**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα**

**Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας**

# Ανώτερα Μαθηματικά Ι

**Ενότητα 3:** Πραγματικές Συναρτήσεις

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# Μάθημα 3

# ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότεροι ορισμοί και θεωρήματα για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, που θεωρούνται απαραίτητοι για τα επόμενα μαθήματα.

## 3.1 Ορισμοί

**Ορισμός 3.1 - 1 (συνάρτησης).** *Έστω $D$ και $T$ δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\Re$. Τότε λέγεται συνάρτηση, μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω $f$, του συνόλου $D$ στο $T$, δηλαδή*

$$f: \qquad D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T. \tag{3.1 - 1}$$

Το σύνολο $D$ λέγεται πεδίο ορισμού, ενώ το $T$ πεδίο τιμών της συνάρτησης $f$. Στο εξής μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $D$ θα συμβολίζεται με $f|D$ ή και $f(x)$, $x \in D$. Το $x$, που περιγράφει τις τιμές του $D$, λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το $y$, που ορίζει τις αντίστοιχες τιμές του $x$ στο $T$, εξαρτημένη μεταβλητή. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η απεικόνιση $f$, περιγράφεται από τη σχέση $f(x)$, που λέγεται τύπος της συνάρτησης.

**Παράδειγμα 3.1 - 1**

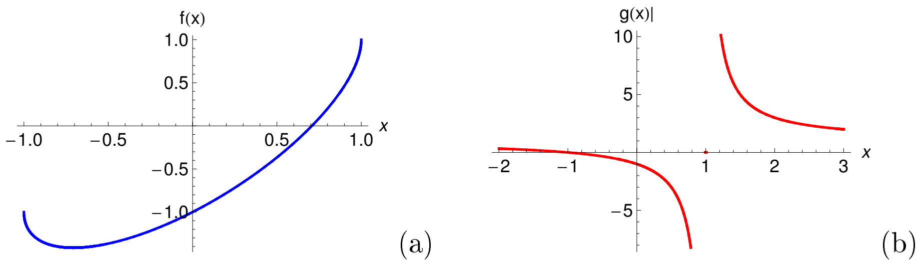
Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1 - 1, αν $D = \{0, 2, 5\}$, τότε ο τύπος

- $f(x) = x^2$ ορίζει συνάρτηση, επειδή κάθε στοιχείο του $D$ μέσω της $f$ απεικονίζεται σε ένα στοιχείο (μονοσήμαντη απεικόνιση), δηλαδή: $f(0) \to 0$, $f(2) \to 4$ και $f(5) \to 25$, οπότε $T = \{0, 4, 25\}$ ενώ ο

- $g(x) = \pm\sqrt{x}$ δεν ορίζει, επειδή τα στοιχεία του $D$ απεικονίζονται σε δύο στοιχεία, όπως $f(2) \to \pm\sqrt{2}$, κ.λπ.

Η συνάρτηση είναι δυνατόν να παρασταθεί γραφικά στο καρτεσιανό επίπεδο $D \times T \subseteq \Re^2$ από το διάγραμμά της ή τη γραφική της παράσταση $G_f$ (Σχ. 3.1 - 1), όπου

$$G_f = \{\, (x, f(x)) : \quad \text{για κάθε } x \in D\} \subseteq D \times T. \qquad (3.1 - 2)$$




**Σχήμα** 3.1 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ με $D = [-1, 1]$ και (b) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ με $D = \Re - \{1\}$

Αν η συνάρτηση εκφράζεται με τον τύπο $y = f(x)$, τότε θα λέγεται ότι η σχέση που συνδέει τη μεταβλητή $y$ με τη μεταβλητή $x$, είναι **λυμένη** (explicit) ως προς τη μεταβλητή $y$. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που η $y$ δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί στη μορφή $y = f(x)$. Στις περιπτώσεις αυτές είναι γνωστή μόνον η σχέση που συνδέει τα $x$ και $y$, δηλαδή επαληθεύεται μία σχέση της μορφής $f(x, y) = 0$. Τότε λέγεται ότι η συνάρτηση $y$ δίνεται με **πεπλεγμένη** (implicit) μορφή.

**Παράδειγμα 3.1 - 2**

Αν $y = y(x)$, τότε η συνάρτηση $y = x^2 + 3x + 2$ εκφράζεται με λυμένη μορφή, ενώ η $e^y - x - y = 0$ με πεπλεγμένη, επειδή η σχέση αυτή δε λύνεται ως προς $y$.

## Προσδιορισμός του πεδίου ορισμού

Στην περίπτωση που ζητείται να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, όταν είναι γνωστός ο τύπος της, πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν τα εξής:

- οι περιορισμοί που υπάρχουν από την ίδια τη συνάρτηση όπως ρίζα, λογάριθμος κ.λπ., έτσι ώστε ο τύπος της να ορίζεται, και
- οι πράξεις που είναι σημειωμένες στον τύπο της συνάρτησης να έχουν έννοια -επιτρεπτές πράξεις- στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

  Υπενθυμίζεται ότι οι **μη επιτρεπτές πράξεις** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι οι:

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\,\infty, \quad \infty\,0, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0. \qquad (3.1 - 3)$$

**Παράδειγμα 3.1 - 3**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 5x + 1.$$

Τότε προφανώς είναι $D = \Re$.

**Παράδειγμα 3.1 - 4**

Όμοια η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x+1}{(x-3)\,(x^2+4)}.$$

Τότε θα πρέπει $(x-3)\,(x^2+4) \neq 0$. Επειδή $x^2 + 4 \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, αρκεί $x \neq 3$, δηλαδή $D = \Re - \{3\}$.

**Πίνακας** 3.1 - 1: Παράδειγμα 3.1 - 5

| Συνάρτηση | $-\infty$ | -2 | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | - | - | + | |
| $x+2$ | - | + | + | |
| $x(x+2)$ | + | - | + | |

**Παράδειγμα 3.1 - 5**

Όμοια η

$$h(x)=\sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$

Πρέπει

$$\frac{x}{x+2}\geq 0 \quad \text{και} \quad x+2\neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$x(x+2)\geq 0 \quad \text{και} \quad x+2\neq 0.$$

Τότε σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1 - 1 προκύπτει ότι $x<-2$ ή $x\geq 0$. Άρα $D=(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$.

### Αντίστροφη συνάρτηση

**Ορισμός 3.1 - 2 (αντίστροφης συνάρτησης).** *Έστω μία συνάρτηση*

$$f: \qquad D\ni x \longrightarrow f(x)=y\in T$$

*και $T^*\subseteq T$. Αν η απεικόνιση $f^*$ με*

$$f^*: \qquad T\ni y \longrightarrow f^*(y)=x\in D \tag{3.1 - 4}$$

*είναι επίσης μονοσήμαντη, τότε ορίζει την* **αντίστροφη συνάρτηση** *της $f$, που συμβολίζεται με $f^{-1}$.*

**Σημειώσεις 3.1 - 1**

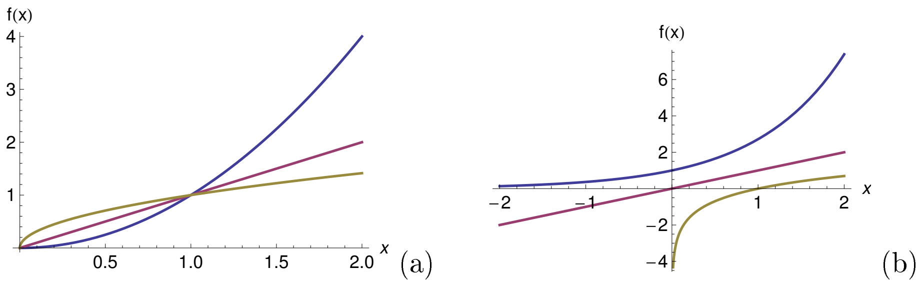
i) Το $f^{-1}$ είναι συμβολισμός και δεν πρέπει να συγχέεται με το $1/f$.

ii) Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης υπολογίζεται, όταν η εξίσωση $f(x) = y$ λυθεί ως προς $x$ (Παράδειγμα 3.1 - 6). Επειδή όμως τις περισσότερες φορές η λύση της εξίσωσης είναι αδύνατη (Παράδειγμα 3.1 - 7), ο τύπος της και όταν ακόμα είναι γνωστό ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση, δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί.

iii) Το διάγραμμα της $f$ και της $f^{-1}$ εφόσον υπάρχει, είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$ (Σχ. 3.1 - 2).

iv) στην περίπτωση που ισχύει ο Ορισμός 3.1 - 2, δηλαδή ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, λέγεται ότι η $f$ ορίζει μια **αμφιμονοσήμαντη** ή **ένα προς ένα** απεικόνιση. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 3.1 - 1.** *Η συνάρτηση $f$ έχει αντίστροφη συνάρτηση τότε και μόνον, όταν η $f$ είναι αμφιμονοσήμαντη.*




**Σχήμα** 3.1 - 2: Ευθεία $y = x$ κόκκινη γραμμή. (a) Συνάρτηση $f(x) = x^2$ μπλε, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ πράσινη καμπύλη, όταν $x > 0$ και (b) $e^x$ μπλε, $\ln x$ πράσινη καμπύλη

Στα παραδείγματα που δίνονται στη συνέχεια, υποτίθεται ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση.

**Παράδειγμα 3.1 - 6**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \Re - \{1\}.$$

Να υπολογιστεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης.

**Λύση.** Έστω

$$\frac{2x+1}{x-1}=y \quad \text{οπότε} \quad x=\frac{y+1}{y-2} \quad \text{με} \quad T^{*}=\Re-\{2\}.$$

Άρα

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-2}\,.$$

**Παράδειγμα 3.1 - 7**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=e^{x}-x, \quad \text{όταν το πεδίο ορισμού είναι} \quad D=[,+\infty).$$

Τότε, επειδή η εξίσωση $e^{x}-x=y$ δεν λύνεται ως προς $x$, είναι αδύνατος ο υπολογισμός του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης.

### Σύνθετη συνάρτηση

**Ορισμός 3.1 - 3 (σύνθετης συνάρτησης).** *Έστω $A$, $B$, $\Gamma$ τρία τυχόντα σύνολα διάφορα του κενού και $g|A$ μία συνάρτηση με πεδίο τιμών το $B$ και $f|B$ μία συνάρτηση με πεδίο τιμών το $\Gamma$. Τότε ορίζεται μία συνάρτηση $h|A$ με πεδίο τιμών το $\Gamma$, που συμβολίζεται με $f\circ g$, από τον τύπο*

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad \textit{για κάθε} \quad x\in A \tag{3.1 - 5}$$

*και λέγεται σύνθετη συνάρτηση των $f$, $g$.*

Είναι προφανές ότι η σύνθεση συναρτήσεων πληροί την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

**Παράδειγμα 3.1 - 8**

Έστω οι συναρτήσεις

$$g(x)=3x-1 \quad \text{και} \quad f(x)=\sin x.$$

Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ και είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(3x - 1)$$

όπου για τα πεδία ορισμού είναι $D(f) = D(g) = D(f \circ g) = \Re$, ενώ για τα πεδία τιμών $T(g) = \Re$ και $T(f) = T(f \circ g) = [-1,\, 1]$.

**Παράδειγμα 3.1 - 9**

Όμοια η σύνθεση των συναρτήσεων

$$g(x) = -x^2 \quad \text{και} \quad f(x) = e^x$$

δίνει

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{-x^2}$$

[1]όπου $D(f) = D(g) = D(f \circ g) = \Re$, ενώ $T(f) = \Re$ και $T(g) = T(f \circ g) = (0, +\infty)$.

## 3.2 Άλγεβρα συναρτήσεων

### 3.2.1 Ισότητα

**Ορισμός 3.2 - 1.** *Οι συναρτήσεις $f,\, g|D$ λέγονται* **ίσες** *και συμβολίζεται αυτό με $f = g$ στο $D$ τότε και μόνον, όταν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$.*

Προφανώς η ισότητα είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική, οπότε ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού $D$.

### 3.2.2 Διάταξη

**Ορισμός 3.2 - 2.** *Έστω οι συναρτήσεις $f,\, g|D$. Τότε θα είναι $f \leq g$ τότε και μόνον, όταν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in D$.*

Η σχέση αυτή είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική, οπότε ορίζει μία **σχέση διάταξης** στο σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού $D$, η οποία όμως δεν είναι γραμμική. Αντίστοιχα ορίζεται η δυϊκή της σχέση $f \geq g$.

[1]Βλέπε Παράγραφο 3.4.6.

### 3.2.3 Πρόσθεση

**Ορισμός 3.2 - 3.** *Έστω οι συναρτήσεις $f,\ g|D$. Τότε ορίζεται σαν άθροισμά τους η συνάρτηση $h = f + g|D$, όπου*

$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \tag{3.2 - 1}$$

Το άθροισμα γενικεύεται για $\nu$ το πλήθος συναρτήσεις.

