Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 5: Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών – Μέρος ΙΙ

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 5

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ - ΜΕΡΟΣ ΙΙ

5.1 Ακρότατα

5.1.1 Τοπικά ακρότατα

Ορισμός 5.1.1 - 1 (τοπικό ακρότατο). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \,|\, S \subseteq \Re^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \,|\, S \subseteq \Re^3$ *όπου* S *ανοικτό σύνολο και σημείο* $P_0 = (x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. *Τότε θα λέγεται ότι το* P_0, *αντίστοιχα το* $\tilde{P}_0$ *είναι θέση τοπικού μεγίστου, αντίστοιχα τοπικού ελαχίστου της* f *τότε και μόνον, όταν υπάρχει περιοχή* $\varpi(x_0, y_0)$ *του* P_0, *αντίστοιχα* $\varpi(x_0, y_0, z_0)$ *του* $\tilde{P}_0$, *έτσι ώστε*

I. **μέγιστο**: $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \le f(x_0, y_0, z_0)$,

II. **ελάχιστο**: $f(x,y) \ge f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \ge f(x_0, y_0, z_0)$

για κάθε $(x,y) \in \varpi(x_0, y_0) \cap S$, *αντίστοιχα* $(x,y,z) \in \varpi(x_0, y_0, z_0) \cap S$.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο αυτό λέγεται θέση **τοπικού ακρότατου** (relative extremum) της f με τιμή $f(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $f(x_0, y_0, z_0)$.

Ορισμός 5.1.1 - 2 (ολικό ακρότατο). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \,|\, S \subseteq \Re^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \,|\, S \subseteq \Re^3$ *όπου* S *ανοικτό σύνολο και σημείο* $P_0 =$

(x_0, y_0), *αντίστοιχα* $\tilde{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. *Τότε θα λέγεται ότι το* P_0, *αντίστοιχα το* $\tilde{P}_0$ *είναι θέση ολικού μεγίστου, αντίστοιχα ολικού ελαχίστου (extremum) της* f *τότε και μόνον, όταν*

I. **μέγιστο**: $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$,

II. **ελάχιστο**: $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$

για κάθε $(x, y) \in S$, *αντίστοιχα* $(x, y, z) \in S$.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο αυτό λέγεται θέση **ολικού ακρότατου** της f με τιμή $f(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $f(x_0, y_0, z_0)$.

Δίνονται στη συνέχεια οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, έτσι ώστε μία συνάρτηση να έχει ακρότατα.

Θεώρημα 5.1.1 - 1 (αναγκαία συνθήκη ακρότατου). *Έστω η συνάρτηση* $f(x, y) \,|\, S \subseteq \Re^2$, *αντίστοιχα* $f(x, y, z) \,|\, S \subseteq \Re^3$ *όπου* S *ανοικτό σύνολο. Αν το σημείο* $P_0 = (x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ *είναι ένα ακρότατο (stationary point) της* f *και υπάρχουν όλες οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της* f *στο σημείο αυτό, τότε αυτές πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν.*

Ακρότατο συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στο παρακάτω θεώρημα γίνεται χρήση των εξής συμβολισμών:

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left. \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \right|_{(x_0, y_0)} . \qquad (5.1.1 - 1)$$

Θεώρημα 5.1.1 - 2 (ικανή συνθήκη ακρότατου). *Έστω η συνάρτηση* $f(x, y)$ $|S \subseteq \Re^2$, *όπου* S *ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν στο* S *και είναι συνεχείς συναρτήσεις όλες οι πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι. Αν το σημείο* $(x_0, y_0) \in S$ *είναι τέτοιο ώστε*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0, \qquad (5.1.1 - 2)$$

τότε, αν

I. $\Delta > 0$ *και*

   a. $A < 0$ *(ή* $C < 0$*), το* (x_0, y_0) *είναι θέση* **μεγίστου** *της* f,

   b. $A > 0$ *(ή* $C > 0$*), το* (x_0, y_0) *είναι θέση* **ελαχίστου** *της* f.

II. $\Delta < 0$, *τότε δεν υπάρχει ακρότατο. Στην περίπτωση αυτή το* (x_0, y_0) *είναι σημείο* **καμπής** *του διαγράμματος της* f.

III. $\Delta = 0$, *το θεώρημα δεν εφαρμόζεται, δηλαδή ενδέχεται να υπάρχει ή όχι ακρότατο.*

Σημειώσεις 5.1.1 - 1

i) Τα σημεία που επαληθεύουν τη συνθήκη $(5.1.1-2)$ λέγονται **κρίσιμα σημεία** (critical ή stationary points) και είναι θέσεις πιθανών ακρότατων της $f(x, y)$.

ii) Το σημείο (x_0, y_0) που επαληθεύει την $(5.1.1-1)$ πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, διαφορετικά δεν είναι σημείο πιθανού ακρότατου.

Παράδειγμα 5.1.1 - 1

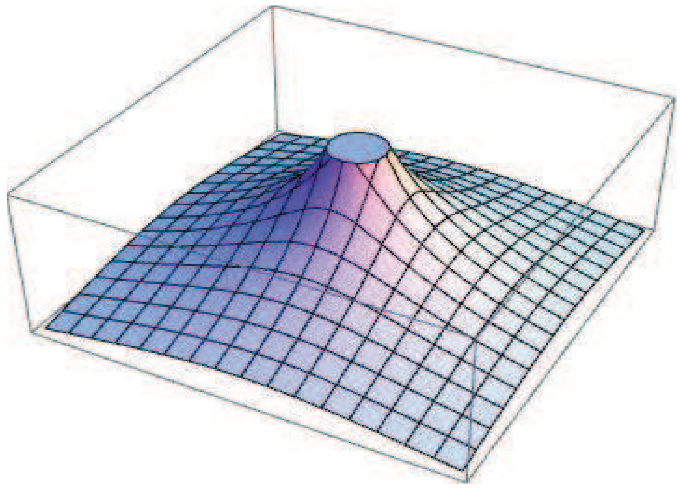
Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \Re^2 - (0, 0).$$

Τότε από τον τύπο $(5.1.1-2)$ προκύπτει

$$f_x = \frac{(x^2 + y^2)_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{και} \quad f_y = \frac{(x^2 + y^2)_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0,$$

οπότε $x = y = 0$, δηλαδή το σημείο $P(0, 0) \notin D$ (Σχ. 5.1.1 - 1) και επομένως το σημείο P δεν είναι πιθανό ακρότατο.



Σχήμα 5.1.1 - 1: Παράδειγμα 5.1.1 - 1

Παράδειγμα 5.1.1 - 2

Να μελετηθεί ως την ύπαρξη ακρότατων η συνάρτηση

$$f(x,y)=xy \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D=\Re^2.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(5.1.1-2)$ είναι $f_x=x=0$ και $f_y=y=0$, οπότε έχουμε πιθανό ακρότατο στο σημείο $P(0,0)$. Από τις σχέσεις $(5.1.1-1)$ προκύπτουν

$$A=f_{xx}=0,\;\; B=f_{xy}=1,\;\; C=f_{yy}=0,\;\; \Delta=-1<0.$$

Άρα σύμφωνα με τη συνθήκη (ΙΙ) του Θεωρήματος 5.1.1 - 2 το P είναι σημείο καμπής του διαγράμματος της f (Σχ. 5.1.1 - 2). ∎

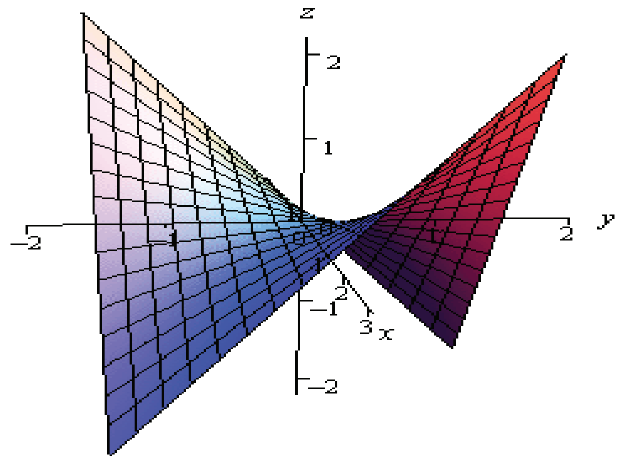
Παράδειγμα 5.1.1 - 3

Όμοια η συνάρτηση

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4 \quad \text{με} \quad D=\Re^2.$$

Λύση. Από τον τύπο $(5.1.1-2)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x=3x^2-3y &= 0\\ f_y=3y^2-3x &= 0. \end{aligned}$$



Σχήμα 5.1.1 - 2: Παράδειγμα 5.1.1 - 2

Τότε από την 1η εξίσωση προκύπτει $y = x^2$, οπότε αντικαθιστώντας στη 2η έχουμε

$$3\left(x^2\right)^2 - 3x = 3x\left(x^3 - 1\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Άρα τα πιθανά ακρότατα είναι στα σημεία:

$$P_1(0,0) \quad \text{και} \quad P_2(1,1).$$

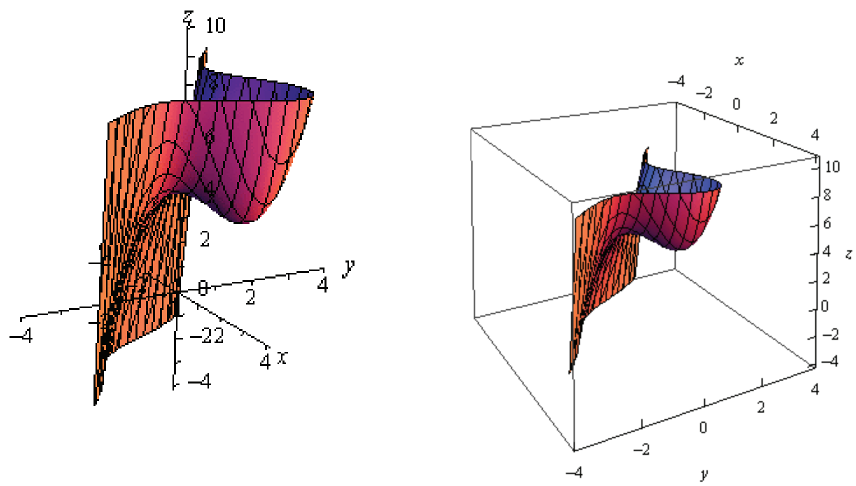
Από τις σχέσεις $(5.1.1 - 1)$ για το σημείο $(x, y) \in D$ έχουμε

$$\begin{aligned} A &= f_{xx} = 6x, \quad B = f_{xy} = -3, \quad C = f_{yy} = 6y \quad \text{και} \\ \Delta &= AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36\,xy - 9. \end{aligned}$$

Τότε από τις συνθήκες (I-III) του Θεωρήματος 5.1.1 - 2 για τα παραπάνω σημεία προκύπτουν (Σχ. 5.1.1 - 3):

P_1: $\Delta|_{P_1(0,0)} = -9 < 0$, δηλαδή είναι σημείο καμπής,

P_2: $\Delta|_{P_2(1,1)} = 27 > 0$ και $A|_{P_2(1,1)} = 6 > 0$, δηλαδή υπάρχει ελάχιστο με τιμή $f(1,1) = 3$.



Σχήμα 5.1.1 - 3: Παράδειγμα 5.1.1 - 3. Δύο διαφορετικές όψεις του διαγράμματος της $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$

■

Παράδειγμα 5.1.1 - 4

Όμοια η συνάρτηση

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 \quad \text{με} \quad D = \Re^2.$$

Λύση. Από τον τύπο $(5.1.1 - 2)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 6xy - 6x &= 0 \\ f_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 1η εξίσωση προκύπτει $6x(y-1) = 0$, δηλαδή ή $x = 0$ ή $y = 1$. Τότε από τη 2η εξίσωση έχουμε

$x = 0:$

$$3y^2 - 6y = 3y(y-2) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad y = 0 \quad \text{ή} \quad y = 2,$$

$y = 1:$

$$3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,2), \quad P_3(1,1) \quad \text{και} \quad P_4(-1,1).$$

Οι σχέσεις $(5.1.1-1)$, όταν εφαρμοστούν γενικά για το σημείο $(x,y) \in D$, δίνουν

$$\begin{aligned} A &= f_{xx} = 6y-6, \quad B = f_{xy} = 6x, \quad C = f_{yy} = 6y-6 \quad \text{και} \\ \Delta &= AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{vmatrix} = 36(y-1)^2 - 36x^2. \end{aligned}$$

Τότε από τις συνθήκες (I-III) του Θεωρήματος 5.1.1 - 2 για τα παραπάνω σημεία προκύπτουν (Σχ. 5.1.1 - 4):

P_1: $\Delta|_{P_1(0,0)} = 36 < 0$ και $A|_{P_1(0,0)} = -6 > 0$, δηλαδή υπάρχει μέγιστο (ολικό) με τιμή $f(0,0) = 2$,

P_2: $\Delta|_{P_2(0,2)} = 36 > 0$ και $A|_{P_2(0,2)} = 6 > 0$, δηλαδή ελάχιστο (ολικό) με τιμή $f(0,2) = -2$,

P_3: $\Delta|_{P_3(1,1)} = -36 < 0$ σημείο καμπής και

P_4: $\Delta|_{P_4(-1,1)} = -36 < 0$ όμοια σημείο καμπής.

■

Άσκηση

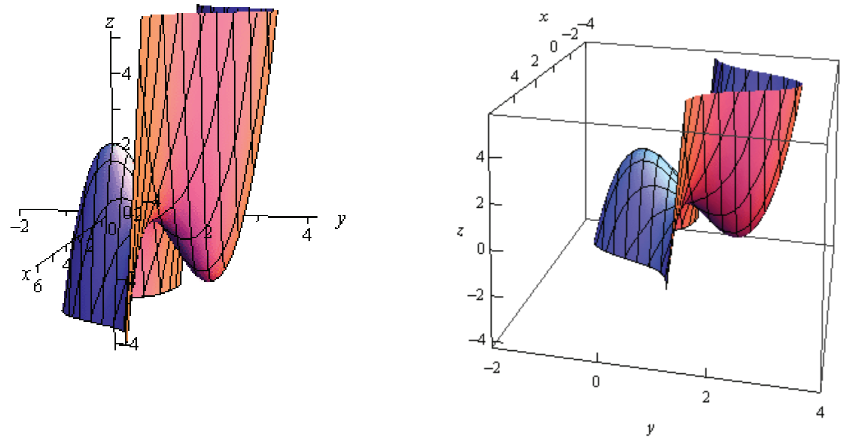
Να μελετηθούν για την ύπαρξη ακρότατων οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x,y)$:

$i)$ $x^2 + xy + y^2 + 5x - 5y + 3$ $\qquad ii)$ $x^3 - 6xy + y^3$

$iii)$ $x^3 - 3x + xy^2$ $\qquad iv)$ $e^{-x^2-y^2}$.

Ακρότατα συνάρτησης τριών μεταβλητών

Θεώρημα 5.1.1 - 3 (ικανή συνθήκη ακρότατου). *Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z)$ $|S \subseteq \Re^3$, όπου S ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν στο S και είναι*



Σχήμα 5.1.1 - 4: Παράδειγμα 5.1.1 - 4. Δύο διαφορετικές όψεις του διαγράμματος της $3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

συνεχείς συναρτήσεις όλες οι πρώτης και δευτέρας τάξης μερικές παράγωγοι. Έστω σημείο $P_0 = P_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in S$, *τέτοιο ώστε*

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial x} = \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial y} = \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial z} = 0. \qquad (5.1.1 - 3)$$

Αν

$$A = f_{xx}\left(x_0, y_0, z_0\right), \quad B = \left|\begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array}\right|_{P_0} \quad \text{και}$$

$$C = \left|\begin{array}{ccc} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{array}\right|_{P_0}, \qquad (5.1.1 - 4)$$

τότε η $f\left(x, y, z\right) | S \subseteq \Re^3$ *έχει:*

I. **μέγιστο**, *όταν* $A < 0$, $B > 0$ *και* $C < 0$,

II. **ελάχιστο**, *όταν* $A > 0$, $B > 0$ *και* $C > 0$.

Όμοια με τις Σημειώσεις 5.1.1 - 1 (I) τα σημεία που επαληθεύουν τη συνθήκη (5.1.1−3) λέγονται επίσης κρίσιμα σημεία και είναι θέσεις πιθανών ακρότατων της $f(x, y, z)$.

Παράδειγμα 5.1.1 - 5

Έστω η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 5$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(5.1.1 - 3)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 2x - 2 &= 0 \\ f_y = 2y &= 0 \\ f_z = 2z &= 0 \end{aligned}$$

από τη λύση του οποίου προκύπτει σαν πιθανό σημείο ακρότατου το $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$. Σύμφωνα με τις σχέσεις $(5.1.1 - 4)$ είναι

$$A = f_{xx}(1,0,0) = 2 > 0, \;\; B = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(1,0,0)} = 4 > 0 \text{ και}$$

$$C = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_{(1,0,0)} = 8 > 0,$$

δηλαδή επαληθεύεται η συνθήκη (II) του Θεωρήματος 5.1.1 - 3, οπότε στο σημείο $P(1, 0, 0)$ η f έχει ελάχιστο με τιμή $f(1, 0, 0) = -4$.

Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x, y, z)$

i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11$

ii) $x^2 + y^2 + z^2 + 3z + 1$.

5.1.2 Απόλυτα ακρότατα

[1]Επεκτείνοντας την έννοια των ακρότατων της Παραγράφου 4.3.1 ζητείται η **βελτιστοποίηση** (mathematical optimization) των τιμών μιας συνάρτησης, έστω $f(x, y)$, σε μια κλειστή περιοχή[2] του πεδίου ορισμού της D, όταν $D \subseteq \Re^2$. Το πρόβλημα αυτό ισοδυναμεί τότε με την εύρεση των **απόλυτων ακρότατων**, δηλαδή των απόλυτων ελάχιστων και μέγιστων της f στο D.

Η μελέτη των ακρότατων της κατηγορίας αυτής βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα (extreme value theorem):

Θεώρημα 5.1.2 - 1 *Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ορισμένη και συνεχής σε μια περιοχή $D \subseteq \Re^2$, τότε υπάρχουν σημεία (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in D$, έτσι ώστε η $f(x_1, y_1)$ να είναι η μέγιστη και η $f(x_1, y_1)$ η ελάχιστη τιμή της f στο D.*

Σημείωση 5.1.2 - 1

Η διαδικασία προσδιορισμού των απόλυτων ακρότατων γίνεται με τα παρακάτω βήματα:

I. υπολογισμός των κρίσιμων σημείων της f στο D,[3]

II. εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D.

III. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των περιπτώσεων (I) και (II) ορίζουν τότε τα απόλυτα ακρότατα της f στο D.

---

[1]Η παράγραφος αυτή δεν ανήκει στην εξεταστέα ύλη.

[2]Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 5.1.2 - 1 *Μια περιοχή στο $\Re^2$ θα λέγεται* **κλειστή***, όταν περιέχει και το σύνορό της, ενώ θα λέγεται* **ανοικτή***, όταν δεν το περιέχει.*

Επομένως η περιοχή $D = [-1, 1] \times [0, 2]$ είναι κλειστή, ενώ η $D = [-1, 1] \times [0, 2]$ ανοικτή.

Ορισμός 5.1.2 - 2 *Μια περιοχή στο $\Re^2$ θα λέγεται* **φραγμένη***, όταν είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι ανήκει σε ένα πεπερασμένο δίσκο.*

[3]Δεν απαιτείται η εφαρμογή του Θεωρήματος 5.1.1 - 3 στην περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 5.1.2 - 1

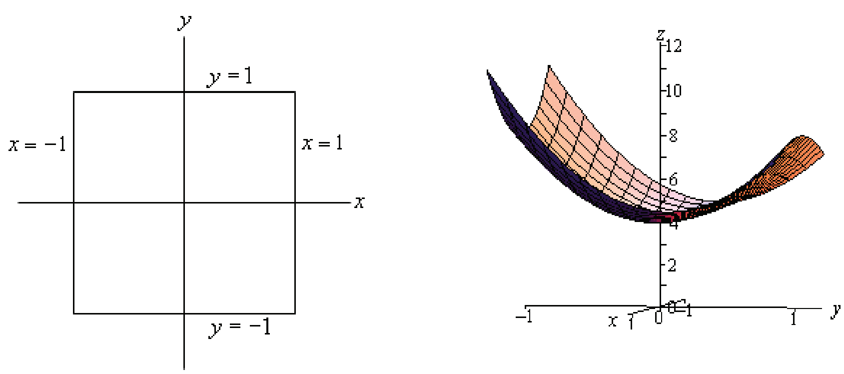
Να υπολογιστούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$$

στο τετράγωνο (Σχ. 5.1.2 - 1a)

$$D = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad -1 \le x \le 1 \text{ και } -1 \le y \le 1\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τη Σημείωση 5.1.2 - 1 έχουμε:



Σχήμα 5.1.2 - 1: Παράδειγμα 5.1.2 - 1: (a) το τετράγωνο $D = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad -1 \le x \le 1 \text{ και } -1 \le y \le 1\}$ και (b) το διάγραμμα της $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$, όταν $(x,y) \in D$.

βήμα I: Από τον τύπο $(5.1.1 - 2)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 2x - 4xy &= 0 \\ f_y = 8y - 2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 2η εξίσωση προκύπτει $y = \frac{x^2}{4}$, οπότε αντικαθιστώντας στην 1η έχουμε

$$x - 4x\,\frac{x^2}{4} = 2x - x^3 = x\left(2 - x^2\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0, \pm\sqrt{2}.$$

Επειδή όμως πρέπει οι τιμές να ανήκουν στο D, δεκτή γίνεται μόνον η τιμή $x = 0$. Αντικαθιστώντας την τιμή $x = 0$ στη 2η εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι $y = 0$. Άρα το κρίσιμο σημείο της f είναι το

$$P(0,0) \quad \text{με αντίστοιχη τιμή} \quad f(0,0) = 4. \tag{1}$$

βήμα II: Η εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D γίνεται ως εξής:

i) $x = 1, \quad -1 \leq y \leq 1$, οπότε $f(1,y) = g_1(y) = 4y^2 - 2y + 5$. Τότε $g_1'(y) = 8y - 2$, οπότε το κρίσιμο σημείο της g_1 υπολογίζεται από την εξίσωση $g_1'(y) = 0$, δηλαδή είναι το $y = \frac{1}{4} \in D$. Άρα για την περίπτωση αυτή έχουμε

$$P_1\left(1, \frac{1}{4}\right), \quad f\left(1, \frac{1}{4}\right) = g_1\left(\frac{1}{4}\right) = 4.75. \tag{2}$$

ii) $x = -1, \quad -1 \leq y \leq 1$, οπότε $f(-1,y) = g_2(y) = 4y^2 - 2y + 5 = g_1(y)$, δηλαδή είναι η περίπτωση (i).

