Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 6: Γραμμική Άλγεβρα

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το περιεχόμενο του μαθήματος διατίθεται με άδεια Creative Commons εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 6

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΑ

6.1 Πίνακες

Η επίλυση διαφόρων προβλημάτων των μαθηματικών και γενικότερα των εφαρμοσμένων επιστημών οδήγησε μεταξύ των άλλων στην ανάγκη ομαδοποίησης των διαφόρων δεδομένων. Κύριος στόχος της ομαδοποίησης αυτής ήταν αφενός εν η εύκολη πρόσβαση σε αυτά και αφετέρου η ευκολία των μεταξύ τους πράξεων. Στην περίπτωση που τα δεδομένα αυτά είναι πραγματικοί ή γενικότερα μιγαδικοί αριθμοί, η παραπάνω ομαδοποίηση γίνεται με την έννοια του πίνακα, μια έννοια που εισάγεται στη συνέχεια αυτού του μαθήματος, ενώ για μία γενικότερη αντιμετώπιση του προβλήματος ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

6.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.1.1 - 1 (πίνακα). *Λέγεται πίνακας (matrix) τάξης* (m, n) *μία διάταξη* mn *στοιχείων από το σύνολο* $\Re$ *ή το* $\mathcal{C}$*, που είναι διατεταγμένα σε* m*-γραμμές και* n*-στήλες, έτσι ώστε κάθε στοιχείο της να ανήκει ακριβώς σε μία γραμμή και μία στήλη.*

Οι πίνακες θα συμβολίζονται στο εξής με κεφαλαία γράμματα, όπως A, B, C κ.λπ., ενώ ένας πίνακας A με στοιχεία από το $\Re$ τάξης (m, n) θα συμβολίζεται με $A \in \Re^{m \times n}$ και με $A \in \mathcal{C}^{m \times n}$, όταν έχει στοιχεία από το $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 6.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε ότι ο πίνακας

$$
\begin{array}{cl}
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{1η γραμμή} \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{1η στήλη} \end{array} &
\end{array}
\qquad \text{είναι τάξης} \quad (3, 2),
$$

επειδή έχει 3 γραμμές και 2 στήλες.

Στο παραπάνω παράδειγμα αν τα στοιχεία του πίνακα A συμβολιστούν με το γράμμα, έστω a, τότε για να καθοριστούν τα στοιχεία αυτά στις επί μέρους θέσεις του πίνακα, απαιτούνται δύο δείκτες, που ό ένας να δείχνει τη γραμμή και ο άλλος τη στήλη στην οποία ανήκει το κάθε στοιχείο. Αν δεχθούμε ότι στο εξής ο πρώτος δείκτης, έστω i, θα συμβολίζει τις γραμμές (rows) του πίνακα και ο δεύτερος, έστω j, τις στήλες (columns), τότε ο παραπάνω πίνακας A γράφεται ως εξής:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = (a_{ij}), \quad \text{όταν} \quad \begin{array}{rcl} i & = & 1,\, 2,\, 3 \text{ και} \\ j & = & 1,\, 2. \end{array}
$$

Γενικότερα ένας πίνακας A τάξης (m, n) γράφεται

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \; ; \;\; 1 \le i \le m \, , \; 1 \le j \le n. \quad (6.1.1 - 1)
$$

Αν $n = 1$, δηλαδή υπάρχει μια μόνο στήλη, τότε ο πίνακας λέγεται **πίνακας διάνυσμα** ή απλά **διάνυσμα**.

Παράδειγμα 6.1.1 - 2

Οι παρακάτω πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix}=\overrightarrow{a}=\mathbf{a} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\overrightarrow{b}=\mathbf{b}$$

είναι πίνακες διανύσματα τάξης $(2,1)$ και $(3,1)$ αντίστοιχα.

Αν $m=n$, τότε ο πίνακας λέγεται **τετραγωνικός πίνακας** τάξης (n,n) ή εν συντομία τάξης n.

Παράδειγμα 6.1.1 - 3

Οι παρακάτω πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί τάξης 2 και 3 αντίστοιχα. Τότε γράφεται $A \in \Re^{2\times 2}$ και $B \in \Re^{3\times 3}$, όταν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί, αντίστοιχα γράφεται $A \in \mathcal{C}^{2\times 2}$ και $B \in \mathcal{C}^{3\times 3}$, όταν είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Τα στοιχεία a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn} ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης n ορίζουν την **κύρια** ή **πρωτεύουσα διαγώνιο**, ενώ τα a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $\ldots$, a_{n1} τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Παρατήρηση 6.1.1 - 1

Στο εξής στις διάφορες εφαρμογές θα χρησιμοποιείται μόνον η κύρια διαγώνιος.

Παράδειγμα 6.1.1 - 4

Στον τετραγωνικό πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \swarrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία a_{11}, a_{22}, a_{33} ορίζουν την κύρια και τα a_{13}, a_{22}, a_{31} τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Ορισμός 6.1.1 - 2 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας. Τότε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου ορίζει το **ίχνος** (trace) του A, που συμβολίζεται με $\mathrm{tr}\ (A) = \mathrm{trace}\ (A)$, δηλαδή*

$$\mathrm{tr}\ (A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \mathrm{tr}(A) = -1 + 2 + 5 = 6.$$

Ορισμός 6.1.1 - 3 (διαγώνιος πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$, τότε ο A λέγεται διαγώνιος (diagonal) και συμβολίζεται με $A = diag\,(a_{ii})$; $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Παράδειγμα 6.1.1 - 5

Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι, ενώ οι πίνακες

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

δεν είναι.

Η δημιουργία με το MATHEMATICA ενός διαγώνιου πίνακα, έστω του A_2 γίνεται με την παρακάτω εντολή:

```
DiagonalMatrix[{2,0,-1,-2}]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.1 - 4 (μοναδιαίος πίνακας). *Ένας διαγώνιος πίνακας* $A = (a_{ij})$ *τάξης* n *θα λέγεται μοναδιαίος (identity) και θα συμβολίζεται με* I_n *ή απλά* I*, όταν* $a_{ii} = 1$ *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Επομένως οι πίνακες

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{I} = \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{I} = \mathrm{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι μοναδιαίοι, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι.

Όμοια η δημιουργία ενός μοναδιαίου πίνακα τάξης, έστω 3, με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
IdentityMatrix[3]//MatrixForm
```

6.1.2 Αλγεβρική δομή

Δίνεται στη συνέχεια η αλγεβρική δομή στο σύνολο των πινάκων.

Ισότητα

Ορισμός 6.1.2 - 1. *Έστω οι πίνακες* $A = (a_{ij})$ *και* $B = (b_{ij})$ *τάξης* (m, n). *Οι πίνακες* A *και* B *θα είναι ίσοι τότε και μόνον, όταν* $a_{ij} = b_{ij}$ *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, m$ *και* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Άρα, αν

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \begin{array}{rclcrcl} a & = & -1 & \quad & b & = & 0 \\ c & = & 3 & \quad & d & = & 2. \end{array}$$

Είναι προφανές ότι η ισότητα ορίζει στο σύνολο των πινάκων τάξης (m, n) μία σχέση ισοδυναμίας.

Πίνακες διαφορετικοί

Ορισμός 6.1.2 - 2. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Οι πίνακες A και B θα είναι διαφορετικοί και θα συμβολίζεται αυτό με $A \neq B$ τότε και μόνον, όταν $a_{ij} \neq b_{ij}$ για ένα τουλάχιστον $i = 1, 2, \ldots, m$ ή $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A \neq B.$$

Παρατήρηση 6.1.2 - 1

Η έννοια της διάταξης, δηλαδή της $>$, αντίστοιχα της $<$, δεν ορίζεται στους πίνακες.

Πρόσθεση

Ορισμός 6.1.2 - 3. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Τότε ορίζεται σαν άθροισμά τους ο πίνακας $A + B = (c_{ij})$ όμοια τάξης (m, n) όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \\ A + B &= \begin{bmatrix} -1+2 & 3+1 \\ -2+3 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης και θεωρώντας ότι οι πίνακες είναι της ίδιας τάξης, αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες.

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική (commutative) $\quad A + B = B + A$,

ii) προσεταιριστική (associative) $\quad (A + B) + C = A + (B + C)$,

iii) υπάρχει ένας ακριβώς πίνακας, έστω M, που λέγεται **μηδενικός** (null matrix) και του οποίου τα στοιχεία είναι όλα ίσα με το μηδέν τέτοιος, ώστε $A + M = A$ για κάθε πίνακα A,

iv) για κάθε πίνακα A υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας, που λέγεται **αντίθετος** του A και συμβολίζεται με $-A$, έτσι ώστε $A + (-A) = M$.

Άρα, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad -A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix},$$

v) αν $A + X = B + X$, τότε $A = B$ για κάθε πίνακα A, B και X (**νόμος της διαγραφής**),

vi) για κάθε πίνακα A, B και X η εξίσωση $A + X = B$ έχει ακριβώς μία λύση τη $X = B - A$. Η λύση της εξίσωσης λέγεται **διαφορά** του πίνακα B από τον A, ενώ η πράξη με την οποία υπολογίζεται η διαφορά αυτή λέγεται **αφαίρεση**.

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 + (-3) & -2 + 1 \\ 5 + 2 & 3 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται σαν άσκηση.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ορισμός 6.1.2 - 4. *Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης (m,n) και $\lambda \in \Re$ αντίστοιχα $\lambda \in \mathcal{C}$. Τότε το γινόμενο λA ορίζεται ότι είναι ο πίνακας $\lambda A = \lambda\,(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ τάξης (m,n) για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda = 3, \quad \text{τότε} \\ 3A &= \begin{bmatrix} 3*2 & 3*(-4) \\ 3*(-5) & 3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται αν το λ αντικατασταθεί με ένα βαθμωτό μέγεθος, έστω $\phi(x)$.

Όμοια βάσει του ορισμού και θεωρώντας ότι οι πίνακες είναι της ίδιας τάξης, αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες.

Ιδιότητες

i) $1A = A$ και $0A = M$,

ii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση πινάκων $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

iii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση αριθμών $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

iv) προσεταιριστική ως προς το γινόμενο αριθμών $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$.

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται σαν άσκηση.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ορισμός 6.1.2 - 5. *Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης (m,n) και ο πίνακας $B = (b_{ij})$ τάξης (n,ρ). Τότε ορίζεται σαν γινόμενό τους ο πίνακας $AB = (c_{ij})$ τάξης (m,p) όπου*

$$c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]\,[b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}]^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό θα έχουμε

$$\underset{(2,3)}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}} \; \underset{(3,2)}{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{(2,2)}{\begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ -1\cdot 4 + 4\cdot 2 + 0\cdot(-3) & -1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω παραδείγματος με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής:

```
A={{3,1,2},{-1,4,0}};
B={{4,1},{2,1},{-3,2}};
A.B//MatrixForm
```

Θεωρώντας ότι οι πίνακες έχουν τάξη, τέτοια ώστε να είναι δυνατόν να οριστούν οι αντίστοιχες πράξεις, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

Ιδιότητες

i) προσεταιριστική

$$A(BC) = (AB)C,$$

ii) επιμεριστική (distributive) ως προς την πρόσθεση πινάκων

$$A(B+C) = AB + AC \text{ και } (B+C)A = BA + CA,$$

iii) προσεταιριστική ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$

iv) στο σύνολο των τετραγωνικών πινάκων τάξης n, υπάρχει ακριβώς ένα ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, που είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n ή εν συντομία I, δηλαδή

$$A\,\mathrm{I} = \mathrm{I}\,A = A \quad \text{για κάθε τετραγωνικό πίνακα } A.$$

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

v) Η σχέση $AB = M$, όπου M ο μηδενικός πίνακας, δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι $A = M$ ή $B = M$, όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται σαν άσκηση.

Παρατήρηση 6.1.2 - 2

Γενικά δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή $AB \neq BA$.

6.1.3 Δύναμη πίνακα

Σύμφωνα με τον ορισμό του γινομένου των πινάκων και την προσεταιριστική ιδιότητά του η δύναμη ενός πίνακα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 6.1.3 - 1. *Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Τότε επαγωγικά ορίζεται η δύναμη A^ν ως εξής:*

$$A^\nu = A^{\nu-1}A \quad \textit{για κάθε } \nu = 2, 3, \dots ,$$

όταν $A^1 = A$. Ειδικά ορίζεται ότι $A^0 = \mathrm{I}$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Παράδειγμα 6.1.3 - 1

Αν

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \\
A^2 &= A\,A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \\
A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -15 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Στο Πρόγραμμα 6.1.3 - 1 υπολογίζονται οι παραπάνω δυνάμεις με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 6.1.3 - 1 (πρόγραμμα υπολογισμού δύναμης πίνακα)

```
A={{1,3},{-2,0}};
MatrixForm[A]
MatrixPower[A,2]//MatrixForm                (2η δύναμη του A)
MatrixPower[A,3]//MatrixForm                (3η δύναμη του A)
```

Παράδειγμα 6.1.3 - 2

Όμοια, αν

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \\
A^2 &= A\,A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}, \\
A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

και γενικά

$$A^{\nu} = A^{\nu-1}A = \begin{bmatrix} (-1)^{\nu-1} & 0 \\ 0 & 3^{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{\nu} & 0 \\ 0 & 3^{\nu} \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και ν, $\mu = 1,\ 2,\ \ldots$ ισχύουν

i) $A^{\nu}A^{\mu} = A^{\nu+\mu}$,

ii) $(A^{\nu})^{\mu} = A^{\nu\mu}$.

Παρατήρησεις 6.1.3 - 1

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1.3 - 1 η δύναμη πίνακα με διαφορετικό αριθμό γραμμών και στηλών δεν ορίζεται.

ii) Δυνάμεις με αρνητικούς ή και κλασματικούς εκθέτες δεν ορίζονται.

6.1.4 Πίνακες ειδικής μορφής

Δίνονται τώρα οι ορισμοί πινάκων ειδικής μορφής που είναι χρήσιμοι στα επόμενα.

Ορισμός 6.1.4 - 1 (διαγώνια ορισμένος). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται διαγώνια ορισμένος (diagonally dominant), όταν*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ορισμός 6.1.4 - 2 (αυστηρά διαγώνια ορισμένος). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται αυστηρά διαγώνια ορισμένος (strictly diagonally dominant), όταν*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 6.1.4 - 1

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ισχύει} \quad \begin{array}{l} |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \end{array} ,$$

δηλαδή ο A είναι διαγώνια ορισμένος, ενώ στον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ισχύει} \quad \begin{array}{l} |b_{11}| > |b_{12}| + |b_{13}| \\ |b_{22}| > |b_{21}| + |b_{23}| \\ |b_{33}| > |b_{31}| + |b_{32}| \end{array} ,$$

οπότε ο B είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος.

Ορισμός 6.1.4 - 3 (θετικός). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \Re^{m\times n}$. Τότε ο A λέγεται θετικός (positive), όταν $a_{ij} > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Ορισμός 6.1.4 - 4 (μη αρνητικός). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \Re^{m\times n}$. Τότε ο A λέγεται μη αρνητικός (non-negative), όταν $a_{ij} \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Ορισμός 6.1.4 - 5 (ανάστροφος). *Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης (m, n). Τότε ορίζεται σαν ανάστροφος (transpose) πίνακας ο $A^T = (b_{ij})$ τάξης (n, m) όπου $b_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Άρα οι γραμμές του A είναι οι στήλες του A^T.

Παράδειγμα 6.1.4 - 2

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός του παραδείγματος με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

```
A={{1,-4,2},{3,-2,5}};Transpose[A]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.4 - 6 (συμμετρικός). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \Re^{n\times n}$ λέγεται συμμετρικός (symmetric), όταν $A = A^T$.*

Παράδειγμα 6.1.4 - 3

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ τότε προφανώς } \quad A^T = A.$$

Ο έλεγχος με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής:

```
A={{1,3,5},{3,-5,2},{5,2,4}};
SymmetricMatrixQ[A]                                    (true)
```

Ορισμός 6.1.4 - 7 (αντισυμμετρικός). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ λέγεται αντισυμμετρικός (skew-symmetric), όταν $A = -A^T$.*

Παρατήρηση 6.1.4 - 1

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν $A^T = (b_{ij})$, πρέπει $b_{ij} = -a_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Αλλά από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα προκύπτει ότι $b_{ij} = a_{ji}$, οπότε $a_{ji} = -a_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε όμως για $i = j$ θα είναι $a_{ii} = -a_{ii}$, δηλαδή $a_{ii} = 0$. Επομένως τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδέν, ενώ τα στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρική θέση ως προς την κύρια διαγώνιο είναι αντίθετα.

Ορισμός 6.1.4 - 8 (συζυγής). *Αν $A = (a_{ij}) \in \mathcal{C}^{m\times n}$, τότε ορίζεται σαν συζυγής (conjugate) ο πίνακας $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \mathcal{C}^{m\times n}$.*

Άρα ο $\overline{A}$ αποτελείται από τα συζυγή στοιχεία του A.

Παρατήρηση 6.1.4 - 2

Αν είναι $A = \overline{A}$, τότε προφανώς ο A έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, ενώ, αν είναι $A = -\overline{A}$, ο A έχει στοιχεία φανταστικούς αριθμούς.

Ορισμός 6.1.4 - 9 (συζυγής ανάστροφος). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathcal{C}^{m\times n}$. Τότε ορίζεται σαν συζυγής ανάστροφος (conjugate transpose) $A^* = \left(\overline{A}\right)^T = \overline{A^T}$ ή Ερμιτιανός ανάστροφος (Hermitian transpose) A^H ο πίνακας*

$$A^H = A^* = (\overline{a}_{ji}) \in \mathcal{C}^{n\times m}.$$

Συνεπώς οι γραμμές του A είναι στήλες του A^H και επιπλέον ο A^H αποτελείται από τα συζυγή μιγαδικά στοιχεία του A.

Παράδειγμα 6.1.4 - 4

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}, \text{ τότε}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A^H = (\overline{A})^T = \overline{A^T} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

```
A={{1+I,-I,0},{2,3-2I,I}};
Conjugate[A]//MatrixForm
ConjugateTranspose[A]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.4 - 10 (Ερμιτιανός). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A = (a_{ij}) \in \mathcal{C}^{n\times n}$ λέγεται Ερμιτιανός (Hermitian), όταν $A^H = A$.*

Άμεσα προκύπτει τότε ότι $a_{ii} = \overline{a}_{ii}$ για κάθε με $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 6.1.4 - 5

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A^H = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} = A.$$

Ο έλεγχος με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
A={{1,I,1+I},{-I,-5,2-I},{1-I,2+I,3}};
HermitianMatrixQ[A]                                  (true)
```

Ορισμός 6.1.4 - 11 (αντιερμιτιανός). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ λέγεται αντιερμιτιανός (skew-Hermitian), όταν $A^H = -A$.*

Παράδειγμα 6.1.4 - 6

Αν

$$A = \begin{bmatrix} i & 4+i \\ -4+i & 2i \end{bmatrix}, \quad \text{τότε } A^H = -A.$$

Ορισμός 6.1.4 - 12 (τριγωνικός άνω). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται άνω ή δεξιά τριγωνικός (upper triangular) και συμβολίζεται συνήθως με R ή συνήθως με U, όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$.*

Άρα στην περίπτωση αυτή τα στοιχεία που βρίσκονται αριστερά και κάτω της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με το μηδέν.

Ορισμός 6.1.4 - 13 (αυστηρά τριγωνικός άνω). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται άνω τριγωνικός (strictly upper triangular), όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \geq j$.*

Όμοια ορίζεται ο κάτω ή αριστερά τριγωνικός (lower triangular) πίνακας, όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$ και συμβολίζεται συνήθως με L, αντίστοιχα ο καθαρά κάτω τριγωνικός, όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \leq j$.

Άρα οι πίνακες

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

είναι άνω, αντίστοιχα κάτω τριγωνικοί, ενώ οι

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ & 0 & 1 & -3 \\ & & 0 & -2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } \tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 3 & 0 & & \\ -3 & 2 & 0 & \\ -1 & 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

είναι αυστηρά άνω, αντίστοιχα αυστηρά κάτω τριγωνικοί.

Οι παρακάτω εντολές δημιουργούν με το MATHEMATICA έναν άνω τριγωνικό αντίστοιχα έναν καθαρά άνω τριγωνικό πίνακα τάξης 3:

```
A={{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}};
UpperTriangularize[A]//MatrixForm
UpperTriangularize[A,1]//MatrixForm
```

Όμοια έναν κάτω τριγωνικό, αντίστοιχα έναν καθαρά κάτω τριγωνικό πίνακα

```
A={{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}};
LowerTriangularize[A]//MatrixForm
LowerTriangularize[A,-1]//MatrixForm
```

Η παρακάτω εντολή δημιουργεί έναν κάτω τριγωνικό πίνακα με μονάδες στη διαγώνιο

```
A={{a11,a12,α13},{α21,α22,α23},{α31,α32,α33}};
LowerTriangularize[A,-1]
+IdentityMatrix[3]//MatrixForm
```

Ασκήσεις

1. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 3, δείξτε ότι

i) $\operatorname{tr}(kA+\lambda B)=k\operatorname{tr}(A)+\lambda\operatorname{tr}(B)$, όταν k, λ σταθερές,

ii) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(A)\ \operatorname{tr}(B)$,

iii) $\operatorname{tr}\left(A^T\right)=\operatorname{tr}(A)$.

2. Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2. Εξετάστε αν ισχύει $(AB)^2=A^2B^2$ και δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στη συνέχεια υπολογίστε τα αναπτύγματα $(A+B)^2$ και $(A+B)^3$.

3. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2 και $AB=BA$ δείξτε ότι

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2,\quad (AB)^2=B^2A^2.$$

4. Έστω $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in\Re^3$ αντίστοιχα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in\mathcal{C}^3$. Δείξτε ότι[1]

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}^T\mathbf{y}.$$

5. Αν A, $B\in\Re^{3\times 3}$ δείξτε ότι

i) $(A+B)^T=A^T+B^T$

ii) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ με $\lambda\in\Re$

iii) $\left(A^T\right)^T=A$

iv) $(AB)^T=B^TA^T$.

6. Όμοια, αν A, $B\in\mathcal{C}^{3\times 3}$ ότι

i) $(A+B)^H=A^H+B^H$

ii) $(\lambda A)^H=\overline{\lambda}A^H$ με $\lambda\in\mathcal{C}$

iii) $\left(A^H\right)^H=A$

iv) $(AB)^H=B^HA^H$.

7. Αν $A\in\Re^{n\times n}$, δείξτε ότι οι πίνακες $A+A^T$, AA^T είναι συμμετρικοί και ο $A-A^T$ αντισυμμετρικός, ενώ αν $A\in\mathcal{C}^{n\times n}$, τότε ο πίνακας $A+A^H$ είναι Ερμιτιανός και ο $A-A^H$ αντιερμιτιανός.

8. Να δειχθεί ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A με $A\in\Re^{n\times n}$ γράφεται ως

$$A=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)+\frac{1}{2}\left(A+A^T\right),$$

ενώ αν $A\in\mathcal{C}^{n\times n}$, τότε

$$A=\frac{1}{2}\left(A-A^H\right)+\frac{1}{2}\left(A+A^H\right).$$

[1] Βλέπε εσωτερικό γινόμενο Μάθημα 1 Παράγραφος 1.5.

9. Δείξτε ότι όλα τα στοιχεία ενός αντιερμιτιανού πίνακα είναι φανταστικοί αριθμοί.

10. Να δειχθεί ότι κάθε Ερμιτιανός πίνακας, έστω A, γράφεται στη μορφή $A = B + iD$, όπου B είναι ένας συμμετρικός και D ένας αντισυμμετρικός πίνακας.

11. Αν A, B αντιερμιτιανοί πίνακες, δείξτε ότι ο πίνακας $kA+\lambda B$ είναι όμοια αντιερμιτιανός για κάθε k, $\lambda \in \Re$.

12. Αν ο A είναι ένας αντιερμιτιανός πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας iA είναι Ερμιτιανός, ενώ ο A^{ν} είναι Ερμιτιανός, αν ο ν είναι άρτιος και αντιερμιτιανός, αν ο ν είναι περιττός αριθμός.

13. Να προσδιοριστούν τα α, β και γ, έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\beta \\ 3-5i & 0 & \gamma \\ i & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$$

να είναι Ερμιτιανός.

14. Δείξτε ότι οι παρακάτω πίνακες του Pauli

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

επαληθεύουν τις σχέσεις $A^2 = B^2 = C^2 = I$, $BC = -CB = iA$, $CA = -AC = iB$ και $AB = -BA = iC$.

6.2 Ορίζουσες

Η έννοια της ορίζουσας είναι θεμελιώδους σημασίας για τα προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας, επειδή η γνώση της δίνει λύση σε πολλά από αυτά, όπως είναι μελέτη ύπαρξης λύσης γραμμικών συστημάτων κ.λπ., ενώ έχει και άλλες γενικότερες εφαρμογές στις θετικές επιστήμες.

6.2.1 Ορισμός

Ορισμός 6.2.1 - 1 (ορίζουσας). *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε η ορίζουσα (determinant) του A συμβολίζεται με $|A|$ ή* det (A) *και ισούται με τον αριθμό* [2]

$$\det\,(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, M_{ij}, \qquad (6.2.1\text{ - }1)$$

όταν $i = 1$ *ή* $2, \ldots$ *ή* n, *αντίστοιχα* [3]

$$\det\,(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, M_{ij}, \qquad (6.2.1\text{ - }2)$$

όταν $j = 1$ *ή* $2, \ldots$ *ή* n *και* M_{ij} *είναι η* **ελάσσονα ορίζουσα** *(minor determinant) του στοιχείου* a_{ij} *που προκύπτει, όταν διαγραφεί η* i*-γραμμή και η* j*-στήλη του πίνακα* A.

Όταν $n = 2$ η ορίζουσα ισούται με

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (6.2.1\text{ - }3)$$

ενώ για $n = 1$ είναι $|A| = a_{11}$.

Οι τύποι $(6.2.1-1)$ και $(6.2.1-2)$ είναι γνωστοί σαν **τύποι του Laplace**. Η ελάσσονα ορίζουσα M_{ij} λέγεται και 1η ελάσσονα ορίζουσα (first minor), ενώ αυτή που προκύπτει με διαγραφή δύο γραμμών και δύο στηλών 2η ελάσσονα (second minor) κ.λπ. Η τάξη της ορίζουσας ορίζεται ίση με την τάξη του πίνακα A, δηλαδή ίση με n, ενώ προφανώς η τάξη της πρώτης ελάσσονας ορίζουσας είναι $n - 1$.

Επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2.1 - 1 το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3ης τάξης ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής ($i = 1$) σε ορίζουσες 2ης τάξης και στη συνέχεια ο υπολογισμός της σύμφωνα με την $(6.2.1 - 3)$ θα είναι

$$|A| \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[2] Ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή.
[3] Ανάπτυγμα ως προς την 1η στήλη.

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{1+1}\, a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}\, a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}\, a_{13}M_{13} \\
&= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right).
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 6.2.1 - 1

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$
|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.
$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2\cdot 12 - (-3)\cdot 1 = 27, \\
|B| &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 3(1\cdot 4 - (-1)\cdot 0) + 5(2\cdot 4 - (-1)\cdot 1) + 3(2\cdot 0 - 1\cdot 1) = 54.
\end{aligned}
$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω ορίζουσας με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

```
A={{3,-5,3},{2,1,-1},{1,0,4}};
Det[A]
```

6.2.2 Ιδιότητες των οριζουσών

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) *Αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές, τότε η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 2

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = A^T.$$

ii) *Αν αντιμετατεθούν δύο γραμμές ή δύο στήλες, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 3

Εναλλαγή 1ης και 2ης γραμμής:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

iii) *Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες είναι ίσες ή ανάλογες, τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν* (η εφαρμογή αφήνεται σαν άσκηση).

iv) *Όταν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης πολλαπλασιαστούν με τον ίδιον αριθμό, τότε και η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό αυτόν.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 4

Πολλαπλασιασμός 1ης γραμμής ή 2ης στήλης: αν

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

τότε

$$3|A| = \begin{vmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3\cdot 2 \\ 4 & 3\cdot 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5) = -15.$$

v) *Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι άθροισμα m προσθετέων, τότε η ορίζουσα αναλύεται σε άθροισμα m άλλων οριζουσών* (όμοια η εφαρμογή αφήνεται σαν άσκηση).

vi) *Αν σε μία γραμμή ή στήλη προστεθούν μία ή περισσότερες γραμμές ή στήλες που η καθεμία πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, η ορίζουσα που προκύπτει είναι ίση με την αρχική.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 5

$$\begin{vmatrix} -6 & 21 & -30 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6+1\cdot 7 & 21-3\cdot 7 & -30+5\cdot 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1-1 & -3-0 & 5-5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 42.$$

vii) *Όταν μία γραμμή ή μία στήλη είναι γραμμική έκφραση των άλλων γραμμών ή στηλών, τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν* (όμοια η εφαρμογή αφήνεται σαν άσκηση).

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$i)\quad \begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix} \qquad iv)\quad \begin{vmatrix} 16 & 22 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 12 & 25 & 2 \end{vmatrix}$

$ii)\quad \begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad v)\quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$iii)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad vi)\quad \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

2. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2, αντίστοιχα 3, δείξτε ότι

$$|AB| = |A||B|.$$

3. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n δείξτε ότι

$ii)\quad \left|A^T\right| = |A| \qquad iii)\quad |\lambda A| = \lambda^n |A|$ με $\lambda \in \Re$.

4. Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας άνω αντίστοιχα κάτω τριγωνικός πίνακας τάξης 4, δείξτε ότι

$$|A| = \prod_{i=1}^{4} a_{ii}.$$

3. Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός Ερμιτιανού πίνακα τάξης 2, αντίστοιχα 3 είναι πραγματικός αριθμός.

6.3 Αντίστροφος πίνακας

6.3.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.3.1 - 1 (αλγεβρικού συμπληρώματος). *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε το αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor) του στοιχείου a_{ij} ορίζεται ως ο αριθμός*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij} \tag{6.3.1 - 1}$$

όπου M_{ij} *η ελάσσονα ορίζουσα του* a_{ij}.

Ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων συμβολίζεται τότε με C και είναι επίσης τάξης n.

Παράδειγμα 6.3.1 - 1

Να υπολογιστεί ο συμπληρωματικός πίνακας του

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1}M_{11} &= a_{22} &= 4, \\ C_{12} &= (-1)^{1+2}M_{12} &= -a_{21} &= -2, \\ C_{21} &= (-1)^{2+1}M_{21} &= -a_{12} &= -1, \\ C_{22} &= (-1)^{2+2}M_{11} &= a_{11} &= 3. \end{aligned}$$

Άρα

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA για έναν πίνακα τάξης 2 γίνεται με τις εντολές:

```
A={{a11,a12},{α21,α22}};
Needs[Combinatorica];Cofactor[A,{i,j}]
```

Ορισμός 6.3.1 - 2 (συμπληρωματικού πίνακα). *Ορίζεται σαν συμπληρωματικός πίνακας (adjugate ή adjoint matrix) του τετραγωνικού πίνακα A τάξης n και συμβολίζεται με $\operatorname{adj}(A) = C^T$, ο πίνακας*

$$\operatorname{adj}\,(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}, \tag{6.3.1 - 2}$$

όταν C_{ij} τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

Παράδειγμα 6.3.1 - 2

Να υπολογιστεί ο συμπληρωματικός πίνακας του A του Παραδείγματος 6.3.1 - 1.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο 6.3.1 - 2 είναι

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 6.3.1 - 3 (αντίστροφου πίνακα). *Ο τετραγωνικός πίνακας A τάξης n θα είναι αντιστρέψιμος (invertible ή nonsingular) τότε και μόνον, όταν υπάρχει άλλος τετραγωνικός πίνακας ίδιας τάξης, που συμβολίζεται με A^{-1}, έτσι ώστε*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n = \mathrm{I}. \tag{6.3.1 - 3}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση ο A θα λέγεται **μη αντιστρέψιμος** (singular).

Πρόταση 6.3.1 - 1. *Ο αντίστροφος πίνακας του A, όταν υπάρχει, είναι μονοσήμαντα ορισμένος.*

Απόδειξη. Έστω A^{-1}, $\tilde{A}^{-1}$ δύο διαφορετικοί αντίστροφοι πίνακες του A. Τότε $A\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}A = \mathrm{I}$, οπότε

$$A^{-1} = A^{-1}\mathrm{I} = A^{-1}\left(A\tilde{A}^{-1}\right) = \left(A^{-1}A\right)\tilde{A}^{-1} = \mathrm{I}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}.$$

∎

6.3.2 Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Σχετικά με τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.2 - 1. *Έστω A αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A). \tag{6.3.2 - 1}$$

Πόρισμα 6.3.2 - 1. *Ο τετραγωνικός πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος, αν $|A| \neq 0$, ενώ αν $|A| = 0$ μη αντιστρέψιμος.*

Παράδειγμα 6.3.2 - 1

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος πίνακας του Παραδείγματος 6.3.1 - 1.
Λύση. Είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

ενώ σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.3.1 - 2

$$\mathrm{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Επειδή $|A| = 10$, σύμφωνα με τον τον τύπο $(6.3.2 - 1)$ θα είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Στο παρακάτω πρόγραμμα δίνονται οι εντολές υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα του Παραδείγματος 6.3.2 - 1 με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 6.3.2 - 1 (αντίστροφου πίνακα)

```
A={{3,1},{2,4}};MatrixForm[A]
Inverse[A]//MatrixForm                          (αντίστροφος του A)
```

Παράδειγμα 6.3.2 - 2

Όμοια του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Επειδή $|A| = 10 \neq 0$ σύμφωνα με το Πόρισμα 6.3.2 - 1 υπάρχει ο A^{-1}. Αρχικά ο A γράφεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A (βλέπε επίσης Παράδειγμα 6.3.1 - 1). Διαδοχικά έχουμε ότι:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = -15$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\, M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\, M_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\, M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\, M_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -15$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\, M_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -6.$$

Άρα

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -15 & -8 \\ 10 & 5 & 0 \\ -8 & -15 & -6 \end{bmatrix},$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο 6.3.1 - 2 είναι

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Τότε από την 6.3.2 - 1 προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

6.3.3 Σχετικές προτάσεις

Πρόταση 6.3.3 - 1. *Αν A, B αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}. \tag{6.3.3 - 2}$$

Απόδειξη. Επειδή οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, από την $(6.3.2-1)$ αντικαθιστώντας όπου A το $A\,B$ διαδοχικά έχουμε

$$A\,A^{-1} = \mathrm{I} \quad \acute{\eta} \quad A\,B\,(A\,B)^{-1} = \mathrm{I}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα από αριστερά με A^{-1} προκύπτει ότι

$$\overbrace{A^{-1}\,A}^{\mathrm{I}}\,B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}\,\mathrm{I} = A^{-1} \quad \acute{\eta} \quad B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}$$

και όμοια από αριστερά με B^{-1} τελικά

$$\overbrace{B^{-1}\,B}^{\mathrm{I}}\,(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \acute{\eta} \quad (A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1},$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται ως εξής:

Πρόταση 6.3.3 - 2. *Αν A_1, A_2, ..., A_n αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε*

$$(A_1\,A_2\,\cdots\,A_{n-1}\,A_n)^{-1} = A_n^{-1}\,A_{n-1}^{-1}\,\cdots\,A_2^{-1}\,A_1^{-1}. \tag{6.3.3 - 3}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 6.3.3 - 3. *Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n, τότε*

i) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$ *ii)* $\operatorname{adj}(A)\,A = |A|\mathrm{I} = A$

iii) $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ *iv)* $\operatorname{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\operatorname{adj}(A);\ \lambda \in \Re.$

Πρόταση 6.3.3 - 4. *Αν ο πίνακας A με $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανός, τότε και ο $\operatorname{adj}(A)$ είναι όμοια Ερμιτιανός.*

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι πίνακες των

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. Όμοια των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Δείξτε ότι

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

4. Αν A αντιστρέψιμος πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας είναι όμοια λA είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ για κάθε $\lambda \in \Re$ με $\lambda \neq 0$.

5. Αν $A = \operatorname{diag}(a_{ii})$ με $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\left(a_{ii}^{-1}\right).$$

[4]

[4] Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Ξένος Θ. (2004), Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–904–3.

[3] Σχοινάς Χρ. (2009), Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας, Εκδόσεις Γκιούρδας, ISBN 960–387–748–4.

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Lipschutz S., Lipson M.L., Θεωρία και προβλήματα στη Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–805–093–6.

[6] Strang G., (2005), Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–730–970–7.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Ανώτερα Μαθηματικά Ι. Ενότητα 6: Γραμμική Άλγεβρα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- Το Σημείωμα Αναφοράς
- Το Σημείωμα Αδειοδότησης
- Τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- Το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.