**Ιδιότητες**

i) αντιμεταθετική $f + g = g + f$ για κάθε $f,\ g|D$,

ii) προσεταιριστική $f + (g + h) = (f + g) + h$ για κάθε $f,\ g,\ h|D$,

iii) υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού $D$, που λέγεται **μηδενική** συνάρτηση και συμβολίζεται με $\tilde{O}$, τέτοια ώστε $\tilde{O}(x) = 0$ για κάθε $x \in D$ και για την οποία ισχύει $f + \tilde{O} = \tilde{O} + f = f$ για κάθε $f|D$,

iv) για κάθε $f|D$ υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση η $-f|D$, που λέγεται **αντίθετη** συνάρτηση της $f$ στο $D$, τέτοια ώστε $f + (-f) = \tilde{O}$,

v) στο $D$ ισχύει η ισοδυναμία: αν $f + h = g + h$, τότε $f = g$ για κάθε $f,\ g,\ h|D$ (νόμος της διαγραφής στην πρόσθεση),

v) για κάθε $f,\ g,\ X|D$ η εξίσωση $f + X = g|D$ έχει μοναδική λύση την $X = g + (-f)$.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής λέγεται διαφορά της $f$ από την $g$ και συμβολίζεται με $g - f$, ενώ η πράξη με την οποία υπολογίζεται η διαφορά των δύο συναρτήσεων λέγεται **αφαίρεση**.

### 3.2.4 Πολλαπλασιασμός

**Ορισμός 3.2 - 4.** *Έστω οι συναρτήσεις $f,\ g|\,D$. Τότε ορίζεται σαν γινόμενό τους η συνάρτηση $h = f \cdot g = f\,g|\,D$, όταν*

$$h(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \tag{3.2 - 2}$$

Όμοια ο πολλαπλασιασμός γενικεύεται για $\nu$ το πλήθος συναρτήσεις.

**Ιδιότητες**

i) αντιμεταθετική $fg = gf$ για κάθε $f$, $g|D$,

ii) προσεταιριστική $f(gh) = (fg)h$ για κάθε $f$, $g$, $h|D$,

iii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση $f(g+h) = fg + fh$ για κάθε $f$, $g$, $h|D$,

iv) υπάρχει στο $D$ ακριβώς μία συνάρτηση, που λέγεται **μοναδιαία** συνάρτηση και συμβολίζεται με $e$, τέτοια ώστε $e(x) = 1$ για κάθε $x \in D$ και για την οποία ισχύει ότι $fe = ef = f$ για κάθε $f|D$,

v) αν $f|D$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$, τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f^* = 1/f\,|D$, τέτοια ώστε $ff^* = e$,

vi) στο $D$ ισχύει η ισοδυναμία: αν $fh = gh$ και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$, τότε $f = g$ (νόμος της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό),

vii) για κάθε $f$, $g$, $X|D$ η εξίσωση $fX = g|D$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$ έχει μοναδική λύση την $X = g/f$.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής λέγεται πηλίκο της $g$ προς την $f$ και συμβολίζεται με $g/f$. Η πράξη με την οποία υπολογίζεται το πηλίκο δύο συναρτήσεων, λέγεται **διαίρεση**.

## 3.3 Είδη συναρτήσεων

### 3.3.1 Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

**Ορισμός 3.3 - 1.** *Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται* **άρτια**, *όταν για κάθε $x$, $-x \in D$ ισχύει*

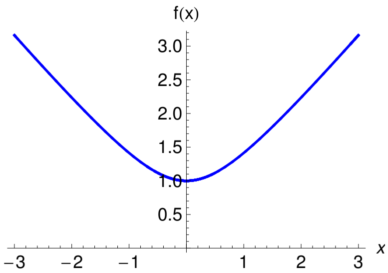
$$f(-x) = f(x). \tag{3.3 - 1}$$

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος μιας άρτιας συνάρτησης είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα $Oy$. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $\cos x$, $\left(x^2+1\right)^{1/2}$ (Σχ. 3.3 - 1a), κ.λπ.

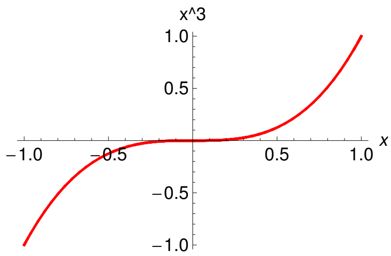
**Ορισμός 3.3 - 2.** *Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται* **περιττή**, *όταν για κάθε $x$, $-x \in D$ ισχύει*

$$f(-x) = -f(x). \tag{3.3 - 2}$$

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος μιας περιττής συνάρτησης είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων $O$. Όμοια παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $x^3$ (Σχ. 3.3 - 1b), $\sin x$, κ.λπ.



(a)



(b)

**Σχήμα** 3.3 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \left(x^2+1\right)^{1/2}$ και (b) $x^3$

Άμεσα προκύπτει από τους παραπάνω ορισμούς ότι:

**Πρόταση 3.3 - 1.** *Αν η $f$ είναι άρτια και η $g$ περιττή συνάρτηση, τότε το γινόμενο τους είναι περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο δύο περιττών ή δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.*

### 3.3.2 Μονοτονία συνάρτησης

**Ορισμός 3.3 - 3 (μονοτονίας).** *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και $x_1$, $x_2 \in D$, όπου χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα υποτίθεται ότι $x_1 < x_2$. Τότε, αν:*

*i)* $f(x_1) \leq f(x_2)$ *η $f$ θα λέγεται αύξουσα και θα συμβολίζεται με* $\uparrow$.

*ii)* $f(x_1) \geq f(x_2)$ *η $f$ θα λέγεται φθίνουσα και θα συμβολίζεται με* $\downarrow$.

*Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση θα λέγεται* **μονότονη**.

*iii)* $f(x_1) < f(x_2)$ *η* $f$ *θα λέγεται γνήσια αύξουσα και θα συμβολίζεται με* $\Uparrow$.

*iv)* $f(x_1) > f(x_2)$ *η* $f$ *θα λέγεται γνήσια φθίνουσα και θα συμβολίζεται με* $\Downarrow$.

*Στις περιπτώσεις* (*iii*) *και* (*iv*) *η συνάρτηση θα λέγεται* **γνήσια μονότονη**.

Η λεπτομερής εξέταση της μονοτονίας μιας συνάρτησης θα γίνει στο Μάθημα 10.

Σχετικά τώρα με τις μονότονες συναρτήσεις ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

**Θεώρημα 3.3 - 1.** *Αν μία συνάρτηση* $f|D$ *είναι γνήσια μονότονη στο* $D$*, τότε υπάρχει πάντοτε η αντίστροφή της συνάρτηση* $f^{-1}|T$ *όπου* $T = f(D)$ *και είναι του ίδιου είδους μονοτονίας με αυτή.*

**Θεώρημα 3.3 - 2.** *Η σύνθεση δύο συναρτήσεων του ίδιου είδους μονοτονίας είναι αύξουσα συνάρτηση, ενώ διαφορετικού είδους μονοτονίας φθίνουσα συνάρτηση.*

### 3.3.3 Περιοδική συνάρτηση

**Ορισμός 3.3 - 4.** *Μία συνάρτηση* $f|\Re$ *λέγεται περιοδική, αν υπάρχει* $\tau \in \Re$ *με* $\tau \neq 0$*, έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(x+\tau) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Re. \tag{3.3 - 3}$$

Τότε ο $\tau$ λέγεται **περίοδος**, ενώ ο ελάχιστος θετικός αριθμός $\tau$ για τον οποίο ισχύει η $(3.3-3)$ λέγεται **θεμελιώδης περίοδος** και συμβολίζεται με $T$.

**Σημείωση 3.3 - 1**

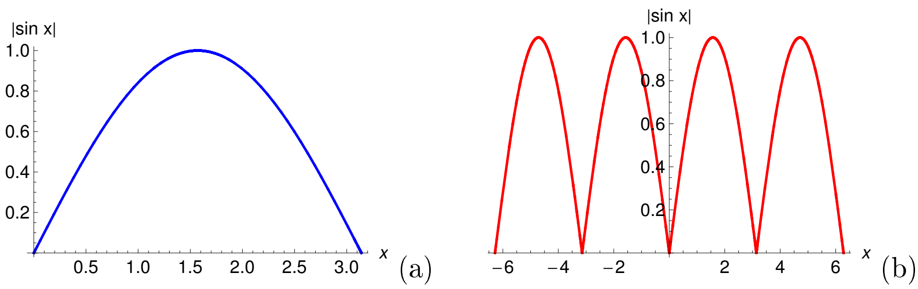
Άμεσα προκύπτει από τον ορισμό ότι οι ιδιότητες και το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης θα είναι γνωστές, όταν μελετηθεί η συνάρτηση σε ένα διάστημα πλάτους $T$, δηλαδή όσο η θεμελιώδης περίοδος.

Οι περιοδικές συναρτήσεις συναντώνται συχνά στις εφαρμογές, όπου η μεταβλητή τους $t$ συμβολίζει το χρόνο και μεταβάλλεται σε διαστήματα όπως το $[0, +\infty)$, $[t_1, t_2]$ κ.λπ. Στις περιπτώσεις αυτές λέγεται ότι έχουμε τον περιορισμό της περιοδικής συνάρτησης στα διαστήματα αυτά.

### Κατηγορίες περιοδικών συναρτήσεων

Οι περιοδικές συναρτήσεις χωρίζονται στις παρακάτω δύο κατηγορίες:

i) εκείνες που από το ορισμό τους είναι περιοδικές, δηλαδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως: $\sin x$, $\cos 3x$, $\tan 5x$, $|\sin x|$ που είναι γνωστή σαν [2]**πλήρης ανόρθωση** (Σχ. 3.3 - 3) με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, κ.λπ.




**Σχήμα** 3.3 - 2: Συνάρτηση (a) $|\sin x|$, όταν $x \in [0, \pi]$ δηλαδή διάστημα πλάτους $T = \pi$ και (b) όταν $x \in [-2\pi, 2\pi]$

ii) Συναρτήσεις που ορίζονται με κάποια συνθήκη περιοδικότητας. Οι συναρτήσεις αυτές συναντώνται στις εφαρμογές και παραδείγματά τους δίνονται στη συνέχεια.

### Παράδειγμα 3.3 - 1

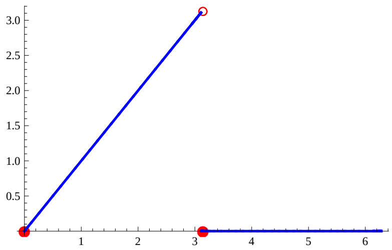
Η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \\ \\ 0 & \text{αν} \quad \pi \le t < 2\pi, \end{cases} \qquad \text{όταν} \quad \overbrace{f(t + \underbrace{2\pi}_{T}) = f(t) \ \text{ για κάθε } \ t \in \Re}^{\text{συνθήκη}}$$

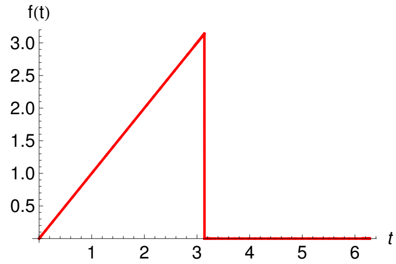
---

[2]Γενικότερα η συνάρτηση $|\sin \omega x|$ με $\omega > 0$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi/\omega$.

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$. Στο Σχ. 3.3 - 3a δίνεται το διάγραμμά της στο διάστημα $[0, T]$ πλάτους όσο η θεμελιώδης περίοδος, όπως αυτό παρουσιάζεται στα μαθηματικά, ενώ στο Σχ. 3.3 - 3b όπως στις εφαρμογές.



(a)



(b)

**Σχήμα** 3.3 - 3: Παράδειγμα 3.3 - 1

**Παράδειγμα 3.3 - 2**

Όμοια η

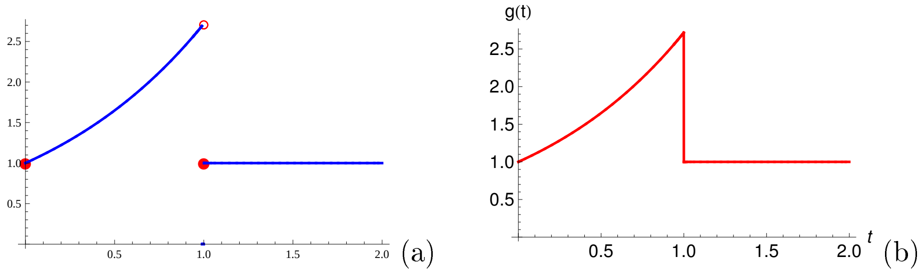
$$g(t) = \begin{cases} e^t & \text{αν} \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{αν} \quad 1 \leq t < 2, \end{cases} \quad \text{όταν} \quad \overbrace{f(t + \underbrace{2}_{T}) = f(t) \ \text{ για κάθε } t \in \Re}^{\text{συνθήκη}}$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2$ με διάγραμμα στο Σχ. 3.3 - 4a στα μαθηματικά, αντίστοιχα Σχ. 3.3 - 4b στις εφαρμογές.

**Παράδειγμα 3.3 - 3**

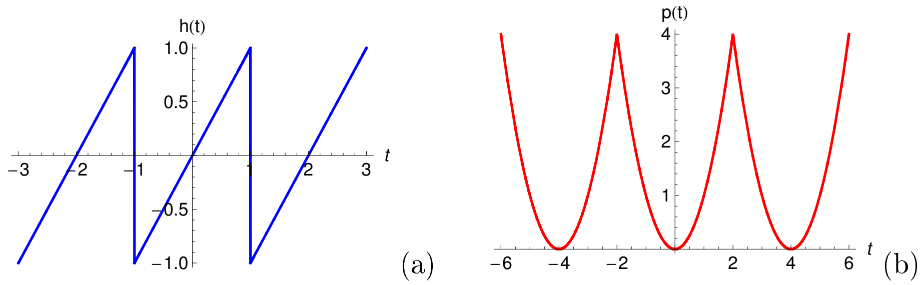
Όμοια οι

$$\begin{aligned} h(t) &= t, \quad \text{όταν} \ -1 \leq t < 1 \ \text{ και } h(t + \overbrace{2}^{T}) = h(t), \ \text{ και} \\ p(t) &= t^2, \quad \text{όταν} \ -2 \leq t < 2 \ \text{ και } p(t + \overbrace{4}^{T}) = p(t) \end{aligned}$$




**Σχήμα** 3.3 - 4: Παράδειγμα 3.3 - 2

για κάθε $t \in \Re$ είναι περιοδικές με θεμελιώδη περίοδο $T = 2$ (Σχ. 3.3 - 5a) και $T = 4$ (Σχ. 3.3 - 5b).




**Σχήμα** 3.3 - 5: Παράδειγμα 3.3 - 3

Το Πρόγραμμα 3.3 - 1 δίνει το Σχ. 3.3 - 3 με το MATHEMATICA.

**Πρόγραμμα 3.3 - 1**

```
Plot[Piecewise[{{t, 0 < t < Pi}, {0, Pi < t < 2 Pi}}],
{t,0,2Pi},
PlotStyle -> Thick, ColorFunction -> Function[Blue],
AxesLabel -> {t, "f(t)"},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

## Ιδιότητες

Σχετικά με τις περιοδικές συναρτήσεις ισχύουν:

i) το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε μία περίοδο λέγεται **κύμα**,

ii) αν η μεταβλητή μιας περιοδικής συνάρτησης συμβολίζει το διάστημα, τότε η περίοδός της λέγεται **μήκος κύματος** και συμβολίζεται με $\lambda$,

iii) κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο $T$ γίνεται περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $2\pi$, θέτοντας

$$t = \frac{2\pi}{T} x \,, \tag{3.3 - 4}$$

iv) αν $T$ είναι η θεμελιώδης περίοδος, τότε ορίζεται ως **συχνότητα** $\nu$ ο αριθμός

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{3.3 - 5}$$

και ως **κυκλική συχνότητα** ο

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \,, \tag{3.3 - 6}$$

v) ορίζεται σαν **αρμονική** κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(t) = a\cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad f(t) = a\sin(\omega t + \theta). \tag{3.3 - 7}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

**Πρόταση 3.3 - 2.** *Το άθροισμα δύο ή περισσοτέρων αρμονικών συναρτήσεων με την ίδια κυκλική συχνότητα, έστω ω, είναι επίσης αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα.*

**Απόδειξη.** Έστω οι αρμονικές συναρτήσεις $f(t) = \alpha_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ και $g(t) = \alpha_2 \cos(\omega t + \theta_2)$. Τότε, αν $h(t) = f(t) + g(t)$, είναι

$$\begin{aligned}
h(t) &= \alpha_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \alpha_2 \sin(\omega t + \theta_2) \\
&= (\alpha_1 \cos\theta_1 + \alpha_2 \sin\theta_2)\cos\omega t + (-\alpha_1 \sin\theta_1 + \alpha_2 \cos\theta_2)\sin\omega t \\
&= A\,\cos\omega t + B\,\sin\omega t = B\left(\frac{A}{B}\,\cos\omega t + \sin\omega t\right) \\
&= B\,(\tan\phi\,\cos\omega t + \sin\omega t) = C\sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$h(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\sin(\omega t + \phi), \tag{3.3 - 8}$$

όπου $C = \left(A^2 + B^2\right)^{1/2}$ με $\tan\varphi = A/B$, όταν $B \neq 0$ και $-\pi \leq \varphi < \pi$. Από την $(3.3 - 8)$ προκύπτει ότι το άθροισμα είναι όμοια μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega$. ∎

**Παράδειγμα 3.3 - 4**

Το άθροισμα των αρμονικών συναρτήσεων $f(t) = \sin t$ και $g(t) = \sqrt{3}\cos t$, όπου $\omega = 1$, δίνει

$$h(t) = \sin t + \sqrt{3}\cos t = 2\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right),$$

δηλαδή μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega$.

**Πρόταση 3.3 - 3.** *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που η κάθε μία έχει κυκλική συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο μιας συχνότητας, έστω $\omega_0$, είναι μία περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση με συχνότητα τη μικρότερη συχνότητα των αρμονικών συναρτήσεων.*

**Πρόταση 3.3 - 4.** *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που οι συχνότητές τους έχουν ανά δύο πηλίκο ρητό αριθμό, είναι περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση.*

## 3.4 Κατηγορίες συναρτήσεων

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες κατηγορίες συναρτήσεων με τις πλέον βασικές ιδιότητές τους.

### 3.4.1 Πολυωνυμική

**Ορισμός 3.4 - 1** *Κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$P(x) = P_\nu(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (3.4 - 1)$$

*όταν $a_i \in \Re$; $i = 0, 1, \ldots, \nu$ και $\nu = 1, 2, \ldots$ λέγεται* **πολυωνυμική** *βαθμού $\nu$.*

Τότε είναι $D = \Re$, ενώ το $T$ προσδιορίζεται, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

**Ορισμός 3.4 - 2** *Κάθε εξίσωση της μορφής*

$$a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3.4 - 2}$$

*όταν* $a_i \in \Re$; $i = 0, 1, \ldots, \nu$ *και* $\nu = 1, 2, \ldots$ *λέγεται* **πολυωνυμική εξίσωση** *βαθμού* $\nu$, *ενώ κάθε τιμή, έστω* $x^*$, *που την επαληθεύει* **ρίζα** *της εξίσωσης.*

### 3.4.2 Ρητή

**Ορισμός 3.4 - 3** *Λέγεται* **ρητή** *κάθε συνάρτηση που είναι δυνατόν να παρασταθεί σαν το πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων, δηλαδή*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_\nu \nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0}{\beta_m x^m + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} \tag{3.4 - 3}$$

*όπου* $\nu$, $m = 1, 2, \ldots$ *με* $a_i$, $\beta_j \in \Re$ *για κάθε* $i = 0, 1, \ldots, \nu$ *και* $j = 0, 1, \ldots, m$.

Τότε $D = \Re - \{$πραγματικές ρίζες του παρανομαστή$\}$, ενώ όμοια το $T$ προσδιορίζεται, εφόσον αυτό είναι δυνατόν. Οι ρίζες του παρανομαστή λέγονται και **πόλοι** της $R(x)$.

### 3.4.3 Πεπλεγμένη

**Ορισμός 3.4 - 4** *Λέγεται πεπλεγμένη (implicit) κάθε συνάρτηση που ορίζεται από μία αλγεβρική σχέση μεταξύ των* $y$ *και* $x$ *και η οποία δεν είναι λυμένη ως προς* $y$, *δηλαδή μία σχέση της μορφής*

$$F(x, y(x)) = 0 \tag{3.4 - 4}$$

*όπου η* $F$ *είναι ένα πολυώνυμο τόσο ως προς* $y$ *όσο και ως προς* $x$, *η οποία και όταν ακόμα λυθεί ως προς* $y$, *θα περιέχει στην αναλυτική της έκφραση και ριζικά.*

Ενδεικτικά δίνονται οι συναρτήσεις $y^2 = ax^2 + bx + c$, $x^3 + y^3 - 3ax = 0$, $y = x + \left(1 + x^2\right)^{1/2}$ κ.λπ. Οι ρητές συναρτήσεις είναι μία ειδική κατηγορία των πεπλεγμένων συναρτήσεων.

### 3.4.4 Τριγωνομετρικές

**Ημίτονο:** $\sin x$

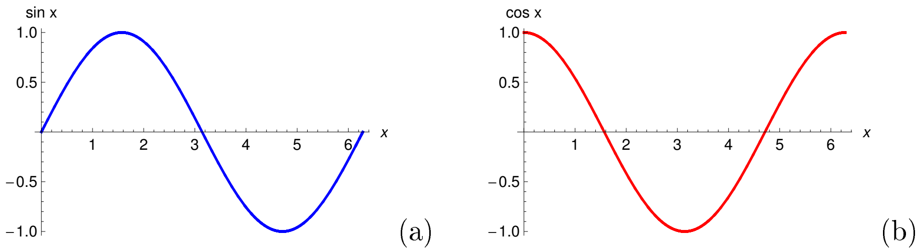
Πεδίο ορισμού $D = \Re$ και τιμών $T = [-1,\ 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, περιττή, γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, δηλαδή στο I και IV τεταρτημόριο και γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, δηλαδή στο II και III τεταρτημόριο (Σχ. 3.4 - 1a).

Βασική ταυτότητα: $\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a \end{cases}$ με $k \in Z$.

**Συνημίτονο:** $\cos x$

Πεδίο ορισμού $D = \Re$ και τιμών $T = [-1,\ 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, άρτια, γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in [0, \pi]$, δηλαδή στο I και II τεταρτημόριο και γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in [\pi, 2\pi]$, δηλαδή στο III και IV τεταρτημόριο (Σχ. 3.4 - 1b).

Βασική ταυτότητα: $\cos x = \cos a \iff x = 2k\pi \pm a$ με $k \in Z$.




**Σχήμα** 3.4 - 1: (a) Συνάρτηση $\sin x$ και (b) $\cos x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$

**Εφαπτομένη:** $\tan x$

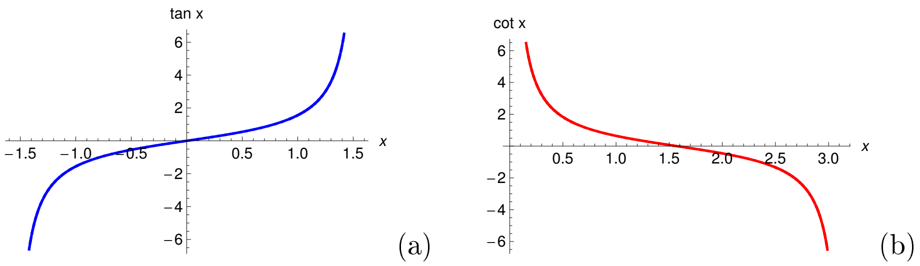
Πεδίο ορισμού $D = \Re - \{\varkappa\pi + \pi/2\}\,;\ \varkappa \in Z$ και τιμών $T = \Re$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, περιττή και γνήσια αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3.4 - 2a).

Βασική ταυτότητα: $\tan x = \tan a \iff x = k\pi + a$ με $k \in Z$.

**Συνεφαπτομένη:** $\cot x$

Πεδίο ορισμού $D = \Re - \{\kappa\pi\}\,;\ \kappa \in Z$ και τιμών $T = \Re$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, περιττή και γνήσια φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3.4 - 2b).

Βασική ταυτότητα: $\cot x = \cot a \iff x = k\pi + a$ με $k \in Z$.




**Σχήμα** 3.4 - 2: (a) Συνάρτηση $\tan x$, όταν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και (b) $\cot x$, όταν $x \in (0, \pi)$

### 3.4.5 Αντίστροφες τριγωνομετρικές

**Τόξο ημιτόνου:** $\sin^{-1} x$ ή $\arcsin x$

Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, όταν έχει πεδίο ορισμού το $[-\pi/2, \pi/2]$, είναι γνήσια αύξουσα και έχει πεδίο τιμών το $[-1,\ 1]$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3 - 1 αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση (Σχ. 3.4 - 3a)

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \sin^{-1} x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases} \tag{3.4 - 5}$$

**Τόξο συνημιτόνου:** $\cos^{-1} x$ ή $\arccos x$

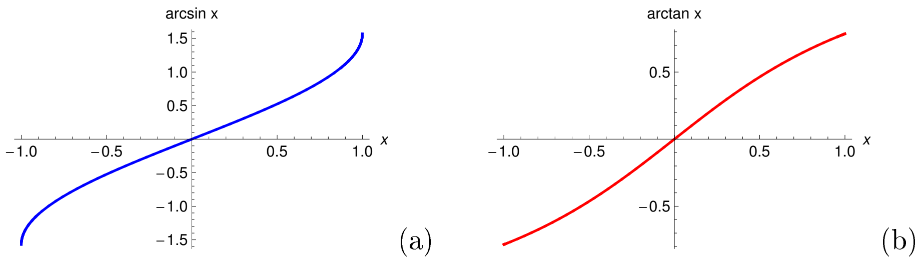
Όμοια η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ με πεδίο ορισμού το $[0, \pi]$ είναι γνήσια φθίνουσα και έχει πεδίο τιμών το $[-1,\ 1]$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \cos^{-1} x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \tag{3.4 - 6}$$

**Τόξο εφαπτομένης:** $\tan^{-1} x$ **ή** $\arctan x$

Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ όμοια με πεδίο ορισμού το $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι γνήσια αύξουσα με πεδίο τιμών $\Re$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση (Σχ. 3.4 - 3b)

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \tan^{-1} x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} . \end{cases} \tag{3.4 - 7}$$




**Σχήμα** 3.4 - 3: (a) Συνάρτηση $\sin^{-1} x$ και (b) $\tan^{-1} x$, όταν $x \in [-1, 1]$

**Τόξο συνεφαπτομένης:** $\cot^{-1} x$ **ή** $\mathrm{arccot} x$

Η συνάρτηση $f(x) = \cot x$ όμοια με πεδίο ορισμού το $(0, \pi)$ είναι γνήσια φθίνουσα με πεδίο τιμών $\Re$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \cot^{-1} x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 < y < \pi . \end{cases} \tag{3.4 - 8}$$

### 3.4.6 Εκθετική

**Ορισμός 3.4 - 5.** *Κάθε συνάρτηση της μορφής* $f(x) = a^x$ *όπου* $a > 0$ *και* $x \in \Re$ *λέγεται* **εκθετική**. *Ειδικά όταν* $a = 1$ *είναι* $f(x) = 1$.

Προφανώς είναι $D = \Re$, ενώ $T = (0, +\infty)$, δηλαδή οι τιμές της εκθετικής συνάρτησης είναι πάντοτε θετικές.

## Ιδιότητες

Έστω $a, b \in (0, +\infty)$ και $x, y \in \Re$. Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

$i)\quad a^x a^y = a^{x+y}$

$ii)\quad a^x : a^y = a^{x-y}$

$iii)\quad (ab)^x = a^x b^x$

$iv)\quad (a^x)^y = a^{xy}$

$v)\quad a^x = 1 \iff x = 0$ με $a \neq 1$,

$$vi)\quad a > b \Longrightarrow \begin{cases} a^x > b^x & ; \quad x > 0 \\ a^x < b^x & ; \quad x < 0 \end{cases},$$

$vi)\quad a^x = a^y \iff x = y$ με $a \neq 1$,

$$viii)\quad x > y \Longrightarrow \begin{cases} a^x > a^y & ; \quad a > 1 \\ a^x < a^y & ; \quad a < 1 \end{cases}.$$

## Μονοτονία

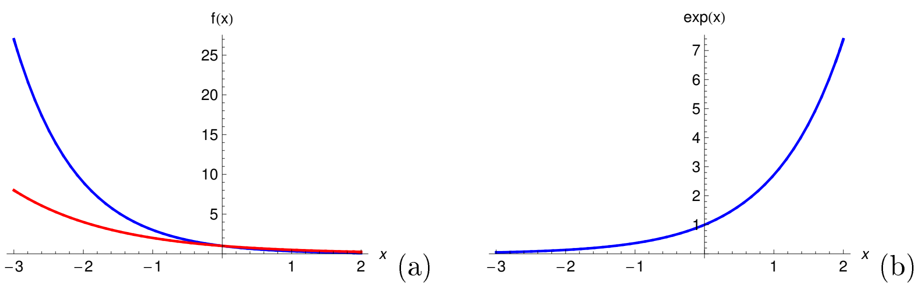
Αποδεικνύεται ότι, όταν:

I) $0 < a < 1$, η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα (Σχ. 3.4 - 4 a),

II) $a > 1$, είναι γνήσια αύξουσα. Ειδικά, όταν $a = e$, όπου $e$ είναι ο γνωστός υπερβατικός αριθμός έχουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x, \tag{3.4 - 9}$$

που είναι μία γνήσια αύξουσα συνάρτηση (Σχ. 3.4 - 4 b).




**Σχήμα** 3.4 - 4: (α) Συνάρτηση $a^x$ με $a = \frac{1}{3}$ μπλε, $a = \frac{1}{2}$ κόκκινη καμπύλη και (b) η $e^x$, όταν $x \in [-3, 2]$

**Σημείωση 3.4 - 1**

Η συνάρτηση $e^x$ πολλές φορές στις εφαρμογές συμβολίζεται με $\exp(x)$.

### 3.4.7 Λογαριθμική

Αποδεικνύεται ισχύει η παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 3.4 - 1.** *Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό $a$ με $a \neq 1$ και κάθε $y \in \Re$ με $y > 0$, υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός $x$, έτσι ώστε $a^x = y$.*

**Ορισμός 3.4 - 6.** *Ο μονοσήμαντα ορισμένος πραγματικός αριθμός $y$ για τον οποίον ισχύει $a^y = x$ όπου $a > 0$, $a \neq 1$ και $x > 0$ λέγεται* **λογάριθμος** *του $x$ με βάση $a$ και συμβολίζεται με $\log_a x$.*

**Παρατηρήσεις 3.4 - 1**

- Προφανώς $D = (0, +\infty)$, ενώ $T = \Re$.
- Η συνάρτηση $\log_a x$ είναι η αντίστροφη της $a^x$.
- Ειδικά, όταν $a = e$, ορίζεται ο **φυσικός** ή **νεπέριος** λογάριθμος, που συμβολίζεται συνήθως με $\ln x$ (Σχ. 3.4 - 5 b).

  Προφανώς τότε ισχύει η ταυτότητα

  $$a^x = e^{x \ln a}. \tag{3.4 - 10}$$

  Όταν $a = 10$, ορίζεται ο δεκαδικός λογάριθμος, που συμβολίζεται με $\text{λογ}x = \log_{10} x$.

### Ιδιότητες

Έστω $a > 0$ με $a \neq 1$ και $x,\, y > 0$. Τότε:

$i)$ $a^{\log_a x} = x$

$ii)$ $\log_a x = \log_a y \iff x = y$

$iii)$ $\log_a 1 = 0,\, \log_a a = 1$

$iv)$ $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,$

$v)$ $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$

$vi)$ $\log_a x^b = b \log_a x;\ b \in \Re,$

$vii)$ $\log_a x > \log_a y \iff \begin{cases} x > y & ; \quad a > 1 \\ x < y & ; \quad a < 1 \end{cases}.$

Άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων $iv$, $v$ και $vi$ είναι ότι, αν $xy > 0$, τότε:

viii) $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|,$

ix) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|,$

x) $\log_a x^\nu = \nu \log_a x,$ όταν $x > 0$ $\nu = 1, 2, \ldots\,,$

xi) Ισχύει ο παρακάτω τύπος αλλαγής βάσης

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\,. \tag{3.4 - 11}$$

### Μονοτονία

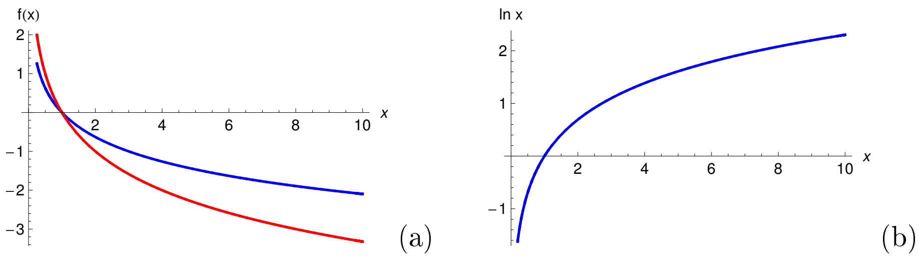
Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3 - 1, όταν

a) $0 < a < 1$, η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα (Σχ. 3.4 - 5 a),

b) $a > 1$, είναι γνήσια αύξουσα (Σχ. 3.4 - 5 b).

## 3.4.8 Υπερβολικές

Οι υπερβολικές συναρτήσεις (hyperbolic functions) ορίζονται βάση των συναρτήσεων $e^x$ και $e^{-x}$. Χρησιμοποιούνται στην περιγραφή πολλών φυσικών φαινομένων, που αναφέρονται στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, τη μεταφορά θερμότητας, τις κυματομορφές soliton κ.λπ. Οι συναρτήσεις αυτές είναι:




**Σχήμα** 3.4 - 5: (α) Συνάρτηση $\log_a x$ με $a = \frac{1}{3}$ μπλε, $a = \frac{1}{2}$ κόκκινη καμπύλη και (b) η $\ln x$, όταν $x \in (0, 10]$

**Υπερβολικό ημίτονο**

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \; | \Re \quad (\Sigma\chi.\ 3.4 - 6a). \tag{3.4 - 12}$$

**Υπερβολικό συνημίτονο**

$$\cosh x = \frac{}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \; | \Re \quad (\Sigma\chi.\ 3.4 - 6b). \tag{3.4 - 13}$$

**Υπερβολική εφαπτομένη**

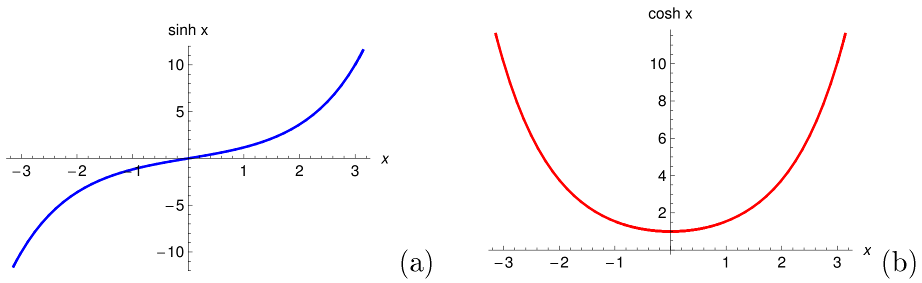
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \; | \Re \quad (\Sigma\chi.\ 3.4 - 7a). \tag{3.4 - 14}$$

**Υπερβολική συνεφαπτομένη**

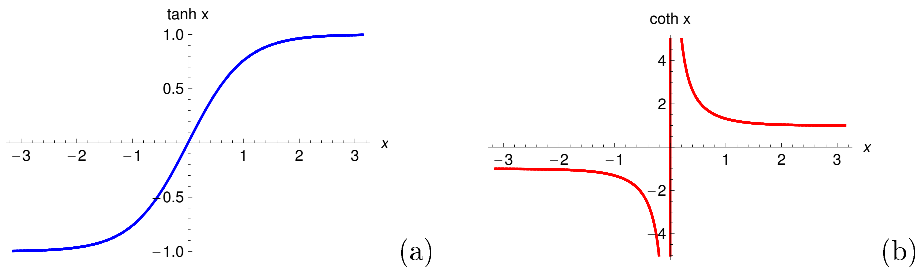
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \; | \Re - \{0\} \quad (\Sigma\chi.\ 3.4 - 7b). \tag{3.4 - 15}$$

### 3.4.9 Υπερβατικές

Οι συναρτήσεις της κατηγορίας αυτής δεν επαληθεύουν καμία αλγεβρική εξίσωση και η αναλυτική έκφραση επιτυγχάνεται με απεριόριστα μεγάλο αριθμό αλγεβρικών




Σχήμα 3.4 - 6: (a) Συνάρτηση $\sinh x$ και (b) $\cosh x$, όταν $x \in [-\pi, \pi]$




Σχήμα 3.4 - 7: (a) Συνάρτηση $\tanh x$ και (b) $\coth x$, όταν $x \in [-\pi, \pi]$

όρων. Είναι προφανές ότι η εκθετική, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές και οι αντίστροφές των συναρτήσεις είναι υπερβατικές.

## Ασκήσεις

**1.** Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

$i)$ $\sqrt{3x^2-5x+4}$ $\quad vii)$ $\ln\left(x^2-x-2\right)$

$ii)$ $\tan(\sin 2x)$ $\quad viii)$ $\cosh\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

$iii)$ $\dfrac{x}{|x+3|}$ $\quad ix)$ $\dfrac{3x^2+4x-5}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x^2-54}}$

$iv)$ $\sin^{-1}3x$ $\quad x)$ $\coth\dfrac{x-1}{x+1}$

$v)$ $\sqrt{\dfrac{1-x}{(x-2)(x+5)}}$ $\quad xi)$ $(x+1)^{1/x}$

$vi)$ $\tan^{-1}5x$ $\quad xii)$ $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x$.

**2.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(\sin x)$. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού, τιμών και να γίνει το διάγραμμά της.

**3.** Όμοια της συνάρτησης $f(x)=\ln\left[\cos(x/2)\right]$.

**4.** Δείξτε ότι:

i) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$,

ii) $\sinh(-x)=-\sinh x$, $\cosh(-x)=\cosh x$, $\tanh(-x)=-\tanh x$,

iii) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\,\cosh y\pm\cosh x\,\sinh y$,

iv) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\,\cosh y\pm\sinh x\,\sinh y$,

v) $\tanh(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\,\tanh y}$.

**5.** Δείξτε ότι οι αντίστροφες συναρτήσεις των υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους:

$$\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1}x = \begin{cases}\cosh_{+}^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\\ \cosh_{-}^{-1}x=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\\ \text{(δίτιμη συνάρτηση)}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\\ \coth^{-1} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.\end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των και βάσει αυτού το πεδίο τιμών των υπερβολικών συναρτήσεων.

**6.** Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$, να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος $T$ και να γίνει το διάγραμμα για τις περιοδικές από αυτές στη θεμελιώδη περίοδο

| | | |
|---|---|---|
| $i)$ $\sin 3x$ | $ii)$ $\sin\lvert x\rvert$ | $iii)$ $\lvert\sin\omega x\rvert$ |
| $iv)$ $\lvert\cos\omega x\rvert$ | $v)$ $\cos x^2$ | $vi)$ $\lvert\tan 2x\rvert$. |

**7.** Να γίνει η γραφική παράσταση των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, όταν ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι:

i) $f(t) = e^{-t}$ αν $0 \le t < \pi$,

ii) $f(t) = 4\pi^2 - t^2$ αν $0 \le t < 2\pi$,

iii) $f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad \pi \le t < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi, \end{cases}$

iv) $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν} \quad -\pi/2 \le t < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi/2, \end{cases}$

v) $f(t) = |\sin t|$

vi) $f(t) = \begin{cases} \pi + t & \text{αν} \quad -\pi \le t < 0 \\ \pi - t & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi. \end{cases}$

**8.** Να δειχθεί ότι, αν μία συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T$, τότε

i) $f(t) = f(t + kT)$, όταν $k \in Z$,

ii) η $f(kt)$ με $k \neq 0$ είναι όμοια περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T/k$.

**9.** Αν οι συναρτήσεις $f$, $g$ είναι περιοδικές με περίοδο $\tau$, τότε και η συνάρτηση $h = kf + \lambda g$ όπου $k$, $\lambda \in \Re$ είναι όμοια περιοδική.

[3]



E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

# Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

## Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

# Τέλος Ενότητας

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς



## Σημείωμα Αδειοδότησης



## Διατήρηση Σημειωμάτων