iii) $y = 1, \quad -1 \leq x \leq 1$, οπότε $f(x,1) = f_1(x) = 8 - x^2$. Τότε $f_1'(x) = -2x$, οπότε το κρίσιμο σημείο της f_1 υπολογίζεται από την εξίσωση $f_1'(x) = 0$, δηλαδή είναι το $x = 0 \in D$. Άρα έχουμε

$$P_2\,(0,1)\,, \quad f\,(0,1) = f_1(0) = 8. \tag{3}$$

iv) $y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1$, οπότε $f(x,-1) = f_2(x) = 8 + 3x^2$. Τότε $f_2'(x) = 6x$, οπότε το κρίσιμο σημείο της f_2 όμοια υπολογίζεται ότι είναι το $x = 0 \in D$. Άρα έχουμε

$$P_3\,(0,-1)\,, \quad f\,(0,-1) = f_2(0) = 8. \tag{4}$$

v) Στα παραπάνω πιθανά σημεία των απόλυτων ακρότατων πρέπει να συνυπολογιστούν και οι κορυφές του τετραγώνου D, δηλαδή:

$$\begin{array}{llllcr} \text{σημείο:} & A_1\,(-1,-1) & \text{με τιμή} & f\,(-1,-1) & = & 11 \\ & A_2\,(1,-1) & & f\,(-1,1) & = & 11 \\ & A_3\,(1,1) & & f\,(1,1) & = & 7 \\ & A_4\,(-1,1) & & f\,(-1,1) & = & 7. \end{array} \tag{5}$$

βήμα III: Από τις (1)-(5) προκύπτουν τα εξής:

- το σημείο $P(0,0)$ ορίζει το απόλυτο ελάχιστο, επειδή η f έχει τη μικρότερη τιμή 4 από όλες τις άλλες σε αυτό,
- τα σημεία $B_1\,(-1,-1)$ και $B_2\,(1,-1)$ ορίζουν τις απόλυτα μέγιστες τιμές, επειδή η f έχει τη μεγαλύτερη τιμή 11 σε αυτά (Σχ. 5.1.2 - 1b). ■

Παράδειγμα 5.1.2 - 2

Όμοια τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y)=2x^2-y^2+6y$$

στον κυκλικό δίσκο

$$D=\{(x,y)\in\Re^2: \quad x^2+y^2\leq 16\}.$$

Λύση. Διαδοχικά σύμφωνα και με τη Σημείωση 5.1.2 - 1 έχουμε:

βήμα I: Από τον τύπο $(5.1.1-2)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x=4x &= 0\\ f_y=-2y+6 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα το κρίσιμο σημείο της f είναι το

$$P(0,3)\in D \quad \text{με αντίστοιχη τιμή} \quad f(0,3)=9. \tag{1}$$

βήμα II: Η εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D, δηλαδή στην περιφέρεια του κύκλου $x^2+y^2\leq 16$ γίνεται ως εξής:

i) από την εξίσωση $x^2+y^2=16$ προκύπτει $x^2=16-y^2$, οπότε αντικαθιστώντας στην f έχουμε

$$g(y)=2\left(16-y^2\right)-y^2+6y=32-3y^2+6y.$$

Επομένως το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή ανάγεται στην εύρεση των ακρότατων της g, όταν το y ανήκει στον παραπάνω κυκλικό δίσκο, δηλαδή, όταν $-4 \leq y \leq 4$. Τότε $g'(y) = -6y + 6$, οπότε $y = 1$ και επειδή $x^2 = 16 - y^2$, τελικά τα κρίσιμα σημεία για την περίπτωση αυτή είναι:

$$\begin{array}{llllll} \text{σημείο:} & P_1\left(-\sqrt{15}, 1\right) \in D & \text{με τιμή} & f\left(-\sqrt{15}, 1\right) & = & 35 \\ & P_2\left(\sqrt{15}, 1\right) \in D & & f\left(\sqrt{15}, 1\right) & = & 35. \end{array} \tag{2}$$

ii) Στα παραπάνω πιθανά σημεία των απόλυτων ακρότατων πρέπει να συνυπολογιστούν και εκείνα που προκύπτουν από τις τιμές στα άκρα του διαστήματος $[-4, 4]$ για τη μεταβλητή y, δηλαδή οι τιμές $y = \pm 4$ όπου προφανώς $x = 0$. Άρα έχουμε

$$\begin{array}{llllll} \text{σημείο:} & A_1\,(0, -4) & \text{με τιμή} & f\,(0, -4) & = & -40 \\ & A_2\,(0, 4) & & f\,(0, 4) & = & 8. \end{array} \tag{3}$$

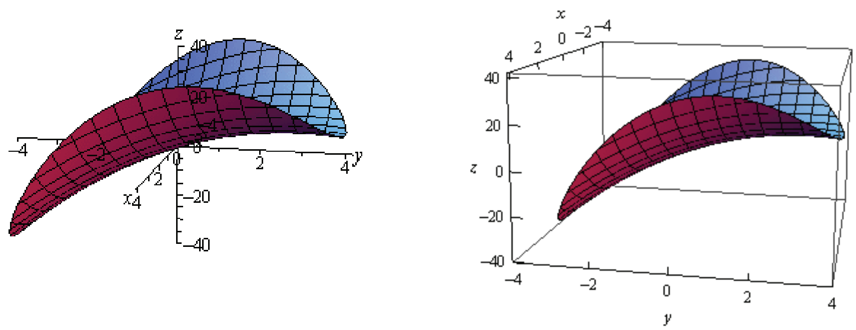
βήμα III: Από τις (1)-(3) προκύπτουν τα εξής:

- το σημείο $A_1\,(0, -4)$ ορίζει το απόλυτο ελάχιστο, επειδή η f έχει τη μικρότερη τιμή -40 από όλες τις άλλες σε αυτό,
- τα σημεία $P_1\left(-\sqrt{15}, 1\right)$ και $P_2\left(\sqrt{15}, 1\right)$ ορίζουν τις απόλυτα μέγιστες τιμές, επειδή η f έχει τη μεγαλύτερη τιμή 35 σε αυτά (Σχ. 5.1.2 - 2).

■

5.1.3 Ακρότατα με συνθήκες - Μέθοδος του Lagrange

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήθηκε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης των τιμών μιας συνάρτησης, έστω $f(x, y)$, σε μια κλειστή περιοχή του πεδίου ορισμού της f. Γενικεύοντας το παραπάνω πρόβλημα στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης $f(x, y)$, αντίστοιχα $f(x, y, z)$, όταν τα (x, y), αντίστοιχα τα (x, y, z) επαληθεύουν ορισμένες συνθήκες (constraints) της μορφής $\phi(x, y) = 0$, αντίστοιχα $\phi(x, y, z) = 0$ (coupling equation ή equality constraint). Τα ακρότατα του είδους αυτού είναι γνωστά σαν



Σχήμα 5.1.2 - 2: Παράδειγμα 5.1.2 - 2: Δύο διαφορετικές όψεις του διαγράμματος της $f(x,y)=2x^2-y^2+6y$, όταν $(x,y)\in D$.

ακρότατα με συνθήκη (conditional extremum) και είναι επίσης μια μορφή της με συνθήκη μαθηματικής βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης. Η μέθοδος λύσης που θα χρησιμοποιηθεί είναι γνωστή σαν **μέθοδος πολλαπλασιαστών του Lagrange** (Lagrange multipliers).

Περίπτωση μιας συνθήκης

Ζητείται ο προσδιορισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης, έστω $f(x,y)$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$, όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη

$$\phi(x,y)=0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \phi(x,y,z)=0. \tag{5.1.3 - 1}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange ορίζεται αρχικά μία βοηθητική συνάρτηση (auxiliary function)

$$\Lambda(x,y) = f(x,y)+\lambda\,\phi(x,y), \tag{5.1.3 - 2}$$

αντίστοιχα

$$\Lambda(x,y,z) = f(x,y,z)+\lambda\,\phi(x,y,z) \tag{5.1.3 - 3}$$

που λέγεται και συνάρτηση του Lagrange, στην οποία η παράμετρος λ είναι ένας προσδιοριστέος πολλαπλασιαστής. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται πλέον στον προσδιορισμό των ακρότατων της Λ. Έχοντας υπ' όψιν τις $(5.1.1-1)$

προκύπτει ότι οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \Lambda_x = f_x + \lambda\phi_x &= 0 \\ \Lambda_y = f_y + \lambda\phi_y &= 0, \end{aligned} \qquad (5.1.3 - 4)$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \Lambda_x = f_x + \lambda\phi_x &= 0 \\ \Lambda_y = f_y + \lambda\phi_y &= 0 \\ \Lambda_z = f_z + \lambda\phi_z &= 0. \end{aligned} \qquad (5.1.3 - 5)$$

Από τη λύση των παραπάνω συστημάτων θα προκύψουν οι άγνωστοι συναρτήσει του λ, δηλαδή $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$ και $z = z(\lambda)$. Αντικαθιστώντας στην $(5.1.3 - 1)$ προσδιορίζεται τότε το λ και στη συνέχεια οι τιμές x_0 και y_0, αντίστοιχα x_0, y_0 και z_0 που επαληθεύουν το σύστημα $(5.1.3 - 4)$, αντίστοιχα $(5.1.3 - 5)$.

Σημείωση 5.1.3 - 1

Όμοια, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, επειδή λόγω της συνθήκης $(5.1.3 - 1)$ το πεδίο ορισμού της f θα είναι μια φραγμένη περιοχή του $\Re^2$, αντίστοιχα του $\Re^3$, οπότε θα εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή το Θεώρημα 5.1.2 - 1. Τότε το σημείο $P\left(x_0, y_0\right)$, που προσδιορίζεται με την παραπάνω διαδικασία, θα είναι ακρότατο της $f(x, y)$ με συνθήκη τη $\phi(x, y) = 0$, αντίστοιχα το $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ θα είναι ακρότατο της $f(x, y, z)$ με συνθήκη τη $\phi(x, y, z) = 0$. Το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) υπολογίζεται από τις τιμές τις

$$f\left(x_0, y_0\right), \quad \text{αντίστοιχα} \quad f\left(x_0, y_0, z_0\right) \quad \text{στο σημείο} \quad P.$$

Παράδειγμα 5.1.3 - 1

Να προσδιοριστούν ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = xy \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x, y) = x + y - 1 = 0.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(5.1.3 - 2)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x, y) = xy + \lambda\left(x + y - 1\right).$$

Τότε από το σύστημα $(5.1.3 - 4)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = y + \lambda &= 0 \\ \Lambda_y = x + \lambda &= 0, \end{aligned} \quad \text{οπότε} \quad \begin{aligned} y &= -\lambda \\ x &= -\lambda. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη $\phi(x,y) = x + y - 1 = 0$ προκύπτει $-2\lambda = 1$, δηλαδή $\lambda = -\frac{1}{2}$. Άρα

$$x = y = \frac{1}{2}, \quad \text{δηλαδή το κρίσιμο σημείο είναι το} \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.1.3 - 1 ο προσδιορισμός του είδους του ακρότατου γίνεται αντικαθιστώντας στην f την τιμή $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, οπότε

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0, \quad \text{δηλαδή μέγιστο.}$$

■

Παράδειγμα 5.1.3 - 2

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y) = 5x - 3y \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x,y) = x^2 + y^2 - 136 = 0.$$

Λύση. Γεωμετρικά ζητείται ο προσδιορισμός των μέγιστων και των ελάχιστων τιμών των συντεταγμένων τομής του επιπέδου $z = f(x,y)$ με τον κύλινδρο $\phi(x,y)$ με βάση κυκλικό δίσκο ακτίνας $\sqrt{136}$. Σύμφωνα με την $(5.1.3 - 2)$ η συνάρτηση του Lagrange για την περίπτωση αυτή γράφεται

$$\Lambda(x,y) = 5x - 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 136\right).$$

Τότε από το σύστημα $(5.1.3 - 4)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = 2\lambda x + 5 &= 0 \\ \Lambda_y = 2\lambda y - 3 &= 0, \end{aligned} \quad \text{οπότε} \quad \begin{aligned} x &= -\frac{5}{2\lambda} \\ y &= \frac{3}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη $\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 136 = 0$ προκύπτει

$$\frac{25}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\,\lambda^2} = 136 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 = \frac{1}{16}, \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \pm\frac{1}{4}.$$

Επομένως, όταν

$$\lambda = \frac{1}{4} \quad \text{είναι} \quad x = -10 \quad \text{και} \quad y = 6 \quad \text{σημείο} \quad P_1(-10, 6),$$

$$\lambda = -\frac{1}{4} \qquad\qquad x = 10 \quad \text{και} \quad y = -6 \quad \text{σημείο} \quad P_2(10, -6).$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακρότατου, όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.1.3 - 1, αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στην f, δηλαδή

$$\begin{aligned} \text{σημείο} \quad P_1(-10, 6): \quad f(-10, 6) &= -68 < 0 \quad \text{ελάχιστο}, \\ P_2(10, -6): \quad f(10, -6) &= 68 > 0 \quad \text{μέγιστο}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5.1.3 - 3

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = xyz \quad \text{με συνθήκη την} \quad \phi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0,$$

όταν $x,\ y,\ z \geq 0$.

Λύση. Σύμφωνα με την $(5.1.3 - 3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x, y, z) = xyz + \lambda\,(x + y + z - 1)\,.$$

Τότε από το σύστημα $(5.1.3 - 5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = yz + \lambda &= 0 \\ \Lambda_y = zx + \lambda &= 0 \\ \Lambda_z = xy + \lambda &= 0, \end{aligned}$$

που γράφεται

$$yz = -\lambda \tag{1}$$

$$zx = -\lambda \tag{2}$$

$$xy = -\lambda. \tag{3}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $yz = zx$ ή $z(y-x) = 0$, οπότε διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις

$$\begin{aligned} z &= 0 \quad \text{ή} && (4) \\ y &= x && (5) \end{aligned}$$

- Αν ισχύει η (4), τότε από την (1) ή την (2) προκύπτει ότι $\lambda = 0$, οπότε από την (3) έχουμε $xy = 0$, δηλαδή $x = 0$ ή $y = 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τη συνθήκη $\phi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} z &= 0, \quad x = 0, \quad y = 1 \qquad \text{σημείο} \quad P_1(0,1,0) && (6) \\ z &= 0, \quad y = 0, \quad x = 1 \qquad \text{σημείο} \quad P_2(1,0,0) && (7) \end{aligned}$$

- Αν ισχύει η (5), τότε έχουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

  i) $x = y = 0$. Συνδυάζοντας με τη συνθήκη $\phi(x, y, z) = x+y+z-1 = 0$, προκύπτει $z = 1$, δηλαδή το σημείο

$$P_3(0, 0, 1). \tag{8}$$

  ii) $x = y \neq 0$. Τότε από τις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$xz = xy \quad \text{ή} \quad x(z-y) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad y = z$$

  και επειδή $x \neq 0$, πρέπει $y = z$. Άρα τελικά $x = y = z$. Τότε από τη συνθήκη $\phi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ έχουμε

$$3x = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{1}{3} \qquad \text{σημείο} \quad P_4\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \tag{9}$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακρότατου στις περιπτώσεις (6)-(9), όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.1.3 - 1, αντικαθιστούμε τις τιμές στην f, οπότε

$$\begin{aligned} &f(0,0,1) = 0, \quad f(0,1,0) = 0, \qquad f(1,0,0) = 0 \quad \text{ελάχιστα}, \\ &f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} \qquad \text{μέγιστο}. \end{aligned}$$

Σημείωση: στο παράδειγμα αυτό εξετάστηκε και η τιμή $\lambda = 0$. ■

Παράδειγμα 5.1.3 - 4

Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με το μέγιστο δυνατό όγκο, όταν το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι $64\,\mathrm{cm}^2$.

Λύση. Έστω x το μήκος, y το πλάτος και z το ύψος όπου $x,\, y,\, z > 0$. Τότε είναι γνωστό ότι ο όγκος δίνεται από το τύπο xyz, ενώ το εμβαδό είναι $2(xy + yz + zx)$. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = xyz \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x,y,z) = xy + yz + zx - 32 = 0.$$

Σύμφωνα με την $(5.1.3-3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\mathit{\Lambda}(x,y,z) = xyz + \lambda\left(xy + yz + zx - 32\right).$$

Τότε από το σύστημα $(5.1.3-5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathit{\Lambda}_x = yz + \lambda(y+z) &= 0 \\ \mathit{\Lambda}_y = zx + \lambda(z+x) &= 0 \\ \mathit{\Lambda}_z = xy + \lambda(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

που γράφεται

$$\begin{aligned} yz &= -\lambda(y+z) &(1)\\ zx &= -\lambda(z+x) &(2)\\ xy &= -\lambda(x+y). &(3) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με x, την (2) με y και την (3) με z προκύπτει

$$\begin{aligned} yz &= -\lambda(y+z) &(4)\\ zx &= -\lambda(z+x) &(5)\\ xy &= -\lambda(x+y) &(6) \end{aligned}$$

Από τις (5) και (6) έχουμε

$$-\lambda(y+z) = -\lambda(z+x), \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda(xz - yz) = 0,$$

οπότε

- ή $\lambda = 0$ που απορρίπτεται επειδή τότε $yz = 0$, οπότε ή $y = 0$ ή $z = 0$ άτοπο,
- ή $xz - yz = 0$ που, επειδή $z \neq 0$, δίνει

$$x = y. \tag{7}$$

Όμοια από τις (6) και (7) προκύπτει ότι

$$y = z. \tag{8}$$

Άρα $x = y = z$ και αντικαθιστώντας στην (4), δηλαδή στη συνθήκη $\phi(x, y, z) = xy + yz + zx - 32 = 3x^2 - 32 = 0$, επειδή $x,\ y,\ z > 0$, προκύπτει ότι η λύση είναι $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{\frac{32}{3}}$, δηλαδή υπάρχει ακρότατο στο σημείο

$$P\left(x_0, y_0, z_0\right) \quad \text{με τιμή} \quad f\left(x_0, y_0, z_0\right) \approx 10.67 > 0,$$

οπότε σύμφωνα και με την Παρατήρηση 5.1.3 - 1 έχουμε μέγιστο. ■

Παράδειγμα 5.1.3 - 5

Όμοια να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με το μέγιστο δυνατό όγκο, που περικλείεται από το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Λύση. Όπως προκύπτει από την εξίσωση του ελλειψοειδούς, το κέντρο του είναι το σημείο $(0, 0, 0)$. Επομένως το ίδιο σημείο θα πρέπει να και το κέντρο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οπότε οι κορυφές του θα είναι στα σημεία $(\pm x, \pm y, \pm z)$ όπου $x,\ y,\ z > 0$, οπότε ο όγκος του στην περίπτωση αυτή θα δίνεται από το τύπο $V = 2x\, 2y\, 2z = 8xyz$. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = 8xyz \quad \text{με συνθήκη την} \quad \phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Σύμφωνα με την $(5.1.3 - 3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x, y, z) = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

οπότε από το σύστημα $(5.1.3-5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = 8yz + 2\lambda\,\frac{x}{a^2} &= 0 \\ \Lambda_y = 8zx + \lambda\,\frac{y}{b^2} &= 0 \\ \Lambda_z = 8xy + \lambda\,\frac{z}{c^2} &= 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς λ τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$\lambda = -4a^2\,\frac{yz}{x} = -4b^2\,\frac{zx}{y} = -4c^2\,\frac{xy}{z}\,,$$

οπότε

$$y^2a^2 = x^2b^2 \quad \text{και} \quad z^2b^2 = y^2c^2, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \tag{1}$$

Τότε αντικαθιστώντας στη συνθήκη $\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ προκύπτει

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3\,\frac{x^2}{a^2}\,, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm\,\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Επειδή $x > 0$, προκύπτει ότι $x = \pm\,\frac{a}{\sqrt{3}}$, οπότε τελικά από την (1) έχουμε ακρότατο στο σημείο

$$P\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{με μέγιστο όγκο} \quad V(P) = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}\,.$$

Σημείωση: στο παράδειγμα αυτό δεν απαιτήθηκε ο υπολογισμός του λ. ■

Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα με συνθήκη των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{array}{llll} i) & x^2 + y^2, \text{ όταν } \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 & iii) & x^2 + y^2 + z^2, \text{ όταν } \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \\ ii) & x + 2y, \text{ όταν } x^2 + y^2 = 5 & iv) & \cos^2 x + \cos^2 y, \text{ όταν } x - y = -\dfrac{\pi}{4}\,. \end{array}$$

Περίπτωση δύο συνθηκών

[4]Ζητείται ο προσδιορισμός των πιθανών ακρότατων μιας συνάρτησης $f(x,y,z)$, όταν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$g(x,y,z)=0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad h(x,y,z)=0. \tag{5.1.3 - 24}$$

Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μιας συνθήκης, με τη μέθοδο του Lagrange ορίζεται η συνάρτηση

$$\Lambda(x,y,z) \;=\; f(x,y,z)+\lambda\, g(x,y,z)+\mu\, h(x,y,z) \tag{5.1.3 - 25}$$

στην οποία οι παράμετροι λ, μ είναι προσδιοριστέοι πολλαπλασιαστές, οπότε το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της Λ. Έχοντας υπ' όψιν τις $(5.1.1-1)$ προκύπτει ότι οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \Lambda_x = f_x+\lambda\, g_x+\mu\, h_x &= 0\\ \Lambda_y = f_y+\lambda\, g_y+\mu\, h_y &= 0\\ \Lambda_z = f_z+\lambda\, g_z+\mu\, h_z &= 0. \end{aligned} \tag{5.1.3 - 26}$$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος θα προκύψουν οι άγνωστοι συναρτήσει των λ, μ, δηλαδή $x=x(\lambda,\mu)$, $y=y(\lambda,\mu)$ και $z=z(\lambda,\mu)$. Αντικαθιστώντας στην $(5.1.3-24)$ προσδιορίζονται τα λ, μ και στη συνέχεια οι τιμές x_0, y_0 και z_0 που επαληθεύουν το σύστημα $(5.1.3-26)$.

5.1.4 Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων

Ο αναγνώστης θα έχει ήδη διαπιστώσει ότι η ολοκλήρωση συναρτήσεων της μορφής e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, κ.λπ., δεν γίνεται, επειδή με κανένα μετασχηματισμό η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν ανάγεται σε κάποια υπολογίσιμη μορφή. Ανάλογα τις περισσότερες φορές η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι αδύνατη με τις υπάρχουσες κλασικές μεθόδους, κ.λπ. Τότε μια λύση θα μπορούσε να δοθεί αν η συνάρτηση που δημιουργεί το πρόβλημα αντικατασταθεί με μια ευκολότερης μορφής συνάρτηση, όπως είναι η πολυωνυμική. Η αντικατάσταση

[4]Η παράγραφος αυτή δεν συμπεριλαμβάνεται στην εξεταστέα ύλη. Για γενίκευση του προβλήματος βλέπε βιβλιογραφία.

στην περίπτωση αυτή σημαίνει **προσέγγιση** της συνάρτησης με την πολυωνυμική, οπότε για την ακρίβεια της λύσης, πρέπει κάθε φορά να ελέγχεται και το σφάλμα που προκύπτει μετά από αυτή.

Ενδεικτικά γράφεται[5] ότι στα μαθηματικά θεωρητικά, δηλαδή δηλαδή δίνεται ο τύπος του πολυωνύμου, είναι δυνατή πάντοτε η προσέγγιση μιας συνεχούς συνάρτησης, έστω $f(x)$, με ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού n της μορφής[6]

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad (5.1.4 - 1)$$

όταν $a_i \in \Re$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$,ενώ μια προσέγγιση, που δίνει και τον τύπο του πολυωνύμου P, γίνεται από το παρακάτω πολυώνυμο του Taylor

$$f(x) \approx P_n(x) = f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x - x_0\right) + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n\,!}\left(x - x_0\right)^n,$$

όταν x_0 το κέντρο του παραπάνω αναπτύγματος. Η προσέγγιση όμως αυτή παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα, όπως:

- η ακρίβεια δεν αυξάνεται πάντοτε ανάλογα με τον βαθμό n του πολυωνύμου,
- απαιτείται η γνώση του κέντρου x_0,
- η προσέγγιση είναι ακριβής μόνον για τιμές του x πλησίον του x_0,
- απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων της f, που όμως τις περισσότερες φορές είναι δύσκολος ή και αδύνατος, κ.λπ.

Στο παραπάνω πρόβλημα της αντικατάστασης της $f(x)$ με ένα πολυώνυμο, θα πρέπει να προστεθεί επίσης και το πρόβλημα, που κυρίως εμφανίζεται

[5] Ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] για περαιτέρω μελέτη των διαφόρων μορφών προσέγγισης μιας συνάρτησης.

[6]

Θεώρημα 5.1.4 - 1 (Weierstrass). *Αν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[a,b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο P, έτσι ώστε*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a,b].$$

στις διάφορες εφαρμογές και είναι αυτό της προσέγγισης με πολυώνυμο ενός συνόλου δεδομένων (data) της μορφής

$$S = \{(x_i, y_i) \quad \text{με} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}. \qquad (5.1.4 - 2)$$

Η απάντηση στα παραπάνω δύο προβλήματα δίνεται ως εξής: έστω ότι x_0, $x_1, \ldots, x_n$ είναι $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a, b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού επίσης το $[a, b]$ και της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $f(x_i)$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$. Τότε ζητείται να προσδιοριστεί ένα πολυώνυμο, έστω P_n βαθμού $\leq n$ της μορφής $(5.1.4 - 1)$, έτσι ώστε (Σχ. 5.1.4 - 1):

I. $P_n(x_i) = f(x_i)$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$, που είναι γνωστό σαν πρόβλημα της **πολυωνυμικής παρεμβολής** (polynomial interpolation), και

II. το πολυώνυμο να προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ή διαφορετικά **άριστο τρόπο** (best approximation ή **best fitting**) τα σημεία S στην $(5.1.4 - 2)$. Τότε το πολυώνυμο αυτό για το συγκεκριμένο βαθμό θα δίνει και το ελάχιστο δυνατό σφάλμα. Το πρόβλημα είναι γνωστό σαν πρόβλημα της **διακριτής προσέγγισης** (discrete approximation).

Στη συνέχεια από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις θα εξεταστεί μόνον η II, που όπως θα διαπιστωθεί, είναι μια εφαρμογή των ακρότατων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

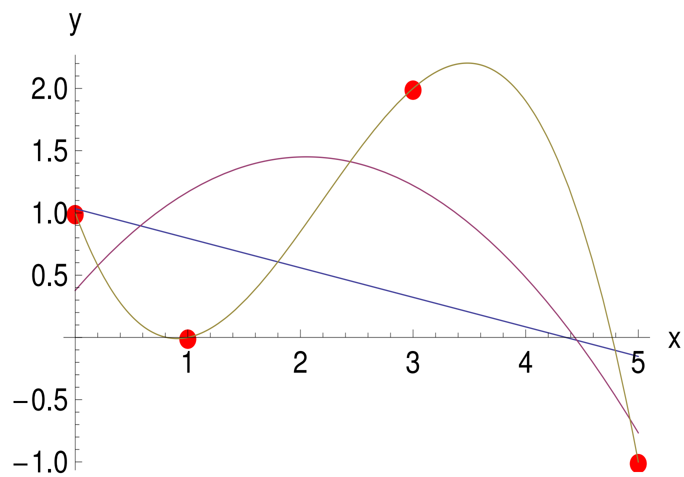
Περίπτωση I πολυώνυμο 1ου βαθμού

Έστω ότι το σύνολο των σημείων S στην $(5.1.4 - 2)$ προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού της μορφής

$$P_1(x) = P(x) = ax + b, \qquad (5.1.4 - 3)$$

δηλαδή η προσέγγιση των δεδομένων γίνεται με μια ευθεία. Αν θεωρηθεί το σημείο $(x_i, y_i) \in S$, τότε η τιμή y_i προσεγγίζεται από την τιμή $\tilde{y}_i = P(x_i) = ax_i + b$, οπότε το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης στην περίπτωση αυτή θα είναι $e_i = |y_i - \tilde{y}_i| = |y_i - (ax_i + b)|$. Επομένως για το ολικό σφάλμα, έστω $\tilde{E}$, θα έχουμε

$$\tilde{E} = \tilde{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_n = |y_1 - (ax_1 + b)| + \ldots + |y_n - (ax_n + b)|. \qquad (5.1.4 - 4)$$



Σχήμα 5.1.4 - 1: Δεδομένα: $S = \{(0,1),(1,0),(3,2),(5,-1)\}$. Προσέγγιση με: παρεμβολή (πράσινη καμπύλη) και με διακριτή προσέγγιση: 1ου βαθμού - ευθεία (μπλε) και 2ου βαθμού - παραβολή (κόκκινη) καμπύλη

Προφανώς $\tilde{E} = \tilde{E}(a,b)$, δηλαδή μια συνάρτηση των a, b. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό των a και b, έτσι ώστε το σφάλμα $\tilde{E}$ στην (5.1.4−4) να είναι ελάχιστο. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (5.1.1−2) η αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = 0. \qquad (5.1.4 - 5)$$

Εύκολα όμως διαπιστώνεται ότι η $(5.1.4-5)$ λόγω και του απολύτου δεν παραγωγίζεται[7], οπότε το πρόβλημα στη μορφή αυτή δε λύνεται.

Στη **διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων** (discrete least squares method), σε αντίθεση με την $(5.1.4-4)$, προσδιορίζονται οι σταθερές a και b, έτσι ώστε το ολικό τετραγωνικό σφάλμα E, δηλαδή το

$$E = e_1^2 + \ldots + e_n^2 = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \quad (5.1.4 - 6)$$

[7] Έστω για ευκολία ότι απαλείφονται τα απόλυτα. Τότε

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = -x_1 - \ldots - x_n = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = -1 - \ldots - 1 = -n = 0$$

άτοπο.

να είναι **ελάχιστο**. Τότε από την $(5.1.4-6)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a x_i - b)\, x_i = 0 \quad \text{και}\\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a x_i - b) = 0\end{aligned}$$

που τελικά γράφεται μετά τις πράξεις ως εξής:

$$\begin{aligned}a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^0}^{n} &= \sum_{i=1}^{n} y_i.\end{aligned} \tag{5.1.4 - 7}$$

Το γραμμικό σύστημα $(5.1.4-7)$ λέγεται τότε και **σύστημα κανονικών εξισώσεων** (normal equations) και από τη λύση του προκύπτει ότι:

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{5.1.4 - 8}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{5.1.4 - 9}$$

Παράδειγμα 5.1.4 - 1

Να προσδιοριστεί με την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο πρώτου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα:

x_i	-0.5	0.3	0.7	1.5
y_i	1.2	2.0	1.0	-1.0

Πίνακας 5.1.4 - 1: Παράδειγμα 5.1.4 - 1

x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2
-0.5	1.2	-0.6	0.25
0.3	2.0	0.6	0.09
0.7	1.0	0.7	0.49
1.5	-1.0	-1.5	2.25
2.0	3.2	-0.8	3.08

Λύση. Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα δημιουργείται ο Πίνακας 5.1.4 - 1. Τότε από τους τύπους $(5.1.4-9)$ και $(5.1.4-9)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\cdot(-0.8)-2\cdot(3.2)}{4\cdot(3.08)-2^2} \approx -1.1539 \quad \text{και} \\ b &= \frac{(3.08)\cdot(3.2)-(-0.8)\cdot 2}{4\cdot(3.08)-2^2} \approx 1.3769, \end{aligned}$$

δηλαδή $P(x) = -1.1539\,x + 1.3769$ (Σχ. 5.1.4 - 2). ■

Περίπτωση ΙΙ **πολυώνυμο m-βαθμού**

Στην περίπτωση αυτή ζητείται η προσέγγιση του συνόλου S στην $(5.1.4-2)$ με ένα πολυώνυμο m-βαθμού της μορφής $(5.1.4-1)$, δηλαδή

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

όταν

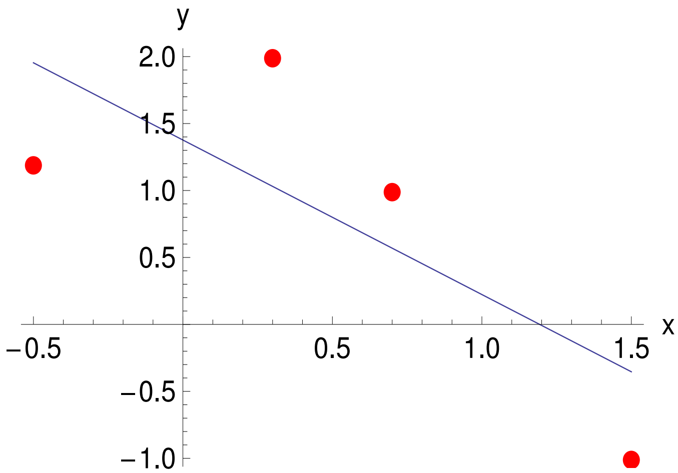
$$\mathbf{m} < \mathbf{n\ \text{-}\ 1}. \tag{5.1.4 - 10}$$

Τότε, όμοια με την Περίπτωση Ι, εκλέγονται οι σταθερές a_0, a_1, …, a_m, έτσι ώστε το σφάλμα[8]

$$E = e_1^2 + \ldots + e_n^2 = \left[y_1 - P_m\left(x_1\right)\right]^2 + \ldots + \left[y_n - P_m\left(x_n\right)\right]^2$$

να είναι ελάχιστο.

[8] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 7.



Σχήμα 5.1.4 - 2: Παράδειγμα 5.1.4 - 1. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -1.1539\,x + 1.3769$

Όπως και στην περίπτωση του πολυωνύμου 1ου βαθμού μία αναγκαία συνθήκη προκύπτει από τον τύπο $(5.1.1 - 2)$ ως εξής:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{για κάθε} \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, m. \tag{5.1.4 - 11}$$

Από την (5.1.4—11) τελικά[9] έχουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα **κανονικών εξισώσεων** με $m+1$ εξισώσεις και $m+1$ αγνώστους τους συντελεστές a_j του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^1 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.1.4 - 12}$$

[9] Το σύστημα $(5.1.4 - 11)$ γράφεται $\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k} = 0$, οπότε $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{για κάθε} \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$. Να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \, x_i^m \, .$$

στο οποίο ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι συμμετρικός.

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα $(5.1.4-12)$ έχει ακριβώς μία λύση, όταν τα σημεία x_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι **διαφορετικά** μεταξύ τους.

Σημείωση 5.1.4 - 1

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να διευκρινιστεί ότι μια γενίκευση του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή η προσέγγιση των σημείων S με ένα πολυώνυμο $P_m(x)$ με την απαίτηση το άθροισμα των σφαλμάτων $E = \sum_{i=1}^{n} e_i^k$ με $k \geq 3$, να είναι ελάχιστο, καταλήγει μετά και την εφαρμογή της συνθήκης $(5.1.4-11)$ σε μη γραμμικό σύστημα. Επομένως η μέθοδος με την απαίτηση αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη.

Παράδειγμα 5.1.4 - 2

Να προσδιοριστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο 2ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα του Παραδείγματος 5.1.4 - 1.
Λύση. Επειδή ο αριθμός των σημείων είναι $n = 4$, σύμφωνα με τη συνθήκη $(5.1.4-10)$ ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός m του πολυωνύμου θα είναι $m < 4-1$, δηλαδή $m = 2$. Έστω $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε το σύστημα $(5.1.4-12)$ γράφεται

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^0 \quad &+ \quad a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 \quad + \quad a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{4} y_i \, x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 \quad &+ \quad a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \quad + \quad a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 \quad = \quad \sum_{i=1}^{4} y_i \, x_i^1 \quad , \\
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \quad &+ \quad a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 \quad + \quad a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^4 \quad = \quad \sum_{i=1}^{4} y_i \, x_i^2 ,
\end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με τον Πίνακα 5.1.4 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}
4a_0 \quad &+ \quad 2.0a_1 \quad + \quad 3.08a_2 \quad = \quad 3.2 \\
2.0a_0 \quad &+ \quad 3.08a_1 \quad + \quad 3.62a_2 \quad = \quad -0.8 \\
3.08a_0 \quad &+ \quad 3.62a_1 \quad + \quad 5.3732a_2 \quad = \quad -1.28
\end{aligned}$$

Πίνακας 5.1.4 - 2: Παράδειγμα 5.1.4 - 2

x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2\,y_i$
-0.5	1.2	-0.6	0.25	-0.125	0.0625	0.30
0.3	2.0	0.6	0.09	0.027	0.0081	0.18
0.7	1.0	0.7	0.49	0.343	0.2401	0.49
1.5	-1.0	-1.5	2.25	3.375	5.0625	-2.25
2.0	3.2	-0.8	3.08	3.62	5.3732	-1.28

από τη λύση[10] του οποίου προκύπτει ότι το πολυώνυμο είναι (Σχ. 5.1.4 - 3)

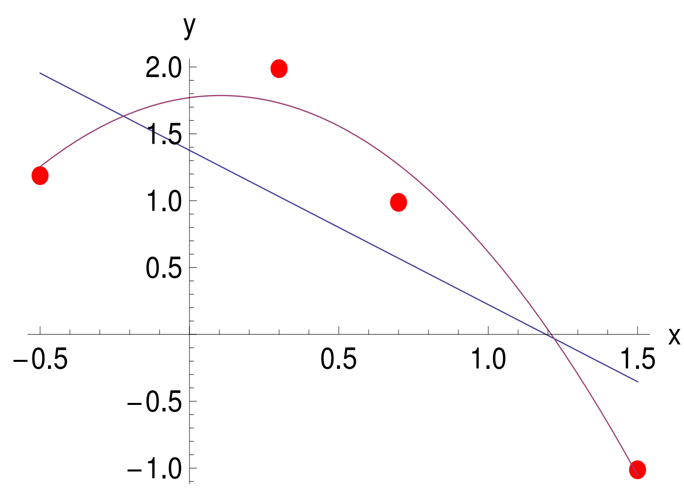
$$P_2(x) = -1.4583\,x^2 + 0.3045\,x + 1.7707.$$

■

[11]

[10]Η λύση του συστήματος δεν είναι στην εξεταστέα ύλη.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/



Σχήμα 5.1.4 - 3: Παράδειγμα 5.1.4 - 2. Η καμπύλη ορίζεται από το πολυώνυμο $P_2(x) = -1.4583\,x^2 + 0.3045\,x + 1.7707$, ενώ η ευθεία (Παράδειγμα 5.1.4 - 1) έχει εξίσωση $y = -1.1539\,x + 1.3769$

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων