Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 9: Παράγωγος Συνάρτησης – Μέρος Ι

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 9

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΜΕΡΟΣ Ι

9.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

9.1.1 Ορισμός παραγώγου

Αρχικά ορίζεται η κλίση μιας συνάρτησης ως εξής:[1]

Ορισμός 9.1.1 - 1 (κλίσης). *Έστω η συνάρτηση* $f\,|\,(a,b)$ *και σημείο* $x_0 \in (a,b)$. *Τότε για κάθε* $x \in (a,b) - \{x_0\}$ *με τον τύπο*

$$K_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (9.1.1 - 1)$$

ορίζεται μία συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της f *στο σημείο* x_0.

Αν $x = x_0 + \Delta x$, οπότε

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b) - \{x_0\}\,, \qquad (9.1.1 - 2)$$

τότε ο τύπος $(9.1.1 - 1)$ γράφεται

$$K_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,. \qquad (9.1.1 - 3)$$

[1] Για την κλίση γενικότερα βλέπε επίσης Μάθημα 2 Παράγραφος 2.1.1.

Ορισμός 9.1.1 - 2 (παραγώγου). *Έστω η συνάρτηση* $f\,|\,(a,b)$ *και σημείο* $x_0 \in (a,b)$. *Τότε θα λέγεται ότι η* f *παραγωγίζεται στο σημείο* $x_0 \in (a,b)$ *τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή*

$$\lim_{x \to x_0} K_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} \qquad (9.1.1 - 4)$$

υπάρχει.

Η $(9.1.1-4)$ θα λέγεται τότε η **1ης τάξης** παράγωγος (ή πολλές φορές απλά παράγωγος) της f στο x_0 και θα συμβολίζεται με $f'\,(x_0)$.

Έχοντας υπ' όψιν την $(9.1.1-2)$, η $(9.1.1-4)$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} f'\,(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} && (9.1.1 - 5) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0)}{h}\,. && (9.1.1 - 6) \end{aligned}$$

Ορισμός 9.1.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση* $f\,|\,(a,b)$ *Τότε θα λέγεται ότι η* f *παραγωγίζεται στο* (a,b) *τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος* $f'\,(x_0)$ *για κάθε* $x_0 \in (a,b)$.

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\,y}{dx} = D^1 f(x) = D\,f(x) \qquad (9.1.1 - 7)$$

όπου το σύμβολο (τελεστής) $D = D^1 = \frac{d}{dx}$ θα συμβολίζει στο εξής την 1ης τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή x.

Παρατηρήσεις 9.1.1 - 1

Από τους Ορισμούς 9.1.1 - 2 και 9.1.1 - 3 προκύπτουν τα εξής:

i) η $f'\,(x_0)$, εφόσον υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός, ενώ

ii) η $f'\,(x)$ είναι συνάρτηση.

Ορισμός 9.1.1 - 4. *Έστω ότι της συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε θα λέγεται ότι υπάρχει η* **2ης τάξης** *παράγωγος της f στο (a,b) τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της $f'(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$.*

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = D^2 f(x) \qquad (9.1.1 - 8)$$

όπου το $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ συμβολίζει τον τελεστή της 2ης τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης με μεταβλητή x. Διευκρινίζεται ότι $\frac{d^2}{dx^2} \neq \left(\frac{d}{dx}\right)^2$.

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι:

3ης τάξης:

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = D^3 f(x) \qquad (9.1.1 - 9)$$

όπου το $D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$ συμβολίζει τον τελεστή της 3ης τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης με μεταβλητή x, και γενικά η

ν - τάξης:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{\nu-1} f(x)}{dx^{\nu-1}}\right) = \frac{d^{\nu} f(x)}{dx^{\nu}} = D^{\nu} f(x) \qquad (9.1.1 - 10)$$

όπου όμοια ο τελεστής $D^{\nu} = \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}$ συμβολίζει την ν-τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή x.

Ειδικά ορίζεται ότι

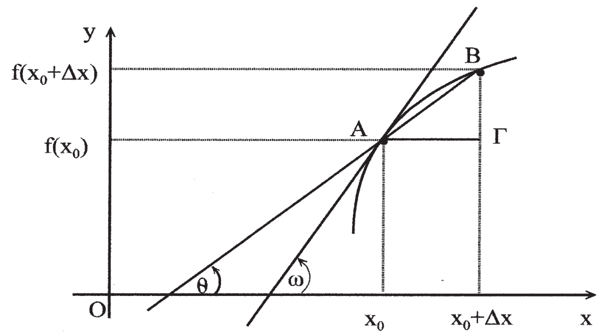
$$f^{(0)}(x) = f(x). \qquad (9.1.1 - 11)$$

9.1.2 Γεωμετρική σημασία παραγώγου

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)|\,(a,b)$. Τότε όπως είναι γνωστό, αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, το σύνολο των σημείων του επιπέδου

$$G_f = \{(x, f(x)), \quad x \in (a,b)\} \subseteq \Re^2 \qquad (9.1.2 - 1)$$

ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης f. Έστω τώρα τα σημεία $x_0 \in (a,b)$ και $x_0 + \Delta x \in (a,b)$, όταν το Δx δίνεται από την $(9.1.1 - 2)$, με αντίστοιχα



Σχήμα 9.1.2 - 1: γεωμετρική σημασία παραγώγου

σημεία στο διάγραμμα της f τα $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ και $B\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$. Η ευθεία AB λέγεται τότε και τέμνουσα του διαγράμματος στα A, B. Στο Σχ. 9.1.2 - 1 είναι $AB=\Delta x$ και $\Gamma B=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\Delta y$. Η κλίση ή διαφορετικά ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB θα δίνεται τότε από τη σχέση[2]

$$\lambda=\tan\theta=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

οπότε η εξίσωση της τέμνουσας ευθείας θα είναι

$$y-f\left(x_0\right)=\lambda\left(x-x_0\right). \tag{9.1.2 - 2}$$

Ο τύπος $(9.1.2-2)$ τότε για όλα τα Δx με $\Delta x\neq 0$ και $x_0+\Delta x\in D$ ορίζει το σύνολο όλων των ευθειών που τέμνουν το διάγραμμα της f στο σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

[2]Βλέπε επίσης Μάθημα 2 Παράγραφος 2.1.1.

Έστω τώρα ότι το Δx τείνει στο μηδέν, δηλαδή το σημείο Γ τείνει στο A. Τότε το σημείο B κινούμενο επί του διαγράμματος της f τείνει να συμπέσει με το σημείο A, η κάθετη πλευρά ΓB του τριγώνου $AB\Gamma$ τείνει να λάβει μία οριακή τιμή, έστω dy, ενώ η τέμνουσα ευθεία AB τείνει να γίνει η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ έχουμε στην περίπτωση αυτή ότι[3]

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \tan\omega &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d\,f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \end{aligned} \qquad (9.1.2 - 3)$$

όπου $\tan\omega$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Άρα έχει αποδειχθεί η πρόταση:

Πρόταση 9.1.2 - 1 (γεωμετρική σημασία παραγώγου). *Η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x) \,|\, (a,b)$ στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.*

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της **εφαπτόμενης ευθείας** θα δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (9.1.2 - 4)$$

ενώ της **κάθετης ευθείας** του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, εφόσον $(x_0, f(x_0)) \neq 0$, από τον

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (9.1.2 - 5)$$

Παράδειγμα 9.1.2 - 1

Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου σε αυτή της παραβολής $y = x^{1/2}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 9$.

Λύση. Επειδή $x_0 = 9$ είναι $y_0 = \sqrt{x_0} = 3$. Τότε

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{οπότε} \quad f'(x_0) = \frac{1}{6}.$$

[3] Ο συμβολισμός dx οφείλεται στον Leibniz. Στα μαθηματικά συμβολίζει το **απειροστό** ή το ελάχιστο δυνατό x. Τότε στο απειροστό αυτό dx αντιστοιχεί η απειροστή μεταβολή dy της συνάρτησης $y = f(x)$.

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.2-4)$ έχουμε για την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ότι

$$y-3=\frac{1}{6}\,(x-9), \quad \text{δηλαδή} \quad x-6y+9=0,$$

ενώ από τον τύπο $(9.1.2-4)$ για την εξίσωση της κάθετης ότι

$$y-3=-6\,(x-9), \quad \text{δηλαδή} \quad 6x+y-57=0.$$

Διαφορικό συνάρτησης

Από την $(9.1.2-3)$, εφόσον υπάρχει η $f'\,(x_0)$, προκύπτει τότε ότι

$$\left. d\,f(x)\right|_{x=x_0}=f'\,(x_0)\;dx. \tag{9.1.2 - 6}$$

Η $(9.1.2-6)$, όταν ισχύει για κάθε $x_0\in(a,b)$, ορίζει το **διαφορικό 1ης τάξης** της συνάρτησης $f(x)$. Επομένως

$$dy=d\,f(x)=f'(x)\,dx \quad \text{για κάθε} \quad x\in(a,b). \tag{9.1.2 - 7}$$

Γεωμετρικά το διαφορικό 1ης τάξης ισούται με την οριακή τιμή της πλευράς $\mathit{\Gamma B}$ (Σχ. 9.1.2 - 1), όταν το σημείο $\mathit{\Gamma}$ τείνει στο A.

Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχουν στο (a,b) οι παράγωγοι της f μέχρι και ν-τάξης, είναι δυνατόν να οριστεί επαγωγικά το ν-τάξης διαφορικό της συνάρτησης $f(x)$ ως εξής:

$$d^{\nu}y=d\left(d^{\nu-1}y\right)=f^{(\nu)}(x)dx^{\nu} \tag{9.1.2 - 8}$$

για κάθε $\nu=2,\,3,\,\ldots$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου των παρακάτω καμπυλών στα έναντι σημεία

i) $y=x^3+2x^2-4x-3$ στο $x_0=-2$,

ii) $y = (x-1)^{1/3}$ στο $x_0 = 1$,

iii) $y = \tan 2x$ στο $x_0 = 0$,

iv) $y = e^{1-x^2}$ στο σημείο τομής με την ευθεία $y = 1$,

v) $y = \sin^{-1}[(x-1)/2]$ στο σημείο τομής με τον άξονα των x,

vi) $y = \cos^{-1} 3x$ στο σημείο τομής με τον άξονα των y.

2. Να υπολογιστεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^2 - 7x + 3$ είναι παράλληλη στην ευθεία $5x + y - 3 = 0$.

3. Να προσδιοριστούν τα σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες της καμπύλης

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$$

είναι παράλληλες στον άξονα των x.

9.1.3 Κανόνες παραγώγισης

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης[4].

Πρόταση 9.1.3 - 1 (παράγωγος σταθεράς συνάρτησης). *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,\Re$ όπου $f(x) = c$ σταθερά για κάθε $x \in \Re$. Τότε*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{για κάθε} \quad x \in \Re.$$

Πρόταση 9.1.3 - 2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f,\ g\,|\,(a,b)$ είναι παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε ισχύει*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (a,b). \qquad (9.1.3 - 1)$$

[4] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη του μαθήματος παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

Πόρισμα 9.1.3 - 1 (γενίκευση παραγώγου αθροίσματος). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f_1, \ldots, f_\nu \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε*

$$[f_1(x) + \ldots + f_\nu(x)]' = f_1'(x) + \ldots + f_\nu'(x) \tag{9.1.3 - 2}$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

Πρόταση 9.1.3 - 3 (παράγωγος γινομένου). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f,\, g \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε ισχύει*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b). \tag{9.1.3 - 3}$$

Πόρισμα 9.1.3 - 2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f,\, g,\, h \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε*

$$\begin{aligned}[f(x)\,g(x)\,h(x)]' &= f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) \\ &\quad + f(x)\,g(x)\,h'(x) \end{aligned} \tag{9.1.3 - 4}$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

Η Πρόταση 9.1.3 - 3 επίσης γενικεύεται.

Επειδή προφανώς ισχύει

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x), \quad \text{όταν} \quad \lambda \in \Re \text{ σταθερά,}$$

από τις Προτάσεις 9.1.3 - 1 - 9.1.3 - 3 προκύπτει η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**

$$[k\, f(x) + \lambda g(x)]' = k\, f'(x) + \lambda\, g'(x) \tag{9.1.3 - 5}$$

για κάθε $x \in (a,b)$, που επίσης γενικεύεται.

Πρόταση 9.1.3 - 4 (παράγωγος πηλίκου). *Αν η συνάρτηση* $f \,|\, (a,b)$ *παραγωγίζεται στο* (a,b) *και επί πλέον υπάρχει* $x_0 \in (a,b)$, *έτσι ώστε* $f'(x_0) \neq 0$, *τότε*

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x)}\,. \tag{9.1.3 - 6}$$

Πόρισμα 9.1.3 - 3. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g \,|\, (a,b)$ είναι παραγωγίσιμες στο (a,b) και επί πλέον $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε ισχύει*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b). \tag{9.1.3 - 7}$$

Πόρισμα 9.1.3 - 4. *Αν η $f \,|\, (a,b)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (a,b), τότε*

$$[f^{\nu}(x)]' = \nu f^{\nu-1}(x) f'(x) \tag{9.1.3 - 8}$$

για κάθε $x \in D$ με $\nu = 2, 3, \ldots$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του τύπου $(9.1.3 - 8)$ προκύπτει ή επαγωγικά ή από τον τύπο $(9.1.3 - 4)$, αν τεθεί

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_{\nu}(x) = f(x).$$

■

9.1.4 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Θεώρημα 9.1.4 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις $y = f(w) \,|\, D_1$ και $w = g(x) \,|\, D_2$ όπου $g(D_2) \subseteq D_1$ και D_1, D_2 ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in D_2$. Έστω επίσης ότι για ένα σημείο $x_0 \in D_2$ υπάρχουν οι παράγωγοι $g'(x_0) = w_0'$ και $y_0' = f'(w_0)$. Τότε υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $F(x)|D_2$ στο σημείο $x_0 \in D_2$ και ισχύει*

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(w)}{dw}\right|_{w=w_0} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = y_0' \, w_0'. \tag{9.1.4 - 1}$$

Σημείωση 9.1.4 - 1

Ο τύπος $(9.1.4 - 1)$ είναι γνωστός σαν ο **αλυσιδωτός κανόνας** (chain rule) παραγώγισης.

Οι παράγωγοι των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη στον Πίνακα 9.1.4 - 1.

Πίνακας 9.1.4 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	$f^a(x)$	$af'(x)f^{a-1}(x)$
2	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
3	$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
4	$\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$
5	$\cos f(x)$	$-f'(x)\sin f(x)$
6	$\tan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
7	$\cot f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
8	$\tan^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
9	$\sin^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
10	$\cos^{-1} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
11	$\sinh f(x)$	$f'(x)\cosh f(x)$
12	$\cosh f(x)$	$f'(x)\sinh f(x)$
13	$\tanh f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\tanh^2 f(x)\right]$
14	$\coth f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\coth^2 f(x)\right]$

Παράδειγμα 9.1.4 - 1

Έστω
$$f(x) = e^{-x^2}.$$
Τότε σύμφωνα με το τύπο (2) του Πίνακα 9.1.4 - 1 θα είναι
$$f'(x) = \left(-x^2\right)' e^{-x^2} = -2x e^{-x^2},$$
ενώ σύμφωνα και με τον κανόνα παραγώγισης γινομένου
$$f''(x) = (-2x)' e^{-x^2} - 2x\left(e^{-x^2}\right)' = -2\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}.$$

Όμοια υπολογίζεται ότι
$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -4x\, e^{-x^2}\left(-3+2x^2\right), \quad \text{και} \\ f^{(4)}(x) &= 4e^{-x^2}\left(3-12x^2+4x^4\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 2

Έστω $f(x) = \sin^2 3x = (\sin 3x)^2$. Όμοια από τους τύπους (1) και (4) προκύπτει ότι
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,(\sin 3x)^{2-1}(\sin 3x)' = 2\sin 3x\, \cos 3x\; (3x)' \\ &= 3\cdot \overbrace{2\sin 3x\, \cos 3x}^{\sin 6x} = 3\sin 6x, \quad \text{και} \\ f''(x) &= (3\sin 6x)' = 3\,(6x)'\sin 6x = 18\sin 6x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 3

Έστω
$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{όπου} \quad -1 < x < 1.$$
Από τον τύπο (3) και την Πρόταση 9.1.3 - 4 έχουμε
$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$
και
$$f''(x) = -\frac{\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2},$$

ενώ σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου είναι

$$f^{(3)}(x) = 2\,\frac{x'\left(1-x^2\right)^2 - \overbrace{\left[\left(1-x^2\right)^2\right]'}^{2\left(1-x^2\right)^2(-2x)}}{\left(1-x^2\right)^4} = -\frac{2\left(1+3x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}\,.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 4

Έστω

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{1/3}.$$

Τότε σύμφωνα με το τύπο (1) είναι

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{-2/3}\left(1-x^2\right)' = -\frac{2}{3}x\left(1-x^2\right)^{-2/3}.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 5

Αν

$$f(x) = \ln(1+x) + \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

να υπολογιστεί η $f'(1)$.

Λύση. Σύμφωνα με τους τύπους (3) και (9) έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,,$$

οπότε

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 6

Να υπολογιστεί η 2ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \tan^{-1} 2x$.

Λύση. Αρχικά σύμφωνα με το τύπο (8) είναι

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}\,,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.3 - 4 έχουμε

$$f''(x) = -2\,\frac{\overbrace{\left(1+4x^2\right)'}^{4\cdot 2x}}{\left(1+4x^2\right)^2} = -\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}\,.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 7

Να υπολογιστεί η ν-τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 2^x$.
Λύση. Από την ταυτότητα

$$a^x = e^{x\ln a} \quad \text{με } a > 0 \text{ και } x \in \Re,$$

προκύπτει ότι

$$f'(x) = \left(e^{x\ln 2}\right)' = (x\ln 2)'\ e^{x\ln 2} = 2^x \ln 2.$$

Όμοια $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2$ και γενικά

$$f^{(\nu)}(x) = 2^x(\ln 2)^\nu \quad \text{με} \quad \nu = 1,\,2,\,\ldots\,.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 8

Έστω $f(x) = \mathrm{sech}x$. Τότε, επειδή $\mathrm{sech}x = \frac{1}{\cosh x}$, σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.3 - 4 έχουμε

$$f'(x) \;=\; -\frac{(\cosh x)'}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\cosh x}\,\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\mathrm{sech}x\ \tanh x.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 9

Έστω $f(x) = \tanh 2x$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (13) είναι

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{\cosh^2 2x} = \frac{2}{\cosh^2 2x} = 2\,\mathrm{sech}^2 2x.$$

Αν $x = 0$, είναι

$$f'(0) = 2\left(\frac{2}{e^{2\cdot 0} + e^{-2\cdot 0}}\right)^2 = 2\cdot 1 = 2.$$

9.1.5 Διωνυμικός τελεστής

Ορισμός 9.1.5 - 1 (διωνυμικός συντελεστής). *Το σύμβολο* $\binom{\nu}{k}$ *που παριστάνει το πλήθος όλων των διαφόρων μεταξύ τους συνδυασμών των* ν *στοιχείων ανά* k, *λέγεται διωνυμικός συντελεστής (binomial coefficient) και ορίζεται από τη σχέση*

$$\binom{\nu}{k} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad k = 0;\ \nu = 1,\, 2,\, \ldots \\ \dfrac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!} & \text{αν} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu. \end{cases} \tag{9.1.5 - 1}$$

Ο διωνυμικός συντελεστής διαβάζεται ν ως προς k ή αναλυτικότερα οι συνδυασμοί των ν ως προς k.

Γενικότερα η $(9.1.5-1)$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 9.1.5 - 2 (γενίκευση διωνυμικού συντελεστή).

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad k = 0;\ a \in \Re \\ \dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} & \text{αν} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots \\ & \quad\ \text{και} \ \ a \in \Re. \end{cases} \tag{9.1.5 - 2}$$

Επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.5-1)$ είναι

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{a}{0} = 1 \text{ με } a \in \Re, \quad \binom{k}{k} = 1 \text{ με } k = 1,\, 2,\, \ldots\,, \tag{9.1.5 - 3}$$

η $(9.1.5-2)$ θα παριστάνει πάντοτε πραγματικό αριθμό.

Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι:

I.

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!} = \binom{\nu}{\nu-k} \quad \text{αν } \nu = 0, 1, \ldots \ \text{ με } k \leq \nu. \tag{9.1.5 - 4}$$

II.
$$\binom{\nu}{k}+\binom{\nu}{k+1}=\binom{\nu+1}{k+1}. \qquad (9.1.5 - 5)$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι:[5]

Πρόταση 9.1.5 - 1 (τύπος του Leibniz). *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν παραγώγους μέχρι και ν-τάξη, τότε ισχύει*

$$[f(x)g(x)]^{(\nu)}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}f^{(\nu-k)}(x)\,g^{(k)}(x), \qquad (9.1.5 - 6)$$

όταν $\nu=1,\,2,\,\ldots\,.$

Παράδειγμα 9.1.5 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο του Leibniz έχουμε

$$\begin{aligned}\left(x^4e^x\right)^{(3)} &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\left(x^4\right)^{(3-k)}(e^x)^k\\ &= \binom{3}{0}\left(x^4\right)^{(3)}(e^x)^{(0)}+\binom{3}{1}\left(x^4\right)^{(3-1)}(e^x)^{(1)}\\ &\quad+\binom{3}{2}\left(x^4\right)^{(3-2)}(e^x)^{(2)}+\binom{3}{3}\left(x^4\right)^{(3-3)}(e^x)^{(3)}\\ &= \left(24x+24x^2+12x^3+x^4\right)e^x.\end{aligned}$$

[5] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

i) $\ln(\sin\omega\, x)$

ii) $e^{-x}\,(2\sin 2x - \cos 2x)$

iii) $\cos^3\omega\, x$

iv) $\ln\left(ax^2+bx+c\right)$

v) $\dfrac{x}{x+1}+x^2\tan 2x$

vi) $\sin^2 a\, x$

vii) $\cos x^2+\ln^2 5x$

viii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

ix) $x^\nu\, 2^{-x}$

x) $\left(1-x^2\right)^{1/2}$

xi) $\sqrt{1+\ln x}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$

xii) $\ln\left(1+x^2\right)$

xiii) $\tan^{-1}(\ln x)+\ln\left(\tan^{-1} x\right)$

xiv) $\ln\left[\tan\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]-\left(\sin^{-1} x\right)^2.$

2. Να υπολογιστούν οι 2ης τάξης παράγωγοι των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.

3. Όμοια οι 2ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

i) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

ii) $\tan^{-1} 3x$

iii) xe^{-x^2}

iv) $\left(1+x^2\right)\tan^{-1} x$

v) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

vi) $\sin^2 3x$

vii) x^x

viii) $a\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right).$

4. Όμοια οι ν-τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

i) e^{-3x}

ii) $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$

iii) $\dfrac{1}{1-x}$

iv) $\sin^2\omega x$

v) $\ln(ax+b)$

vi) $\ln x$

vii) $x^{1/2}$

viii) $\dfrac{1}{1+x}$

ix) $\cos\omega x$

x) $\dfrac{1+x}{1-x}\,.$

5. Δείξτε ότι η παράγωγος μιας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση, ενώ η παράγωγος μιας περιττής είναι άρτια συνάρτηση.

6. Δείξτε ότι η παράγωγος μιας περιοδικής συνάρτησης είναι όμοια περιοδική συνάρτηση.

7. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις επαληθεύονται από τις έναντι συναρτήσεις

i) $L\dfrac{d\,i}{d\,t} + Ri = E$ από την $i = i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$,

ii) $L\dfrac{d^2 i}{d\,t^2} + R\dfrac{d\,i}{d\,t} + \dfrac{i}{C} = 0$ από την $i = i(t) = (c_1 + tc_2)\, e^{-Rt/(2L)}$,

όταν $R^2 = 4L/C$,

iii)

$$x^2 y'' + (1 - 2\nu)xy' + \left(1 + \nu^2\right) y = 0$$

από την $y = x^\nu \left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right]$.

8. Το πολυώνυμο του Hermite H_n βαθμού n ορίζονται από τον τύπο

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\, \frac{d^n\left(e^{-t^2}\right)}{d\,t^n}\,; \quad n = 0,\, 1,\, \ldots \tag{9.1.5 - 7}$$

όπου $H_0(t) = 1$. Δείξτε ότι:

$H_1(t) = 2t$ $\qquad H_3(t) = 8t^3 - 12t$

$H_2(t) = 4t^2 - 2$ $\qquad H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12$.

9. Το πολυώνυμο του Laguerre L_n βαθμού n ορίζεται από τον τύπο

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n\,!}\, \frac{d^n\left(t^n\, e^{-t}\right)}{d\,t^n}\,; \quad n = 0,\, 1,\, \ldots \tag{9.1.5 - 8}$$

με $L_0(t) = 1$. Δείξτε ότι:

$L_1(t) = 1 - t$ $\qquad L_3(t) = 1 - 3t + \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{1}{6}t^3$

$L_2(t) = 1 - 2t + \dfrac{1}{2}t^2$ $\qquad L_4(t) = 1 - 4t + 3t^2 - \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{24}t^4$.

10. Το πολυώνυμο του Legendre P_n βαθμού n ορίζεται από τον τύπο του Rodrigues ως εξής:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\; n!}\, \frac{d^n\left(t^2 - 1\right)^n}{d\,t^n}\,; \; n = 0,\, 1,\, \ldots \text{ όπου } t \in [-1, 1] \tag{9.1.5 - 9}$$

με $P_0(t)=1$. Δείξτε ότι:

$P_1(t)=t$ $\qquad$ $P_3(t)=\dfrac{1}{2}\Big(5t^3-3t\Big)$

$P_2(t)=\dfrac{1}{2}\Big(3t^2-1\Big)$ $\qquad$ $P_4(t)=\dfrac{1}{8}\Big(35t^4-30t^2+3\Big)$.

11. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibniz να υπολογιστούν οι παράγωγοι ν-τάξης των συναρτήσεων

$i)\quad x^\nu e^x$ $\qquad$ $iv)\quad \dfrac{e^x}{x}$

$ii)\quad x^2 e^{-4x}$ $\qquad$ $v)\quad \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

$iii)\quad (1-x^2)\cos x$ $\qquad$ $vi)\quad x^3\ln x$.

12. Όμοια της συνάρτησης $x^{\nu-1}\ln(1+x)$ όπου $\nu=2,\,3,\,\dots$.

13. Να δειχθεί ότι η ν-τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=e^{1/x}$ με $x\neq 0$ είναι της μορφής

$$f^{(\nu)}(x)=(-1)^\nu P_{\nu-1}(x)x^{-2\nu}e^{1/x}$$

όπου $P_{\nu-1}(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\nu-1$.

14. Όμοια ότι η ν-τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\left(1+x^2\right)^{-1/2}$ είναι της μορφής

$$f^{(\nu)}(x)=\Big(1+x^2\Big)^{-\nu-1/2}\ P_n(x)$$

όπου $P_\nu(x)$ πολυώνυμο βαθμού ν.

9.1.6 Τύποι των Taylor και Maclaurin

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο ν-βαθμού. Τότε

$$f(x)=P_\nu(x)=a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_\nu(x-a)^\nu,$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$a_0=f(a),\quad a_1=f'(a),\quad \ldots,\quad a_\nu=f^{(\nu)}(a).$$

Άρα, όταν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, έχουμε

$$f(x)=P_\nu(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1\,!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu\,!}(x-a)^\nu.$$

Γενικότερα, όταν έχουμε γενικά μία συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ με γνωστές τις τιμές των παραγώγων της σε ένα σημείο $\xi \in (a,b)$, αποδεικνύεται ότι ισχύει ο παρακάτω **τύπος του Taylor**

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1\,!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2\,!}(x-\xi)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu\,!}(x-\xi)^\nu \qquad (9.1.6 - 1) \end{aligned}$$

όπου το 2ο μέλος της (9.1.6−1) είναι το ν - βαθμού πολυώνυμο του Taylor, που προσεγγίζει την f, ενώ οι αριθμοί $f(\xi)$, $f'(\xi)$, ..., $f^{(\nu)}(\xi)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Όταν $\xi = 0$, ο τύπος $(9.1.6-1)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 \\ &= +\ldots + \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu\,!}x^\nu \qquad (9.1.6 - 2) \end{aligned}$$

που είναι γνωστός σαν **τύπος του Maclaurin**, ενώ οι αριθμοί $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(\nu)}(0)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 9.1.6 - 1

Με τον τύπο Maclaurin να υπολογιστεί το πολυώνυμο ν - βαθμού που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = e^{-ax}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{-ax} & f(0) = 1 \\ f'(x) = -a\,e^{-ax}\ f'(0) = -a & \\ f''(x) = a^2 e^{-ax} & f''(0) = a^2 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu a^\nu e^{-ax} & f^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu a^\nu. \end{array}$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^{-ax} &\approx 1 - ax + \frac{a^2}{2\,!}\,x^2 - \ldots + (-1)^\nu\,\frac{a^\nu}{\nu\,!}\,x^\nu \\ &= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k\,\frac{a^k}{k\,!}\,x^k. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.6 - 2

Όμοια με τον τύπο Taylor για $\xi = 1$ το πολυώνυμο ν-βαθμού που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

Λύση. Έχουμε

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\
f'(x) = x^{-1} & f'(1) = 1 \\
\ldots & \ldots \\
f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3x^{-4} = -3\,!\,x^{-4} & f^{(4)}(1) = -3\,! \\
\ldots & \ldots \\
f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\,(\nu-1)\,!\,x^{-\nu} & f^{(\nu)}(1) = (-1)^{\nu-1}\,(\nu-1)\,!\,.
\end{array}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\ln x &\approx x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\,\frac{(x-1)^\nu}{\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k}. \qquad (9.1.6 - 3)
\end{aligned}
$$

Θα πρέπει επίσης στο σημείο αυτό να γραφεί ότι το πολυώνυμο του Taylor αντίστοιχα του Maclaurin, όταν χρησιμοποιείται για την προσέγγιση μιας συνάρτησης, παρουσιάζει κυρίως τα παρακάτω μειονεκτήματα:

i) δεν έχει ακρίβεια που να αυξάνεται πάντοτε ανάλογα με τον βαθμό του πολυωνύμου,

ii) απαιτείται η γνώση του κέντρου ξ,

iii) απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων, κάτι που όμως δεν είναι εύκολο να γίνεται πάντοτε.

Άσκηση

Δείξτε τα αναπτύγματα του Πίνακα 9.1.6 - 1.

Πίνακας 9.1.6 - 1: των κυριότερων αναπτυγμάτων κατά Maclaurin

α/α	συνάρτηση	ανάπτυγμα
1	$\tan x$	$x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}+\dots$
2	$\tanh x$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{17x^7}{315}+\dots$
3	$\tanh x$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{17x^7}{315}+\dots$
4	$\sin^{-1} x$	$x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5}+\dots$
5	$e^{\sin x}$	$1+x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^5}{15}+\dots$
6	$e^{\cos x}$	$e\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{31x^6}{720}+\dots\right)$
7	$e^x \sin x$	$x+x^2+\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30}-\dfrac{x^5}{90}+\dots$
8	$e^x \cos x$	$1+x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{6}+\dots$
9	$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$
10	$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)\,!}$
11	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$
12	a^x	$\sum_{k=0}^{\nu}\dfrac{(x\ln a)^k}{k\,!}$
13	$\sin^2 x$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k+1}\dfrac{2^{2k-1}}{(2k)\,!}x^{2k}$
14	$\cos^2 x$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k}\dfrac{2^{2k-1}}{(2k)\,!}x^{2k}$
15	$\tanh^{-1} x$	$\sum_{k=0}^{\nu}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$
16	$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\nu}x^k$

9.1.7 Παράγωγος συνάρτησης με παραμετρική μορφή

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει την παρακάτω παραμετρική μορφή:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad \text{όταν } t \in [a, b] \tag{9.1.7 - 1}$$

όπου οι συναρτήσεις φ, ψ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες για κάθε $x \in (a, b)$[6]. Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει ο παρακάτω τύπος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,. \tag{9.1.7 - 2}$$

Παράδειγμα 9.1.7 - 1

Έστω η παραμετρική συνάρτηση

$$\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 2\sin t. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.7 - 2)$ είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos t}{-3\sin t} = -\frac{2}{3}\cot t.$$

Απαλείφοντας το t προκύπτει η έλλειψη

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Άσκηση

Των παρακάτω παραμετρικών συναρτήσεων να γίνει η γραφική παράσταση και στη συνέχεια η πρώτης τάξης παράγωγος dy/dx

[6]Για γεωμετρικές εφαρμογές των παραμετρικών παραστάσεων βλέπε Μάθημα 1.

$$i)\quad \begin{aligned} x &= \ln t \\ y &= t^2 \end{aligned} \qquad\qquad v)\quad \begin{aligned} x &= \sin^{-1} t \\ y &= \left(1-t^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$ii)\quad \begin{aligned} x &= \cos 2t \\ y &= \sin^2 t \end{aligned} \qquad\qquad vi)\quad \begin{aligned} x &= t^{1/2} \\ y &= t^{1/3} \end{aligned}$$

$$iii)\quad \begin{aligned} x &= a\left(\sin t - t\cos t\right) \\ y &= a\left(\cos t + t\sin t\right) \end{aligned} \qquad vii)\quad \begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{aligned} \quad \text{αν } t = \frac{\pi}{4}$$

$$iv)\quad \begin{aligned} x &= a\left(t - \sin t\right) \\ y &= a\left(t - \cos t\right) \end{aligned} \qquad viii)\quad \begin{aligned} x &= \ln\left(1+t^2\right) \\ y &= t^2 \end{aligned} \quad \text{αν } t = 0.$$

9.1.8 Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης

΄Οταν η σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής x και της συνάρτησης y δίνεται με τη μορφή

$$f(x,y)=0, \tag{9.1.8 - 1}$$

τότε λέγεται ότι έχουμε μία **πεπλεγμένη** συνάρτηση (implicit function). Η εύρεση της παραγώγου μιας πεπλεγμένης συνάρτησης στις απλούστερες των περιπτώσεων είναι δυνατόν να υπολογιστεί ως εξής:

i) υπολογίζεται η παράγωγος με μεταβλητή x στο αριστερό μέλος της $(9.1.8-1)$, θεωρώντας το y ως συνάρτηση του x, δηλαδή υπολογίζεται η παράγωγος

$$\frac{df(x,y)}{dx}=0\,, \tag{9.1.8 - 2}$$

ii) λύνεται η $(9.1.8-2)$ ως προς y'.

Παράδειγμα 9.1.8 - 1

΄Εστω η συνάρτηση

$$x\,y+e^y=0, \quad \text{όταν} \quad y=y(x).$$

Τότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$x'y + x\,y' + y'e^y = 0 \quad ή \quad y + (x + e^y)\,y' = 0$$

οπότε λύνοντας ως προς y' προκύπτει ότι

$$y' = -\frac{y}{x + e^y}\,.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω πεπλεγμένων συναρτήσεων $y = y(x)$

$i)$	$x^3 + y^3 = a^3$	$vii)$	$\tan y = xy$
$ii)$	$a\cos^2(x+y) = \beta$	$viii)$	$x^3 + x^2y + y^2 = 0$
$iii)$	$xy = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$	$ix)$	$e^y = x + y.$

[7]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος Θ. (2008), Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 978–960–456–092–9.

[4] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων