Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 8: Συνέχεια Συνάρτησης

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 8

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όμοια, όπως και στο Μάθημα 7, θα δοθούν στο μάθημα αυτό περιληπτικά οι βασικότεροι ορισμοί και θεωρήματα που αναφέρονται στη συνέχειας μιας πραγματικής συνάρτησης, ενώ ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

8.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

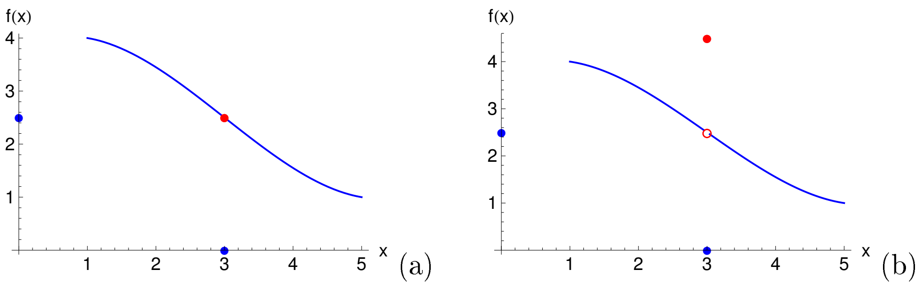
8.1.1 Ορισμός συνέχειας

Ορισμός 8.1.1 - 1 (συνέχειας). *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε η f θα λέγεται συνεχής (continuous) στο σημείο $x_0 \in D$ τότε και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και ισχύει (Σχ. 8.1.1 - 1a)*

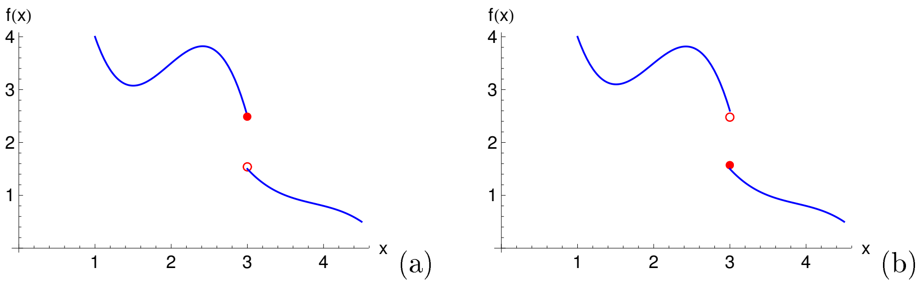
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (8.1.1 - 1)$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση θα λέγεται ασυνεχής στο σημείο x_0 (Σχ. 8.1.1 - 1b και Σχ. 8.1.1 - 2).

Ορισμός 8.1.1 - 2 (πλευρικής συνέχειας). *Η συνάρτηση $f|D$ θα λέγεται αριστερά, αντίστοιχα δεξιά συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$ τότε και μόνον, όταν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (Σχ. 8.1.1 - 2a), αντίστοιχα $\lim_{x -> x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (Σχ. 8.1.1 - 2b).*



Σχήμα 8.1.1 - 1: (a) Συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 3$. Ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (b) Ασυνεχής στο $x_0 = 3$. Υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$



Σχήμα 8.1.1 - 2: Συνάρτηση ασυνεχής στο $x_0 = 3$, επειδή $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. (a) Αριστερά συνεχής και (b) δεξιά συνεχής στο $x_0 = 3$

Εύκολα αποδεικνύεται σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.1 - 1 ότι οι συναρτήσεις ax^ν, οι τριγωνομετρικές και η e^x είναι συνεχείς συναρτήσεις.

8.1.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Δίνονται στη συνέχεια οι ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων με τη μορφή προτάσεων.[1]

Πρόταση 8.1.2 - 1. *Αν $f, g \,|\, D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $x_0 \in D$, τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$ και fg είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in D$.*

Πρόταση 8.1.2 - 2. *Αν $f, g \,|\, D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $x_0 \in D$ και $f(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή $\varpi(x_0)$, τέτοια ώστε $f(x_0) \neq 0$ για κάθε*

[1] Για τον ορισμό της περιοχής ενός σημείου βλέπε Μάθημα 7 Ορισμός 7.1.1 – 2.

$x \in \varpi(x_0)$, οπότε η συνάρτηση $1/f$ έχει έννοια για κάθε $x \in D \cap \varpi(x_0)$ και είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές οι πολυωνυμικές, ρητές, υπερβολικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις στα πεδία ορισμού των.

8.1.3 Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 8.1.3 - 1 (σύνθετης συνάρτησης). *Έστω ότι η συνάρτηση $u = g(x)|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$ και η συνάρτηση $f(u)|g(D)$ είναι συνεχής στο σημείο $u_0 = g(x_0) \in g(D)$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $h(x) = f(g(x))|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$.*

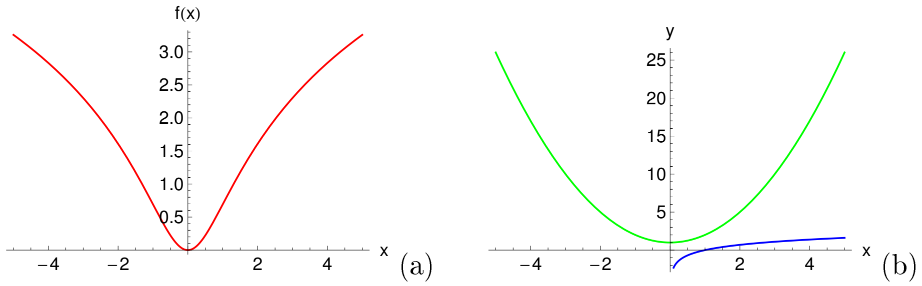
Παράδειγμα 8.1.3 - 1

Η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$$

είναι συνεχής, επειδή είναι σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων (Σχ. 8.1.3 - 1)

$$f(u) = \ln u, \quad \text{όταν} \quad u = g(x) = 1 + x^2.$$



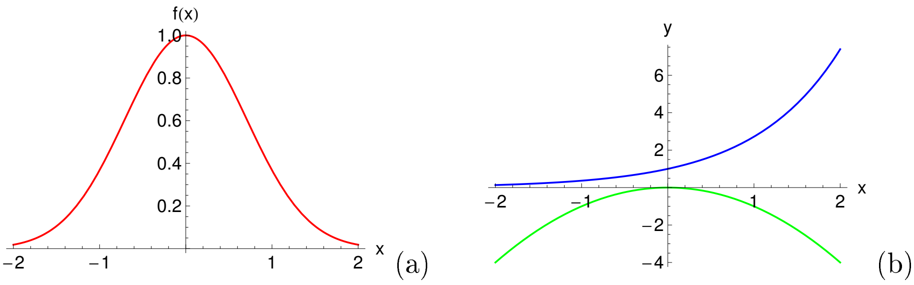
Σχήμα 8.1.3 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x^2)$, όταν $x \in [-5, 5]$. (b) Συνάρτηση $1 + x^2$ πράσινη και $\ln x$ μπλε καμπύλη

Παράδειγμα 8.1.3 - 2

Όμοια η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι συνεχής, επειδή είναι σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων (Σχ. 8.1.3 - 2)

$$f(u) = e^u, \quad \text{όταν} \quad u = -x^2.$$

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη τα κυριότερα θεωρήματα επί των



Σχήμα 8.1.3 - 2: (a) Συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$, όταν $x \in [-2, 2]$. (b) Συνάρτηση $-x^2$ πράσινη και e^x μπλε καμπύλη

συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα 8.1.3 - 2 (αντίστροφης συνάρτησης). *Έστω ότι η συνάρτηση $f|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$. Τότε, αν υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}|f(D)$, η f^{-1} θα είναι συνεχής στο σημείο $\eta_0 = g(x_0) \in g(D)$.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1.3 - 2 η λογαριθμική, οι αντίστροφες τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις.

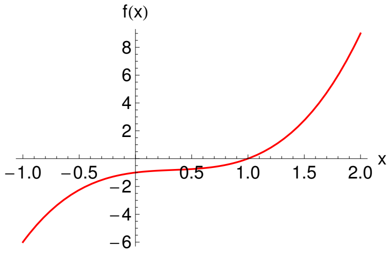
Θεώρημα 8.1.3 - 3 (Bolzano). *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)\,|\,[a, b]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε, αν $f(a)f(b) < 0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ με $\xi \in (a, b)$, έτσι ώστε $f(\xi) = 0$. (Σχ. 8.1.3 - 3a)*

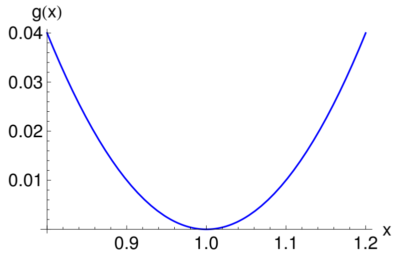
Εφαρμογές του θεωρήματος γίνονται στην προσεγγιστική λύση των εξισώσεων[2].

[2] Ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 5.

Παρατήρηση 8.1.3 - 1

Αν η ρίζα ξ είναι πολλαπλή με βαθμό πολλαπλότητας άρτιο αριθμό, τότε το Θεώρημα 8.1.3 - 3 δεν ισχύει (Σχ. 8.1.3 - 3b).





Σχήμα 8.1.3 - 3: (a) Θεώρημα 8.1.3 - 3 του Bolzano: $f(x) = -1+x-2x^2+2x^3$ διάστημα $[-1, 2]$ και $\xi = 1$. (b) $g(x) = (x-1)^2$ όπου η ρίζα $\xi = 1$ έχει πολλαπλότητα 2 και το θεώρημα δεν εφαρμόζεται

Θεώρημα 8.1.3 - 4 (γενίκευση Bolzano ή ενδιάμεσων τιμών). *Έστω $f|[a,b]$ μία συνεχής συνάρτηση και $f(a) = \eta_1$, $f(b) = \eta_2$ με $\eta_1 \neq \eta_2$. Αν υποτεθεί χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $\eta_1 < \eta_2$, τότε για κάθε $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$, έτσι ώστε $f(\xi) = \eta$.*

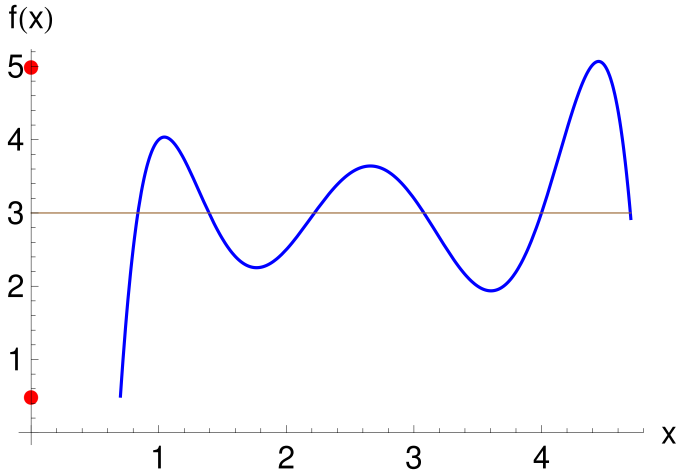
Το θεώρημα γεωμετρικά σημαίνει ότι κάθε ευθεία με εξίσωση $y = \eta$, τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε ένα τουλάχιστον σημείο (Σχ. 8.1.3 - 4).

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα 8.1.3 - 4 αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα της Άλγεβρας.

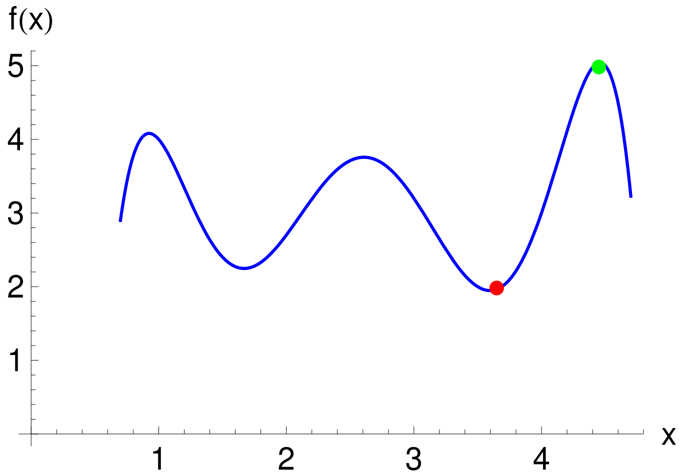
Θεώρημα 8.1.3 - 5. *Αν ένα πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_\nu x^\nu$ με $a_\nu \neq 0$ είναι περιττού βαθμού $\nu \geq 1$, ενώ οι συντελεστές του πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα του.*

Θεώρημα 8.1.3 - 6 (μέγιστης και ελάχιστης τιμής). *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x) \,|\, [a,b]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\gamma \in [a,b]$, αντίστοιχα σημείο $\delta \in [a,b]$, έτσι ώστε (Σχ. 8.1.3 - 5)*

$$f(\gamma) = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad \text{αντίστοιχα} \quad f(\delta) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$



Σχήμα 8.1.3 - 4: Γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano



Σχήμα 8.1.3 - 5: Θεώρημα 8.1.3 - 6: μέγιστο στο $(4.45, 5.0)$ πράσινο και ελάχιστο στο $(3.65, 2.0)$ κόκκινο σημείο

8.2 Ασυνέχεια συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστούν τα είδη ασυνέχειας μιας συνάρτησης (discontinuous function), που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

8.2.1 Ασυνέχεια 1ου είδους

Ορισμός 8.2.1 - 1. *Η συνάρτηση $f|D$ θα παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$* **ασυνέχεια 1ου είδους** *τότε και μόνον, όταν υπάρχουν οι πλευρικές οριακές τιμές της f στο $x_0 \in D$ (ή απειρίζονται) και μία τουλάχιστον από αυτές είναι διάφορη από την τιμή της συνάρτησης (Σχ. 8.1.1 - 2).*

Παρατήρησεις 8.2.1 - 1

Τότε:

i) η ασυνέχεια **διορθώνεται** ή απαλείφεται, όταν (Σχ. 8.2.1 - 1)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lambda \tag{8.2.1 - 1}$$

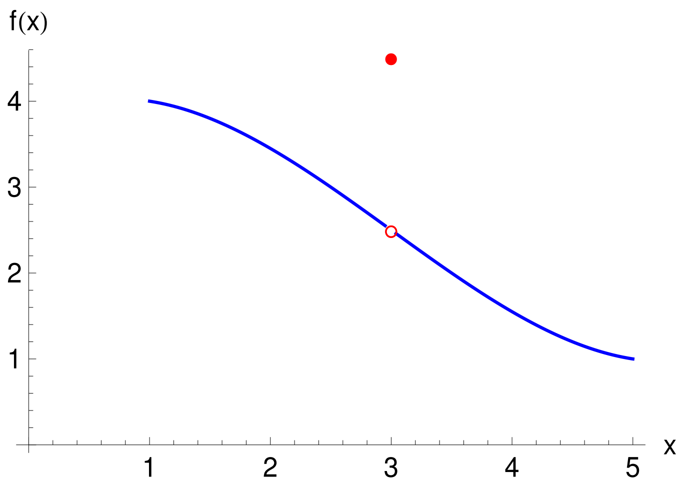
με λ πεπερασμένος αριθμός, δηλαδή υπάρχει η οριακή τιμή της συνάρτησης $f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ και είναι διαφορετική από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0.

ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ πεπερασμένο άλμα με τιμή d όπου

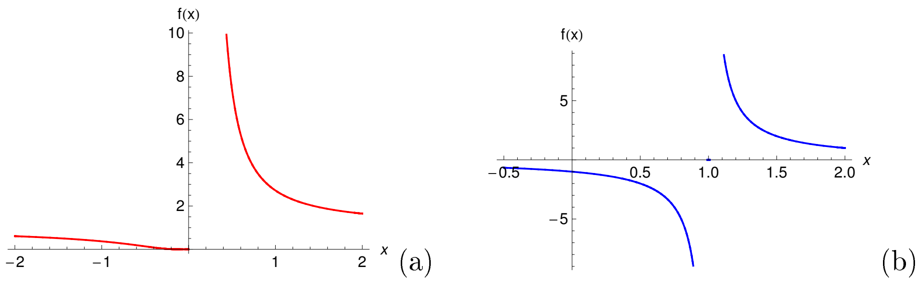
$$d = \left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right| \tag{8.2.1 - 2}$$

τότε και μόνον, όταν οι πλευρικές οριακές τιμές είναι πεπερασμένες και διαφορετικές μεταξύ τους (Σχ. 8.1.1 - 2).

iii) Η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ άπειρο άλμα τότε και μόνον, όταν οι πλευρικές οριακές τιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους και η μία τουλάχιστον από αυτές απειρίζεται (Σχ. 8.2.1 - 2).



Σχήμα 8.2.1 - 1: Παρατηρήσεις 8.2.1 - 1 (i)



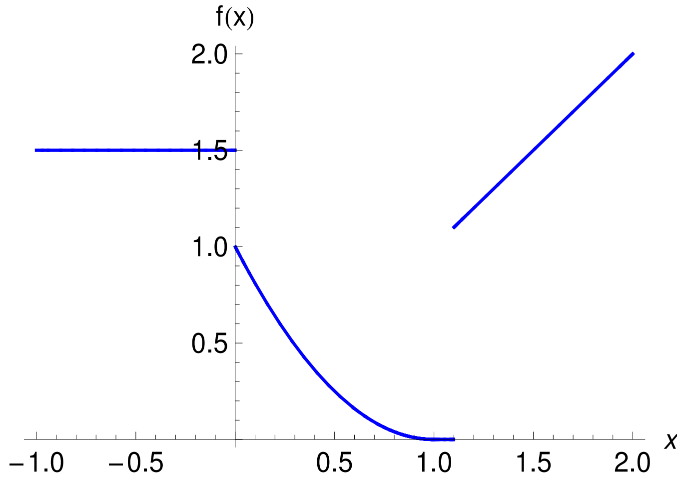
Σχήμα 8.2.1 - 2: (a) Συνάρτηση $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. (b) $g(x) = \frac{1}{x-1}$

Παράδειγμα 8.2.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1.5 & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{αν} \quad 0 < x \leq 1 \\ x & \text{αν} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Θα εξεταστεί η συνέχειά της μόνο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της, δηλαδή στα 0 και 1, επειδή σε όλο το άλλο πεδίο ορισμού της η f είναι συνεχής (Σχ. 8.2.1 - 3). Τότε



Σχήμα 8.2.1 - 3: Παράδειγμα 8.2.1 - 1

i) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1.5 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 0 με άλμα $d = 0.5$, που διορθώνεται αν τεθεί

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{αν} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, δηλαδή η f παρουσιάζει όμοια ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 1 με άλμα $d = 1$, που δεν διορθώνεται, επειδή απαιτείται η αλλαγή του τύπου της f, σε αντίθεση με την περίπτωση (i) που απαιτείται η αλλαγή μόνον μιας σταθεράς.

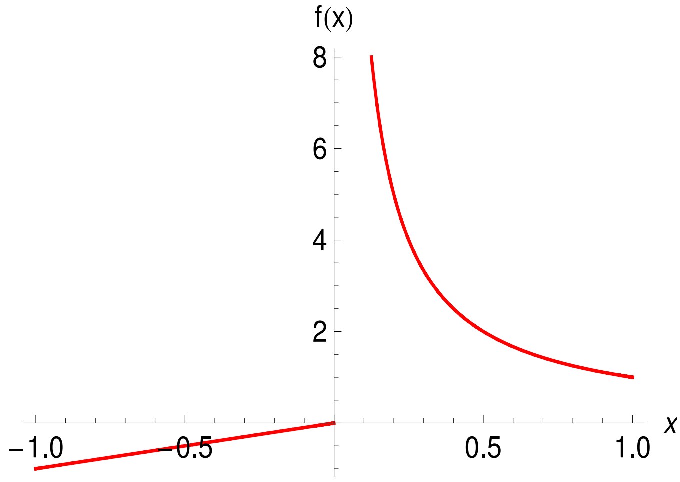
Παράδειγμα 8.2.1 - 2

Όμοια της συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x > 0. \end{cases}$$

Εξετάζεται η συνέχειά της μόνο στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της, δηλαδή στο 0, επειδή σε όλο το άλλο πεδίο ορισμού της η f είναι συνεχής. Τότε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq +\infty = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$



Σχήμα 8.2.1 - 4: Παράδειγμα 8.2.1 - 2

δηλαδή η f παρουσιάζει ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 0 με άπειρο άλμα, που δεν διορθώνεται (Σχ. 8.2.1 - 4). Η f είναι αριστερά συνεχής στο σημείο 0 (πλευρική συνέχεια).

8.2.2 Ασυνέχεια 2ου είδους

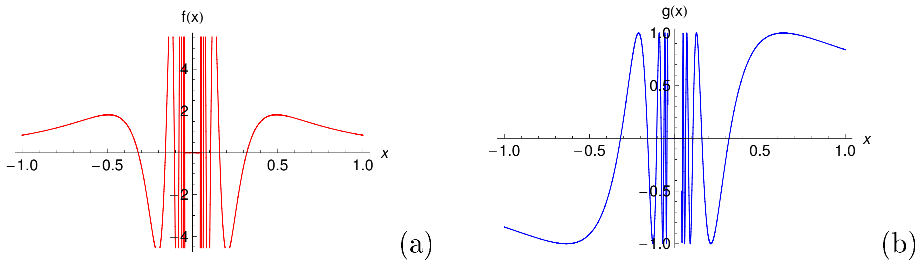
Ορισμός 8.2.2 - 1. *Η συνάρτηση $f|D$ θα παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ ασυνέχεια του 2ου είδους τότε και μόνον, όταν δεν ορίζεται η οριακή τιμή της f στο σημείο $x_0 \in D$.*

Παράδειγμα 8.2.2 - 1

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής για κάθε $x \neq 0$ σαν σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\frac{1}{x}$ και $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Αποδεικνύεται ότι δεν ορίζεται η οριακή τιμή στο σημείο 0, οπότε έχουμε ασυνέχεια του 2ου είδους (Σχ. 8.2.2 - 1). [3]



Σχήμα 8.2.2 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. (b) $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Ασκήσεις

1. Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού των οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$

[3] Για τη συνέχεια στο 0 εξετάζονται τα πλευρικά όρια της f. Έστω οι ακολουθίες

$$a_\nu = \frac{1}{2\nu\pi - \pi/2} \text{ με } \nu = 1, 2, \ldots \text{ και } b_\nu = \frac{1}{2\nu\pi + \pi/2} \text{ με } \nu = 1,\ 2,\ \ldots$$

όπου $\lim a_\nu = \lim b_\nu = 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\lim f\left(a_\nu\right) &= \left(2\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty\cdot(-1) = -\infty, \text{ ενώ}\\
\lim f\left(b_\nu\right) &= \left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty\cdot(+1) = +\infty,
\end{aligned}$$

δηλαδή για την ίδια συνάρτηση έχουμε διαφορετικά όρια στο σημείο 0, που είναι άτοπο σύμφωνα με την ιδιότητα του μονοσήμαντου του ορίου.

$$i)\quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & ; \quad |x| \neq 2 \\ 0 & ; \quad |x| = 2 \end{cases} \qquad v)\quad \begin{cases} x & ; \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{1}{2} + x & ; \quad x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$ii)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases} \qquad vi)\quad \begin{cases} \cos x & ; \quad x \in [-\pi, 0) \\ 1 & ; \quad x \in (0, 1) \\ \dfrac{1}{x} & ; \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$iii)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & ; \quad x \neq 0 \\ 2 & ; \quad x = 0 \end{cases} \qquad vii)\quad \begin{cases} x + \dfrac{|x|}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

$$iv)\quad \begin{cases} \sin x + \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases} \qquad viii)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{-1/x}} & ; \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

2. Όμοια των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$ και να γίνει η μορφή του διαγράμματος στα άκρα του πεδίου ορισμού των

$i)\quad e^{-x^2}$

$ii)\quad \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

$iii)\quad \exp\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

$iv)\quad \sinh\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$v)\quad \ln(\sin x)$

$vi)\quad \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right).$

3. Όμοια των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

$i)$ $\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$ $iv)$ $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

$ii)$ $(1+x)\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ $v)$ e^{-1/x^2}

$iii)$ $e^{1/(1-x)}$ $vi)$ $\ln|\cos x|$

4. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

[4]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος Θ. (2008), Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 978–960–456–092–9.

[4] Τσάγκας, Γρ. (1990), Μαθήματα Μιγαδικών Συναρτήσεων, Θεσσαλονίκη.

[5] Churchill R., Brown J. (2005), Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–7309–41–3.

[6] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[7] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

[8] Spiegel M., Complex Variables, Εκδότης McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 007–060–230–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων