Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 5: Μιγαδικές Συναρτήσεις

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 5

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1 Εισαγωγή

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι βασικότερες έννοιες των μιγαδικών συναρτήσεων. Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία στο τέλος του μαθήματος.

Έστω z μια μεταβλητή, που συμβολίζει τις τιμές ενός συνόλου D όπου $D \subseteq \mathcal{C}$ με $\mathcal{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Τότε η z θα λέγεται μιγαδική μεταβλητή ή απλά στο εξής μεταβλητή. Αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής z αντιστοιχούν μία ή περισσότερες τιμές της μιγαδικής μεταβλητής w, τότε η w θα λέγεται ότι είναι μία **μιγαδική συνάρτηση** του z και θα γράφεται

$$w = f(z).$$

Ειδικότερα, αν στο z αντιστοιχεί μία ακριβώς τιμή του w, η f θα λέγεται μονότιμη συνάρτηση, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση πλειότιμη. Τότε το D θα ορίζει το **πεδίο ορισμού** της f, ενώ το σύνολο των τιμών της w, έστω T, το **πεδίο τιμών** της f.

Παράδειγμα 5.1 - 1

Η συνάρτηση $f(z) = z^3$ και γενικότερα η z^{ν}; $\nu = 1, 2, \ldots$ με $z \in \mathcal{C}$ είναι μονότιμη, επειδή σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης[1] σε κάθε $z \in \mathcal{C}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένας μιγαδικός z^{ν}. Ειδικότερα, αν $z = 2 - 3\,i$, τότε $z^3 = -46 - 9\,i$.

[1] Βλέπε Μάθημα 4 Μιγαδικοί Αριθμοί Παράγραφος 4.3.

Παράδειγμα 5.1 - 2

Η συνάρτηση $g(z) = z^{1/3}$ και γενικότερα η $z^{1/\nu}$; $\nu = 2, 3, \ldots$ με $z \in \mathcal{C}$ είναι πλειότιμη, επειδή ν-τάξης ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού[2] είναι ν το πλήθος διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί. Όμοια, έστω $z = -1 + i$. Τότε

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\pi}{4}\right), \quad \text{οπότε} \\ z^{1/2} &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{2} + i\,\sin\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{2}\right); \ k = 0,\, 1. \end{aligned}$$

Αν $w = f(z)$, τότε είναι δυνατόν το z να θεωρηθεί σαν συνάρτηση του w, με την έννοια της συνάρτησης που παραπάνω δόθηκε. Στην περίπτωση αυτή γράφεται $z = f^{-1}(w)$ και η f^{-1} λέγεται στην περίπτωση αυτή **αντίστροφη συνάρτηση** της f.

Έστω η συνάρτηση $w = f(z)$ όπου $z = x + i\,y$ με $x,\, y \in \Re$. Τότε μετά από πράξεις η w γράφεται στη μορφή

$$w = f(x + iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{για κάθε } z \in D \tag{5.1 - 1}$$

όπου οι $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών x και y, που λέγονται και **συνιστώσες** της f. Στην $(5.1-1)$ η $u(x,y)$ λέγεται το πραγματικό και η $v(x,y)$ το φανταστικό μέρος της f στο D και ορίζουν ένα **μετασχηματισμό** (transformation) στο D, με την έννοια ότι ένα σημείο του z-επιπέδου απεικονίζεται μέσω της f στο ή σε περίπτωση πλειότιμης συνάρτησης στα αντίστοιχα σημεία του w-επιπέδου.

Παράδειγμα 5.1 - 3

Έστω $f(z) = z^2$. Τότε, αν $z = x + i\,y$, διαδοχικά έχουμε

$$f(z) = f(x + i\,y) = (x + i\,y)^2 = x^2 + 2xy\,i + (i\,y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,i,$$

οπότε το πραγματικό της μέρος είναι το $u(x,y) = x^2 - y^2$ και το φανταστικό: $v(x,y) = 2xy$.

[2] Βλέπε Μάθημα 4 Μιγαδικοί Αριθμοί Παράγραφος 4.7 Θεώρημα 4.7-1.

5.2 Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις

5.2.1 Πολυωνυμική

Ορισμός 5.2 - 1. *Ορίζεται κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$P(z) = P_\nu(z) = \alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{C} \quad (5.2 - 1)$$

όπου $\alpha_k \in \mathcal{C}$ *για κάθε* $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu$ *με* $\alpha_\nu \neq 0$.

Αν $P(z) = 0$, δηλαδή

$$f(z) = P_\nu(z) = \alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \qquad (5.2 - 2)$$

όταν $\alpha_k \in \mathcal{C}$ και $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu$ με $\alpha_\nu \neq 0$, τότε ορίζεται η **πολυωνυμική εξίσωση** ν - βαθμού.[3]

Από την Άλγεβρα είναι τότε γνωστό το παρακάτω θεώρημα σχετικά με τις ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$.

Θεώρημα 5.2 - 1 (θεμελιώδες της Άλγεβρας). *Το πολυώνυμο P έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathcal{C}$.*

Συνέπεια του θεωρήματος 5.2 - 1 είναι ότι το P έχει ν ακριβώς ρίζες στο $\mathcal{C}$, έστω $z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_\nu$, που μερικές ή και όλες είναι δυνατό να συμπίπτουν. Αν οι ρίζες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε

$$P(z) = a_\nu \left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right) \cdots \left(z - z_\nu\right), \qquad (5.2 - 3)$$

ενώ στην περίπτωση που μία ρίζα, έστω η z_1, έχει πολλαπλότητα ρ, είναι

$$P(z) = \left(z - z_1\right)^\rho P_1(z) \qquad (5.2 - 4)$$

όπου $P_1\left(z_1\right) \neq 0$ και $\rho = 2,\, 3,\, \ldots$.

5.2.2 Ρητή

Ορισμός 5.2 - 2. *Ορίζεται κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{C} - \{\text{ρίζες του } Q\}$$

όπου P, Q πολυωνυμικές συναρτήσεις.

[3] Για εφαρμογή στη 2ου βαθμού και τη διώνυμη εξίσωση βλέπε Μάθημα 4 Παράγραφος 4.7.

5.2.3 Εκθετική

Ορισμός 5.2 - 3 (εκθετικής συνάρτησης). *Αν $z = x + iy$, ορίζεται από τον τύπο*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \quad \textit{για κάθε } z \in \mathcal{C}. \tag{5.2 - 5}$$

Από τον ορισμό προκύπτουν:

i) αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή $y = 0$, τότε η συνάρτηση e^z συμπίπτει με την πραγματική e^x,

ii) αν $x = 0$, ισχύει η ταυτότητα του Euler

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \quad \text{για κάθε } y \in \Re. \tag{5.2 - 6}$$

Τότε προφανώς είναι $|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$, ενώ σύμφωνα με την $(5.2 - 5)$ ισχύει ότι

$$|e^z| = |e^x\left(\cos y + i\sin y\right)| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

Ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης

i)

$$e^{z_1}\,e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \text{και} \quad \left(e^{z_1}\right)^{z_2} = e^{z_1\,z_2}$$

για κάθε $z_1,\ z_2 \in \mathcal{C}$, ενώ είναι $e^1 = e$ και $e^0 = 1$.

ii)

$$e^z \neq 0 \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{C}.$$

iii) Ισχύει $e^z = 1$ τότε και μόνον, όταν $z = 2k\pi\, i$.

5.2.4 Όρισμα

[4]Είναι γνωστό ότι κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται στην εκθετική του μορφή ως εξής:

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta) = |z|e^{i\,\theta}.$$

Τότε σύμφωνα και με τον Ορισμό 5.2 - 3 έχουμε:

Ορισμός 5.2 - 4 (συνάρτηση ορίσματος). *Για κάθε μιγαδικό αριθμό z με $|z| = 1$ ορίζεται σαν συνάρτηση του ορίσματος (argument) και συμβολίζεται με* $\arg z$, *κάθε πραγματικός αριθμός θ για τον οποίο ισχύει $z = e^{i\theta}$, δηλαδή*

$$\theta = \arg z \quad \textit{τότε και μόνον, όταν } z = e^{i\theta}.$$

Επειδή

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta = \cos(\theta + 2k\pi) + i\,\sin(\theta + 2k\pi),$$

ενώ προφανώς $|e^{i\theta}| = 1$, από τον Ορισμό 5.2 - 4 προκύπτει ότι η συνάρτηση του ορίσματος $\arg z$ ενός μιγαδικού αριθμού είναι **πλειότιμη** με πεδίο ορισμού το σύνολο των σημείων της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου.

Στην περίπτωση που $|z| \neq 1$ και $z \neq 0$, από τον Ορισμό 5.2 - 4 προκύπτει ότι:

$$\theta = \arg z = \arg\frac{z}{|z|} \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{C} \text{ με } z \neq 0. \tag{5.2 - 7}$$

Τότε, επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(5.2 - 7)$ και τον Ορισμό 5.2 - 4 είναι $e^{i\theta} = z/|z|$, πρέπει, αν $z = x + iy$, το όρισμα να προκύπτει σαν η κοινή λύση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{και} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{aligned} \tag{5.2 - 8}$$

με άγνωστο το θ.

[4]Μάθημα 4 Ορισμός $4.6 - 3$.

Από το σύνολο αυτό των τιμών θ της συνάρτησης $\arg z$ στην $(5.2-8)$ υπάρχει ακριβώς μία τιμή, έστω

$$\theta_0 = \mathrm{Arg} z \quad \text{με} \quad \theta_0 \in [0, 2\pi), \tag{5.2 - 9}$$

που λέγεται **βασικό όρισμα** του z και η οποία ορίζει μία **μονότιμη** συνάρτηση. Τότε προφανώς ισχύει

$$\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2k\pi \quad \text{για κάθε } k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{5.2 - 10}$$

ενώ είναι

$$z = |z|\, e^{i\theta} = |z|\, e^{i \arg z} = |z|\, e^{i\, (\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)}. \tag{5.2 - 11}$$

Σημείωση 5.2 - 1

Αντί του διαστήματος $[0, 2\pi)$ χρησιμοποιείται επίσης και το διάστημα $[-\pi, \pi)$, είναι όμως δυνατόν να χρησιμοποιηθεί και κάθε άλλο διάστημα πλάτους 2π.

5.2.5 Λογαριθμική

Ορισμός 5.2 - 5 (φυσικού λογάριθμου). *Έστω $z \neq 0$. Τότε ορίζεται σαν φυσικός λογάριθμος του z και συμβολίζεται με $\log_e z$ ή συνήθως με $\ln z$, κάθε μιγαδικός αριθμός w που επαληθεύει την εξίσωση $e^w = z$.*

Επειδή σύμφωνα με την $(5.2-11)$ είναι

$$z = |z|\, e^{i\,\theta} = |z| e^{i(\theta + 2k\pi)} = |z| e^{i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)} \quad \text{για κάθε} \quad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτει ότι

$$e^w = |z| e^{i(\mathrm{Arg} z + 2k\pi)} \quad \text{για κάθε} \quad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

δηλαδή ο λογάριθμος ορίζεται από τη σχέση

$$\ln z = \ln |z| + i\, (\mathrm{Arg} z + 2k\pi) \quad \text{για κάθε } k = 0, \pm 1, \ldots \tag{5.2 - 12}$$

και είναι μια **πλειότιμη** συνάρτηση. Τότε για $k = 0$ ορίζεται η **αρχική** του τιμή, που συμβολίζεται με

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\, \mathrm{Arg}\, z \tag{5.2 - 13}$$

και είναι τότε μία **μονότιμη** συνάρτηση.

5.2.6 Γενίκευση εκθετικής συνάρτησης

Έχοντας υπ' όψιν τους Ορισμούς 5.2 - 3 και 5.2 - 5 δίνεται η παρακάτω γενίκευση της εκθετικής συνάρτησης[5].

Ορισμός 5.2 - 6. *Η συνάρτηση a^z με $a \in \mathcal{C}$ και $a \neq 0$, ορίζεται από τη σχέση*

$$a^z = e^{z \ln a} \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{C}$$

με αρχική τιμή την

$$a^z = e^{z\,\mathrm{Ln} a} \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{C}.$$

Τότε η a^z είναι μια πλειότιμη συνάρτηση, ενώ η αρχική της μονότιμη.

Ιδιότητες

Από το Ορισμό 5.2 - 6 προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $a^{z_1}\, a^{z_2} = a^{z_1 + z_2}$, και
- $(a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1\, z_2}$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathcal{C}$,

ενώ είναι $a^1 = a$ και $a^0 = 1$.

Ο Ορισμός 5.2 - 6 γενικεύεται ως εξής:

Ορισμός 5.2 - 7 *Για κάθε $z \in \mathcal{C}$ με $f(z) \neq 0$ η δύναμη $[f(z)]^{g(z)}$ ορίζεται από τη σχέση*

$$[f(z)]^{g(z)} = e^{g(z) \ln f(z)}. \tag{5.2 - 14}$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε επίσης μία πλειότιμη συνάρτηση, ενώ η αρχική τιμή της είναι

$$[f(z)]^{g(z)} = e^{g(z) \mathrm{Ln} f(z)}. \tag{5.2 - 15}$$

[5]Βλέπε Μάθημα 3 την αντίστοιχη πραγματική εκθετική συνάρτηση a^x και Μάθημα 4 Παράγραφος 4.9.

Άσκηση

Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των Παραγράφων 5.2.3 και 5.2.6.

5.2.7 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται με τη βοήθεια των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων ως εξής:

Ημίτονο	$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	Συνημίτονο	$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
Εφαπτομένη	$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$	Συνεφαπτομένη	$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z, όπου αυτό απαιτείται.

Σημείωση 5.2 - 2

Στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται επίσης οι παρακάτω συναρτήσεις

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \text{και} \quad \csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2\,i}{e^{iz} - e^{-iz}}\,.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αν $w = \sin z$, η αντίστροφη συνάρτηση που συμβολίζεται με $z = \sin^{-1} w$ ή $z = \arcsin w$, ορίζει το **τόξο ημιτόνου** z και προφανώς είναι μία πλειότιμη συνάρτηση. Όμοια ορίζονται οι αντίστροφες των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Αποδεικνύεται ότι οι αρχικές τιμές των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z, όπου αυτό απαιτείται.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι[6]

i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

ii) $\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \tan(-z) = -\tan z$,

iii) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$.

2. Όμοια ότι[7]

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$

5.2.8 Υπερβολικές συναρτήσεις

Όμοια, όπως και στις πραγματικές συναρτήσεις, ορίζονται οι υπερβολικές συναρτήσεις με τη βοήθεια των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων ως εξής:

Ημίτονο $\quad \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad$ Συνημίτονο $\quad \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

Εφαπτομένη $\quad \tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z} \qquad$ Συνεφαπτομένη $\quad \coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z όπου αυτό απαιτείται.

Σημείωση 5.2 - 3

Επίσης στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συναρτήσεις

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \quad \text{και} \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αποδεικνύεται ότι οι αρχικές τιμές των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους

$$\sinh^{-1} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \qquad \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

[6] Αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους.

[7] Έστω $w = \tan z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} / \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, οπότε γράφοντας $e^{-iz} = 1/e^{iz}$ και λύνοντας ως προς z προκύπτει λογαριθμίζοντας την τελική σχέση η αποδεικτέα.

με κατάλληλους περιορισμούς στο z.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι[8]

i) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,

ii) $\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \tanh(-z) = -\tanh z$,

iii) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$,

iv) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \mp \sinh z_1 \sinh z_2$.

2. Όμοια ότι[9]

$$\begin{aligned} \sinh^{-1} z &= \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \\ \tanh^{-1} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \end{aligned}$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z.

3. Δείξτε ότι οι $\sin z$, $\tan z$ και $\cot z$ είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cos z$ άρτια συνάρτηση.

4. Να υπολογιστούν τα $\sin^{-1} 2$, $\cos^{-1} i$ και $\sinh^{-1} i$.

5. Δείξτε ότι $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$, $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$ και $\overline{\tan z} = \tan \overline{z}$ για κάθε $z \in \mathcal{C}$.

[10]

[8] Αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους.

[9] Έστω $w = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ όπου γράφοντας $e^{-z} = 1/e^z$. Λύνοντας ως προς z και λογαριθμίζοντας προκύπτει τελικά η αποδεικτέα.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος Θ. (2008), Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 978–960–456–092–9.

[4] Τσάγκας, Γρ. (1990), Μαθήματα Μιγαδικών Συναρτήσεων, Θεσσαλονίκη.

[5] Churchill R., Brown J. (2005), Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–7309–41–3.

[6] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[7] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

[8] Spiegel M., Complex Variables, Εκδότης McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 007–060–230–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Ανώτερα Μαθηματικά Ι. Ενότητα 5: Μιγαδικές Συνάρτησεις». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων