y\\
&= x^2-2\,y\,z^3+(xy)_y\,\cos(xy) = x^2-2\,y\,z^3+x\,\cos(xy),\\
g_z &= \left[x^2y-y^2z^3+\sin(xy)\right]_z = \overbrace{\left(x^2y\right)_y}^{0} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_y}^{y^2\left(z^3\right)_z} + \overbrace{\left[\sin(xy)\right]_z}^{0}\\
&= -3y^2z^2,\\
h_s &= \left[t^2\ln\left(s^2+1\right)+9\,t^{-3}-s^{4/3}\right]_s\\
&= \left[t^2\ln\left(s^2+1\right)\right]_s + 9\,\overbrace{\left(t^{-3}\right)_s}^{0} - \left(s^{4/3}\right)_s\\
&= t^2 \qquad \overbrace{\left[\ln\left(s^2+1\right)\right]_s}^{\text{τύπος 3 του Πίνακα 4.2.1 - 1}} \qquad -\frac{4}{3}\,s^{\frac{4}{3}-1}\\
&= t^2\,\frac{1}{s^2+1}\,\overbrace{\left(s^2+1\right)_s}^{2\,s} - \frac{4}{3}\,s^{1/3} = \frac{2\,s\,t^2}{s^2+1} - \frac{4}{3}\,s^{1/3},\\
h_t &= \left[t^2\ln\left(s^2+1\right)+9\,t^{-3}-s^{4/3}\right]_t
\end{aligned}
$$

$$= \overbrace{\left[t^2 \ln\left(s^2+1\right)\right]_t}^{\ln\left(s^2+1\right)\,\left(t^2\right)_t} + 9\,\overbrace{\left(t^{-3}\right)_s}^{-3\,t^{-4}} - \overbrace{\left(s^{4/3}\right)_s}^{0} = 2\,t\,\ln\left(s^2+1\right) - 27\,t^{-4}.$$

■

Παράδειγμα 4.2.1 - 2

Να υπολογιστούν οι 1ης και οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2.$$

Λύση. Όμοια διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
f_x &= \left(\frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2\right)_x = \left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_x + \overbrace{\left(z^2\right)_x}^{0} = \frac{1}{y}\,\left(x\,e^{-x}\right)_x \\
&= \frac{1}{y}\left[\overbrace{(x)_x}^{1}\,e^{-x} + x\,\overbrace{\left(e^{-x}\right)_x}^{(-x)_x\,e^{-x}=-e^{-x}}\right] = \frac{(1-x)\,e^{-x}}{y} \\
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) = \left[\frac{(1-x)\,e^{-x}}{y}\right]_x \\
&= \frac{1}{y}\,\left[(1-x)\,e^{-x}\right]_x = \frac{1}{y}\left[\overbrace{(1-x)_x}^{-1}\,e^{-x} + (1-x)\,\overbrace{\left(e^{-x}\right)_x}^{-e^{-x}}\right] \\
&= \frac{(x-2)\,e^{-x}}{y}, \\
f_y &= \left(\frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2\right)_y = \left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_y + \overbrace{\left(z^2\right)_y}^{0} = \left(x\,e^{-x}\right)\,\overbrace{\left(y^{-1}\right)_y}^{-y^{-2}} \\
&= -x\,e^{-x}\,y^{-2}, \\
f_{yy} &= \left(-x\,e^{-x}\,y^{-2}\right)_y = -x\,e^{-x}\,\overbrace{\left(y^{-2}\right)_y}^{-2\,y^{-3}} = 2\,x\,e^{-x}y^{-3}, \\
f_z &= \left(\frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2\right)_z = \overbrace{\left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_z}^{0} + \left(z^2\right)_z = 2z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{zz} &= (2z)_z = 2, \\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right) = \left(-x\,e^{-x}\,y^{-2}\right)_x \\
&= -\frac{1}{y^2}\,\left(x\,e^{-x}\right)_x = -\frac{1}{y^2}\,\left[(x)_x\,e^{-x} + x\,\left(e^{-x}\right)_x\right] = \frac{(x-1)\,e^{-x}}{y^2}\,, \\
f_{yx} &= \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) \\
&= \left[\frac{(1-x)\,e^{-x}}{y}\right]_y = \cdots = \frac{(x-1)\,e^{-x}}{y^2}\,, \quad \text{όμοια} \\
f_{yz} &= f_{zy} = 0, \quad \text{και} \quad f_{xz} = f_{zx} = 0.
\end{aligned}$$

■

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει ότι $f_{xy} = f_{yx}$, δηλαδή οι ανάμεικτες μερικές παράγωγοι 2ης τάξης των ίδιων ανά δύο μεταβλητών είναι ίσες. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα[9].

Θεώρημα 4.2.1 - 2 (Schwarz). *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)| \subseteq \Re^2$, όπου S ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς στο S. Τότε*

$$f_{xy} = f_{yx} \quad \textit{για κάθε} \quad (x,y) \in S. \tag{4.2.1 - 7}$$

Παράδειγμα 4.2.1 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{y}{x+y}\,.$$

Να υπολογιστεί η τιμή $f_{xyy}|_{(1,0)}$.

Λύση. Αρχικά είναι

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y^2}\right) = \left(f_{yy}\right)_x\,. \tag{1}$$

[9] Το θεώρημα, που είναι επίσης γνωστό σαν θεώρημα των Schwarz-Clairaut και γενικεύεται (βλέπε βιβλιογραφία).

Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_y &= \left(\frac{y}{x+y}\right)_y = \frac{\overbrace{(y)_y}^{1}(x+y) - y\,\overbrace{(x+y)_y}^{0+1}}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2} \\
f_{yy} &= \left[\frac{x}{(x+y)^2}\right]_y = x\left[(x+y)^{-2}\right]_y = x\left[-2\,\overbrace{(x+y)_y}^{1}(x+y)^{-2-1}\right] \\
&= -\frac{2\,x}{(x+y)^3}\,,
\end{aligned}
$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_{xyy} &= \left[-\frac{2\,x}{(x+y)^3}\right]_x = -2\left[\frac{x}{(x+y)^3}\right]_x \\
&= -2\,\frac{\overbrace{(x)_x}^{1}(x+y)^3 - x\,\overbrace{\left[(x+y)^3\right]_x}^{3(x+y)_x(x+y)^{3-1}}}{(x+y)^6} = \frac{2(2x-y)}{(x+y)^4}\,.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
f_{xyy}\big|_{(1,0)} = \left.\frac{2(2x-y)}{(x+y)^4}\right|_{(1,0)} = \frac{2(2\cdot 1-0)}{(1+0)^4} = 4.
$$

■

Παράδειγμα 4.2.1 - 4

Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$. Δείξτε ότι[10]

$$
f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0. \qquad (4.2.1 - 8)
$$

Λύση. Έχουμε

$$
f_x = \left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right]_x = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\overbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)_x}^{2x}
$$

[10] Η εξίσωση $(4.2.1-8)$, που είναι γνωστή σαν η **εξίσωση του Laplace** (Laplace equation), έχει σημαντικές εφαρμογές στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4 - εξισώσεις Maxwell). Η συνάρτηση f, που επαληθεύει την $(4.2.1-8)$, λέγεται τότε και **αρμονική** συνάρτηση.

$$
\begin{aligned}
&= -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}, \\
f_{xx} &= -\left[\overbrace{(x)_x}^{1}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right] - x\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right]_x \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \\
&\quad -x\left[-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}-1}\overbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)_x}^{2x}\right] \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+\frac{3}{2}x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Λόγω της συμμετρίας της f όμοια έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+\frac{3}{2}y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}, \qquad (2) \\
f_{xx} &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+\frac{3}{2}z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) προκύπτει τελικά η $(4.2.1-8)$. ■

Ασκήσεις

1. Των παρακάτω συναρτήσεων να υπολογιστούν όλες οι 1ης και 2ης τάξης μερικές παράγωγοι

i) $ye^{-x^2}+x\cos y$

iii) $e^{\sin z}+\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

ii) $\dfrac{x}{x+y}+\tan x$

vi) $\sin^2 z+\ln\left(x^2+y^2\right)$

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y)=e^x\,\sin y$ είναι αρμονική.

4.2.2 Εφαπτόμενο επίπεδο

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μια συνάρτησης[11], έστω f, μιας μεταβλητής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

ορισμού της ότι γεωμετρικά η παράγωγος $f'(x_0)$ ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας ε του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Επεκτείνοντας την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία για συνάρτηση μιας μεταβλητής θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)\,|D$ και έστω σημείο $(x_0, y_0) \in D$ στο οποίο υπάρχουν οι $f_x(x_0,y_0)$ και $f_y(x_0,y_0)$. Τότε, επειδή είναι ήδη γνωστό από την προηγούμενη παράγραφο ότι το διάγραμμα της $f(x,y)$ είναι μια επιφάνεια, είναι προφανές ότι αν διατηρηθεί το y σταθερό, τότε το διάγραμμα θα είναι μια καμπύλη, έστω C_x, ενώ αν διατηρηθεί το x σταθερό, τότε θα είναι μια άλλη καμπύλη, έστω C_y. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία, η $f_x(x_0,y_0)$ θα ορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας ε_x του διαγράμματος της C_x και η $f_y(x_0,y_0)$ το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας ε_y του διαγράμματος της C_y. Τότε οι ε_x, ε_y ορίζουν το **εφαπτόμενο επίπεδο**, έστω π, της f στο (x_0,y_0).

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση του επιπέδου π δίνεται από τον τύπο[12]

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0). \qquad (4.2.2 - 1)$$

Παράδειγμα 4.2.2 - 1

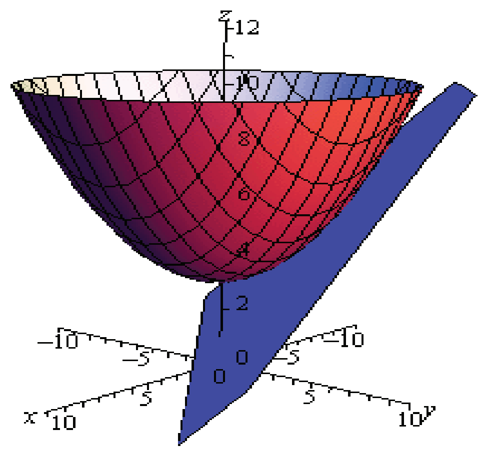
Να υπολογιστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της συνάρτησης

$$f(x,y) = 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \quad \text{στο σημείο} \quad (x_0,y_0) = (-4,3).$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} & f(4,-3) &= 5,\\
f_x(x,y) &= \frac{x}{8} & f_x(4,-3) &= -\frac{1}{2},\\
f_y(x,y) &= \frac{2y}{9} & f_y(4,-3) &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

[12] Σύμφωνα και με την υποσημείωση του Παραδείγματος 4.1.1 - 3 η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου $ax + by + cz = d$, όταν ως προς z, ισοδύναμα γράφεται και $z = f(x,y) = Ax + By + D$.



Σχήμα 4.2.2 - 1: Παράδειγμα 4.2.2 - 1

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(4.2.2 - 1)$ η εξίσωση του επιπέδου θα είναι (Σχ. 4.2.2 - 1)

$$z = 5 - \frac{1}{2}(x+4) + \frac{2}{3}(y-3).$$

■

4.2.3 Η έννοια του διαφορικού

Είναι ήδη γνωστό ότι το διαφορικό μιας συνάρτησης, έστω $f(x)|D$, συμβολίζεται με $d\,f(x)$ και ορίζεται από τον τύπο

$$d\,f(x) = f'(x)dx.$$

Η έννοια του διαφορικού γενικεύεται και για την περίπτωση συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών ως εξής:[13]

Ορισμός 4.2.3 - 1 *Έστω ότι $f(x,y)|S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f(x,y,z)|S \subseteq \Re^3$ όπου S ανοικτό σύνολο, είναι μία συνάρτηση δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών, της οποίας υποτίθεται ότι υπάρχουν στο S οι f_x, f_y, αντίστοιχα*

[13]Για γενικότερες περιπτώσεις βλέπε βιβλιογραφία.

f_x, f_y, f_z. *Τότε*

$$d\,f(x,y) = f_x\,dx + f_y\,dy, \quad \textit{αντίστοιχα} \qquad (4.2.3 - 1)$$

$$d\,f(x,y,z) = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz. \qquad (4.2.3 - 2)$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι η ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης και η συνέχεια αυτών, συνεπάγονται πάντοτε την ύπαρξη του διαφορικού της συνάρτησης.

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν στο S και όλες οι 2ης και 3ης τάξης παράγωγοι της f αποδεικνύεται ότι

$$d^2 f(x,y) = f_{xx}\,dx^2 + 2\,f_{xy}\,dxdy + f_{yy}\,dy^2 \qquad (4.2.3 - 3)$$

$$\begin{aligned} d^3 f(x,y) &= f_{xxx}\,dx^3 + 3\,f_{xxy}\,dx^2dy \\ &\quad +3\,f_{xyy}\,dx\,dy^2 + f_{yyy}\,dy^3, \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned} \qquad (4.2.3 - 4)$$

Ανάλογοι τύποι ισχύουν για την περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών, δηλαδή

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y,z) &= f_{xx}\,dx^2 + f_{yy}\,dy^2 + f_{zz}\,dz^2 \qquad (4.2.3 - 5) \\ &\quad +2\left(f_{xy}\,dxdy + f_{yz}\,dydx + f_{zx}\,dzdx\right), \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.2.3 - 1

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2y^3$. Τότε $f_x = 2\,x\,y^3$ και $f_y = 3\,x^2y^2$, οπότε σύμφωνα με την $(4.2.3-1)$ είναι

$$d\,f(x,y) = 2\,x\,y^3\,dx + 3\,x^2y^2\,dy.$$

Επίσης είναι

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left(2\,xy^3\right)_x = 2\,y^3, \quad f_{yy} = \left(3\,x^2y^2\right)_y = 6\,x^2y \quad \text{και} \\ f_{xy} &= \left(f_y\right)_x = \left(3\,x^2y^2\right)_x = 6\,x\,y^2. \end{aligned}$$

Άρα από την $(4.2.3-2)$ προκύπτει

$$d^2 f = 2\,y^3\,dx^2 + 6\,x\,y^2\,dx\,dy + 6\,x^2y\,dy^2.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα διαφορικά 1ης και 2ης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων

$i)$ $x^3 + y^3 - xy$ $\qquad$ $iii)$ $\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

$ii)$ $\tan^{-1}\left(\dfrac{xy}{z}\right)$ $\qquad$ $iv)$ $z^2\, e^{x\,y}$.

4.2.4 Αλυσιδωτός κανόνας παραγώγισης

Ο ήδη γνωστός τύπος (4.2.1−6) της αλυσιδωτής παραγώγισης του Θεωρήματος 4.2.1 - 1 γράφεται επίσης για ευκολία ως εξής:

$$\text{αν} \quad y = f(x) \quad \text{και} \quad x = g(t), \quad \text{τότε} \quad \frac{d\,y}{d\,t} = \frac{d\,y}{d\,x}\,\frac{d\,x}{d\,t}.$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται για την περίπτωση συναρτήσεων δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών[14] σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.4 - 1 *Έστω η συνάρτηση $f\,(x, y) \mid S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f\,(x, y, z) \mid S \subseteq \Re^3$ και $x = x(t)$, $y = y(t)$, αντίστοιχα $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ για κάθε $t \in A \subseteq \Re$, όπου A ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της f να ανήκουν στο S για κάθε $t \in A$ και επί πλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $(x(t), y(t))$, αντίστοιχα $(x(t), y(t), z(t))$ για κάθε $t \in A$. Τότε η συνάρτηση $f = f(t)$ παραγωγίζεται στο t και ισχύει*

$$\frac{d\,f(t)}{d\,t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,t} = f_x\,\frac{dx}{d\,t} + f_y\,\frac{dy}{d\,t}, \qquad (4.2.4 - 1)$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \frac{d\,f(t)}{d\,t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\,t} \\ &= f_x\,\frac{dx}{d\,t} + f_y\,\frac{dy}{d\,t} + f_z\,\frac{dz}{d\,t}. \qquad (4.2.4 - 2) \end{aligned}$$

Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό σαν **κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης** (chain rule) σύνθετης συνάρτησης για δύο, αντίστοιχα τρεις μεταβλητές.

[14] Για την περίπτωση ν-μεταβλητών βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

Πόρισμα 4.2.4 - 1 *Έστω η συνάρτηση* $f\,(x, y)\mid S \subseteq \Re^2$ *όπου* $y = g(x)$ *για κάθε* $x \in A \subseteq \Re$, *όταν* A *ανοικτό σύνολο και επί πλέον υπάρχει η παράγωγος της* f *στο* (x, y) *για κάθε* $x \in A$. *Τότε η συνάρτηση* f *παραγωγίζεται στο* x *και ισχύει*

$$\frac{d\,f(x,y)}{d\,x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,x}. \tag{4.2.4 - 3}$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον τύπο $(4.2.4 - 1)$ και παραλείπεται.

Παράδειγμα 4.2.4 - 1

Να υπολογιστεί η παράγωγος df/dt, όταν

$$f(x, y) = x^2y - y^2 \quad \text{και} \quad x = t^2, \quad y = 2t.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
f_x &= \left(x^2y - y^2\right)_x = \overbrace{\left(x^2y\right)_x}^{2xy} - \overbrace{\left(y^2\right)_x}^{0} = 2xy = 4\,t^3\,, \\
f_y &= \left(x^2y - y^2\right)_y = \overbrace{\left(x^2y\right)_y}^{x^2} - \overbrace{\left(y^2\right)_y}^{2y} = \left(t^2\right)^2 - 2t = t^4 - 2t, \\
\frac{dx}{dt} &= 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2.
\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(4.2.4 - 1)$ είναι

$$\frac{d\,f}{d\,t} = 4\,t^3 \cdot 2\,t + \left(t^4 - 4\,t\right) \cdot 2 = 2\,t\left(5\,t^3 - 4\right).$$

■

Παράδειγμα 4.2.4 - 2

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \ln(x + y + z), \quad \text{όταν} \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t \quad \text{και} \quad z = t^2.$$

Λύση. Όμοια διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{x+y+z}\overbrace{(x+y+z)_x}^{1} = \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{\cos^t + \sin^2 t + t^2} = \frac{1}{1+t^2}\,, \\
&\quad \text{και όμοια} \\
f_y &= f_z = \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{1+t^2}\,. \\
\frac{dx}{dt} &= \left(\cos^2 t\right)_t = -2\cos t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \left(\sin^2 t\right)_t = 2\cos t \sin t, \quad \frac{dz}{dt} = 2t.
\end{aligned}
$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(4.2.4-2)$ είναι

$$
\frac{d\,f}{d\,t} = \frac{1}{1+t^2}\,(-2\cos t \sin t + 2\cos t \sin t + 2t) = \frac{2t}{1+t^2}\,.
$$

■

Παράδειγμα 4.2.4 - 3

Όμοια της συνάρτησης

$$
f(x,y) = x\,\ln(xy) + y^3, \quad \text{όταν} \quad y = \cos\left(x^2+1\right).
$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(4.2.4-5)$ είναι

$$
\begin{aligned}
f_x &= \left(x\,\ln(xy) + y^3\right)_x = (x\,\ln(xy))_x + \overbrace{\left(y^3\right)_x}^{0}, \\
&= \ln(xy) + x\,\frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1 \\
f_y &= \left(x\,\ln(xy) + y^3\right)_y = x\,[\ln(xy)]_y + \overbrace{\left(y^3\right)_y}^{3\,y^2} \\
&= \frac{x}{y} + 3\,y^2, \\
\frac{dy}{dx} &= -2\,x\,\sin\left(x^2+1\right),
\end{aligned}
$$

οπότε

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \ln\left[x\,\cos\left(x^2+1\right)\right]+1-2x^2\tan\left(x^2+1\right)\\ &\quad -6x\sin\left(x^2+1\right)\cos^2\left(x^2+1\right).\end{aligned}$$

■

Γενικεύοντας το Θεώρημα 4.2.4 - 1 αποδεικνύεται ότι:[15]

Θεώρημα 4.2.4 - 2 *Έστω η συνάρτηση $f\,(x,y)\mid S\subseteq\Re^2$ και $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$ για κάθε $(s,t)\in A\subseteq\Re^2$, όπου A ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της f να ανήκουν στο S για κάθε $(s,t)\in A$ και επί πλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $(x(s,t),y(s,t))$ για κάθε $(s,t)\in A$. Τότε η συνάρτηση $f=f(s,t)$ παραγωγίζεται στο (s,t) και ισχύει*

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \textit{και} \tag{4.2.4 - 4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{4.2.4 - 5}$$

Παράδειγμα 4.2.4 - 4

Έστω

$$f(x,y)=e^{2y}\sin 3x \quad \text{όπου} \quad x=\sqrt{s^2+t^2}, \quad y=st-t^2.$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι f_s και f_t.

Λύση. Σύμφωνα με τους τύπους $(4.2.4-4)$ και $(4.2.4-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \overbrace{\left(e^{2y}\sin 3x\right)_x}^{3e^{2y}\cos 3x}\overbrace{\left[\left(s^2+t^2\right)^{1/2}\right]_s}^{\frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right)^{\frac{1}{2}-1}2s}+\overbrace{\left(e^{2y}\sin 3x\right)_y}^{2\,e^{2y}\sin 3x}\overbrace{\left(st-t^2\right)_s}^{t}\\ &= \frac{3\,s\,e^{2y}\cos 3x}{\sqrt{s^2+t^2}}+2\,t\,e^{2y}\sin 3x\end{aligned}$$

[15] Βλέπε βιβλιογραφία.

$$= \; e^{2\left(st-t^2\right)}\left(\frac{3\,s\,\cos 3\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{s^2+t^2}}+2\,t\,\sin 3\sqrt{s^2+t^2}\right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \left(e^{2y}\sin 3x\right)_x \overbrace{\left[\left(s^2+t^2\right)^{1/2}\right]_t}^{\frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right)^{\frac{1}{2}-1}2t} + \left(e^{2y}\sin 3x\right)_y \overbrace{\left(st-t^2\right)_t}^{s-2t} \\
&= \frac{3\,t\,e^{2y}\cos 3x}{\sqrt{s^2+t^2}} + 2\,(s-2t)\,e^{2y}\sin 3x \\
&= e^{2\left(st-t^2\right)}\left(\frac{3\,t\,\cos 3\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{s^2+t^2}}+2\,(s-2t)\,\sin 3\sqrt{s^2+t^2}\right).
\end{aligned}$$

■

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό για ευκολία να οριστεί ο παρακάτω διαφορικός τελεστής.[16]

Ορισμός 4.2.4 - 1 (τελεστής Laplace) *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(x,y)\,|\,S\subseteq\Re^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z)\,|\,S\subseteq\Re^3$ *έχει τουλάχιστον 2ης τάξης μερικές παραγώγους για κάθε* $(x,y)\in S$, *αντίστοιχα* $(x,y,z)\in S$. *Τότε ο τελεστής Laplace ή και διαφορικός τελεστής 2ης, αντίστοιχα 3ης τάξης ορίζεται ως εξής:*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,, \quad \textit{αντίστοιχα} \tag{4.2.4 - 6}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{4.2.4 - 7}$$

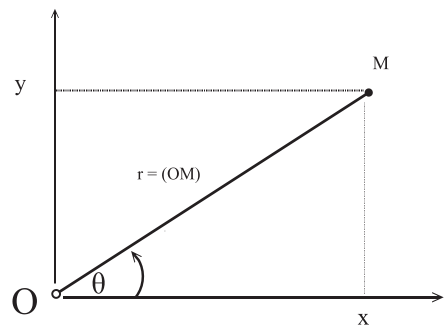
Εφαρμογή 4.2.4 - 1 (πολικές συντεταγμένες (r,θ))

Να υπολογιστεί η παράσταση[17]

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{xx}+f_{yy} \tag{4.2.4 - 8}$$

[16] Για περισσότερες εφαρμογές βλέπε Μάθημα: Διαφορικός Διανυσματικός Λογισμός.

[17] Η εφαρμογή δεν είναι στην εξεταστέα ύλη.



Σχήμα 4.2.4 - 1: πολικές συντεταγμένες (r, θ)

σε πολικές συντεταγμένες (Σχ. 4.2.4 - 1).[18]

Λύση. Εφαρμόζοντας τους τύπους $(4.2.4-4)$ και $(4.2.4-5)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\overbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}^{\cos\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}^{\sin\theta} = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\,, \tag{1}$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς r την (1) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial y} \\
&= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) \quad (\text{Θεώρημα } 4.2.1-2) \\
&\overbrace{=}^{(1)} \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

[18] Είναι γνωστό ότι οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad \text{με } r \geq 0 \text{ και } \theta \in [0, 2\pi) \text{ ή } \theta \in (-\pi, \pi].$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,. \tag{2}
$$

Όμοια με την (1) προκύπτει ότι

$$
\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\overbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}^{-r\sin\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\overbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}^{r\cos\theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} \tag{3}
$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς θ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= r\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= r\left[-\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} - \sin\theta\,\overbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}^{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)}\right] + r\left[-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\,\overbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}^{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)}\right] \\
&= r\left[-\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} - \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-r\,\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\,\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] \\
&\quad r\left[-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(-r\,\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\,\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] \\
&= -r\overbrace{\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)}^{\frac{\partial f}{\partial r}} \\
&\quad +r^2\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\
&\quad -r^2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -r\,\frac{\partial f}{\partial r} + r^2\left(\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \qquad (4)$$

Από την (2) και την (4) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}\,. \qquad (5)\end{aligned}$$

Από την (5) έχουμε την παρακάτω έκφραση της (4.2.4−8) σε πολικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \qquad (4.2.4\text{ - }9)$$

που γράφεται και

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\,. \qquad (4.2.4\text{ - }10)$$

■

Με ανάλογους υπολογισμούς προκύπτει ότι ο τελεστής Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες (Σχ. 4.2.4 - 2a) είναι[19]

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ενώ σε σφαιρικές συντεταγμένες (Σχ. 4.2.4 - 2b) [20]

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$

---

[19] Οι κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) δίνονται από τις σχέσεις

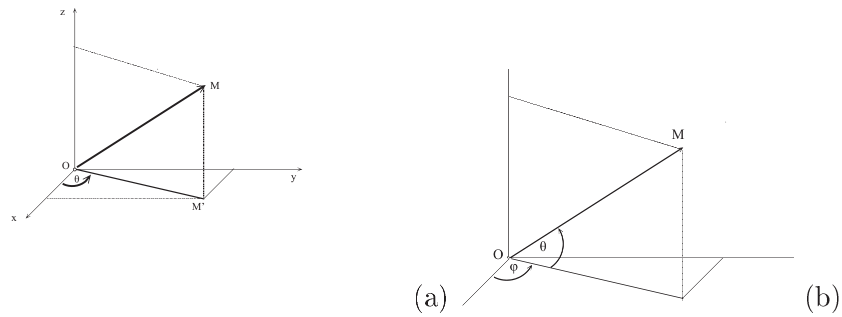
$$x = r\cos\theta,\;\; y = r\sin\theta,\;\; z = z$$
$$\text{με}\;\; r \geq 0,\;\; \theta \in [0, 2\pi) \;\text{ή}\; \theta \in (-\pi, \pi] \;\;\text{και}\;\; z \in \Re.$$

[20] Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) όμοια από τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta\sin\phi,\;\; y = r\sin\theta\sin\phi,\;\; z = r\cos\phi$$

$$\text{με}\;\; r \geq 0 \;\text{και}\; \theta \in [0, \pi],\;\; \phi \in [0, 2\pi) \;\text{ή}\; \phi \in (-\pi, \pi],$$

$$+\frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$



Σχήμα 4.2.4 - 2: (α) οι κυλινδρικές (r, θ, z) και (b) οι σφαιρικές (r, θ, φ) συντεταγμένες.

Άσκηση

Των παρακάτω συναρτήσεων να υπολογιστεί η παράγωγος df/dt

i) $f(x, y) = xe^y + y^2 \sin x$, όταν $x = t$, $y = t^2$,

ii) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, όταν $x = \cosh t$, $y = \sinh t$,

iii) $f(x, y, z) = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, όταν $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$,

iv) $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$, όταν $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

21

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων