Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 10: Παράγωγος Συνάρτησης – Μέρος ΙΙ

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 10

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΜΕΡΟΣ ΙΙ

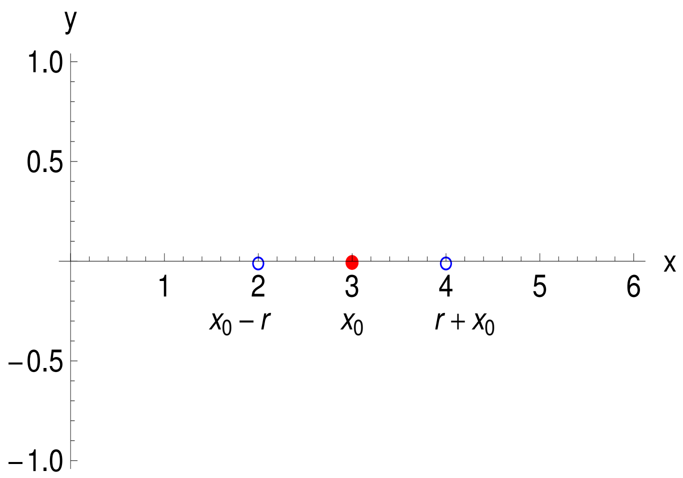
10.1 Ακρότατα και σχετικά θεωρήματα

10.1.1 Ακρότατα

Ορισμός 10.1.1 - 1 (περιοχής). *Έστω $x_0 \in \Re$ και $r > 0$. Τότε ορίζεται σαν περιοχή του σημείου x_0 με ακτίνα r και συμβολίζεται με $\varpi\left(x_0, r\right)$ ή απλά $\varpi\left(x_0\right)$ το ανοικτό διάστημα $\left(x_0 - r, x_0 + r\right)$ (Σχ. 10.1.1 - 1).*

Ορισμός 10.1.1 - 2 (τοπικό ακρότατο). *Έστω μία συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε θα λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ένα τοπικό μέγιστο, αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο τότε και μόνον, όταν υπάρχει $\varpi\left(x_0\right)$, έτσι ώστε $f(x) \leq f\left(x_0\right)$, αντίστοιχα $f(x) \geq f\left(x_0\right)$ για κάθε $x \in \varpi\left(x_0\right) \cap D$.*

Ορισμός 10.1.1 - 3 (ολικό ακρότατο). *Έστω μία συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε θα λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ένα ολικό μέγιστο, αντίστοιχα ολικό ελάχιστο τότε και μόνον, όταν $f(x) \leq f\left(x_0\right)$ αντίστοιχα $f(x) \geq f\left(x_0\right)$ για κάθε $x \in D$.*



Σχήμα 10.1.1 - 1: Περιοχή του σημείου $x_0 = 3$ με ακτίνα $r = 1$. Τότε $\varpi(3,1) = \varpi(3) = (2,4)$

Ορισμός 10.1.1 - 4 (θέση ακρότατου). *Ένα σημείο $x_0 \in D$ στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη, αντίστοιχα ελάχιστη τιμή, θα λέγεται θέση ακρότατου (extremum) της f (Σχ. 10.1.1 - 2).*

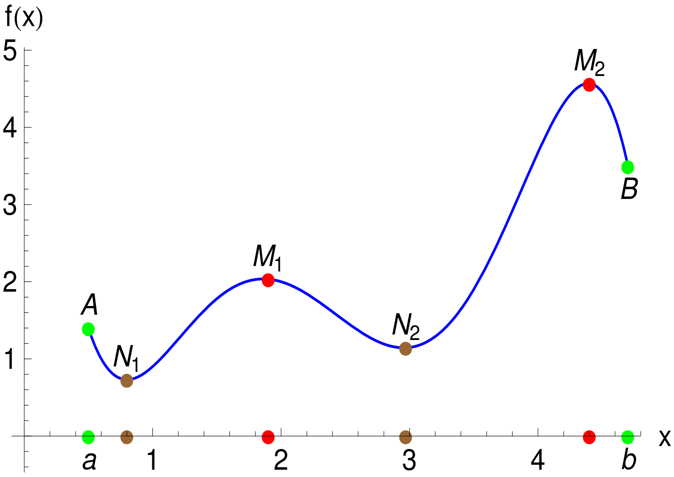
10.1.2 Σχετικά θεωρήματα

Θεώρημα 10.1.2 - 1 (Fermat). *Αν μία συνάρτηση $f|D$ με D ανοικτό διάστημα παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ ένα τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) και επί πλέον υπάρχει η παράγωγος της f στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.*

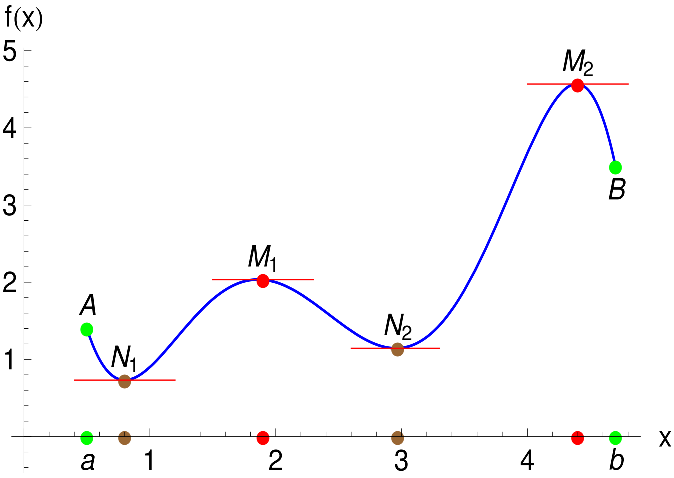
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει πάντοτε.

Παρατηρήσεις 10.1.2 - 1

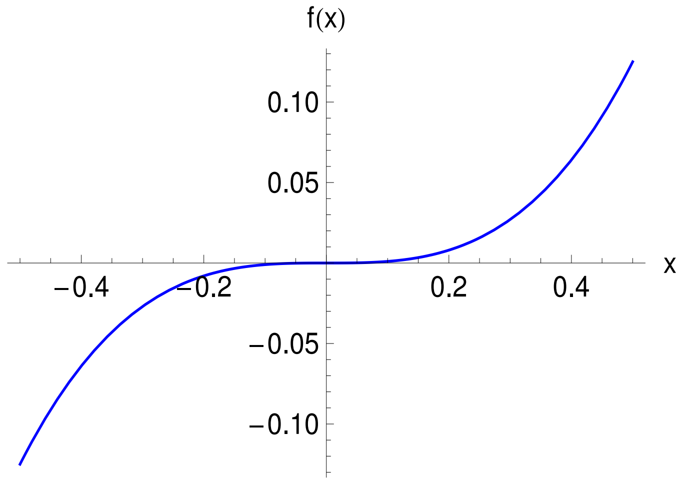
i) Αν το σημείο x_0 είναι άκρο του διαστήματος D, τότε η παράγωγος $f'(x)$ δεν μηδενίζεται πάντοτε, όπως αυτό φαίνεται στη συνάρτηση $f(x)$ του Σχ. 10.1.2 - 1 με πεδίο ορισμού $[0.5, 4.7]$.



Σχήμα 10.1.1 - 2: Τα σημεία N_2, B, αντίστοιχα τα A, M_1 είναι θέσεις τοπικού ελάχιστου, αντίστοιχα τοπικού μέγιστου, ενώ το σημείο N_1, αντίστοιχα το M_2 είναι θέση ολικού ελάχιστου, αντίστοιχα ολικού μέγιστου



Σχήμα 10.1.2 - 1: Συνάρτηση $f(x) = -0.2614695(-4.964911+x)(9.648431-6.07417x + x^2)(0.6597672 - 1.46998x + x^2)$. Η $f'(x) = 0$ στα σημεία N_1, M_1, N_2, M_2, ενώ είναι $f'(a) = f'(0.5) = -5.11353$ και $f'(b) = f'(4.7) = -7.810628$, δηλαδή το Θεώρημα του Fermat δεν εφαρμόζεται



Σχήμα 10.1.2 - 2: Συνάρτηση $f(x) = x^3$. Η $f'(x) = 3x^2$ μηδενίζεται στο σημείο $x_0 = 0$, αλλά η f δεν έχει ακρότατο στο x_0

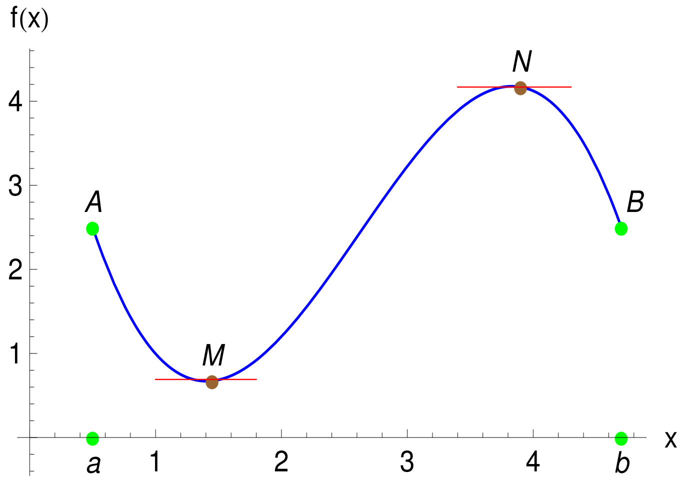
ii) Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης $f|D$ μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in D$, τότε δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι το σημείο αυτό είναι θέση ακρότατου, όπως αυτό φαίνεται στη συνάρτηση $f(x) = x^3$ όπου $f'(x) = 3x^2$ και η οποία μηδενίζεται στο σημείο $x_0 = 0$, ενώ η f ανέρχεται στο σημείο αυτό, δηλαδή δεν παρουσιάζει ακρότατο (Σχ. 10.1.2 - 2).

iii) Τα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος λέγονται και **κρίσιμα σημεία** (critical points) της συνάρτησης.

Δίνονται τώρα χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεμελιώδη θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού.

Θεώρημα 10.1.2 - 2 (Rolle). *Έστω ότι η συνάρτηση $f|[a,\beta\,]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, \beta\,]$ και επί πλέον ότι υπάρχει η $f'(x)$ ή απειρίζεται για κάθε $x \in (a,\beta)$. Αν $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (a,\beta)$, έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$. (Σχ. 10.1.2 - 3)*

Θεώρημα 10.1.2 - 3 (μέσης τιμής). *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[a,\beta\,]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, \beta\,]$ και επί πλέον ότι για κάθε $x \in (a,\beta)$ υπάρχει*



Σχήμα 10.1.2 - 3: Θεώρημα του Rolle. Συνάρτηση $f(x) = -0.4917695(-5.140385+x)(2.201698-2.712335x+x^2)$. Η $f'(x)=0$ στα σημεία $x_M = 1.45$ και $x_N = 4.7$

η $f'(x)$ ή απειρίζεται. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (a, \beta)$ (Σχ. 10.1.2 - 4), έτσι ώστε

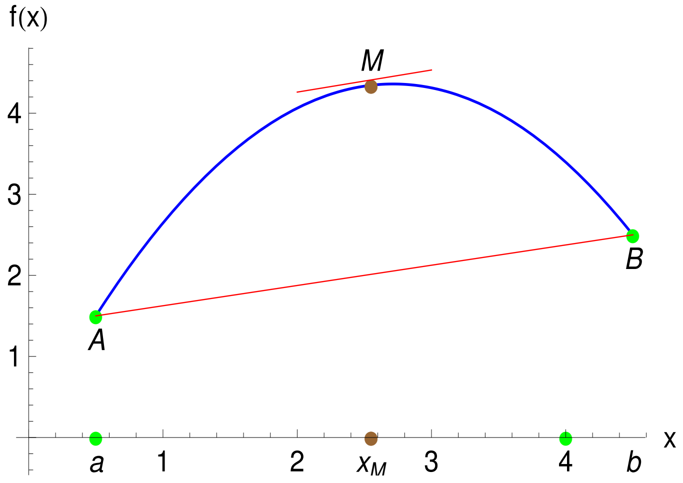
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}\,. \tag{10.1.2 - 1}$$

10.2 Μελέτη συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα δοθούν οι κυριότεροι ορισμοί και θεωρήματα που εφαρμόζονται για τη μελέτη και τη γραφική παράσταση του διαγράμματος μιας συνάρτησης. Συνιστάται στον αναγνώστη εκτός από τη θεωρητική μελέτη, να κάνει και εφαρμογή των ασκήσεων που λύνονται στο μάθημα με μαθηματικά πακέτα, όπως είναι το MATHEMATICA, MATLAB κ.λπ.

10.2.1 Μονοτονία συνάρτησης

Αρχικά γίνεται υπενθύμιση του ορισμού της μονοτονίας μιας συνάρτησης, που δόθηκε στο Μάθημα 3. Το πεδίο ορισμού D των συναρτήσεων θα θεωρείται



Σχήμα 10.1.2 - 4: Θεώρημα της μέσης τιμής. Συνάρτηση $f(x) = -0.5833333(-5.448237 + x)(0.0196656 + x)$. Η εφαπτομένη στο σημείο M όπου $\xi = x_M = 2.55$ είναι παράλληλη της ευθείας AB

ότι είναι ένα ανοικτό διάστημα, εκτός και αν διαφορετικά ορίζεται.

Ορισμός 10.2.1 - 1 (μονοτονίας). *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και $x_1,\ x_2 \in D$, όπου χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα υποτίθεται ότι $x_1 < x_2$. Τότε αν:*

i) $f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right)$ *η f θα λέγεται αύξουσα και θα συμβολίζεται με* $\uparrow$.

ii) $f\left(x_1\right) \geq f\left(x_2\right)$ *η f θα λέγεται φθίνουσα και θα συμβολίζεται με* $\downarrow$. *Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση θα λέγεται* **μονότονη**.

iii) $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$ *η f θα λέγεται γνήσια αύξουσα και θα συμβολίζεται με* $\Uparrow$.

iv) $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$ *η f θα λέγεται γνήσια φθίνουσα και θα συμβολίζεται με* $\Downarrow$. *Στις περιπτώσεις (iii) και (iv) η συνάρτηση θα λέγεται* **γνήσια μονότονη**.

Θεωρήματα σχετικά με τη μονοτονία

Θεώρημα 10.2.1 - 1. *Αν η συνάρτηση $f|D$ παραγωγίζεται για κάθε $x \in D$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in D$, τότε η f έχει σταθερή τιμή στο D και αντίστροφα.*

Πόρισμα 10.2.1 - 1. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g \,|\, D$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $x \in D$. Τότε οι συναρτήσεις θα έχουν ίσες παραγώγους τότε και μόνον, όταν η διαφορά τους είναι μία σταθερή συνάρτηση στο D.*

Θεώρημα 10.2.1 - 2 (έλεγχος μονοτονίας). *Έστω ότι η συνάρτηση $f \,|\, D$ παραγωγίζεται για κάθε $x \in D$. Τότε*

i) αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι γνήσια αύξουσα,

ii) αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι αύξουσα,

iii) αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι γνήσια φθίνουσα,

iv) αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι φθίνουσα.

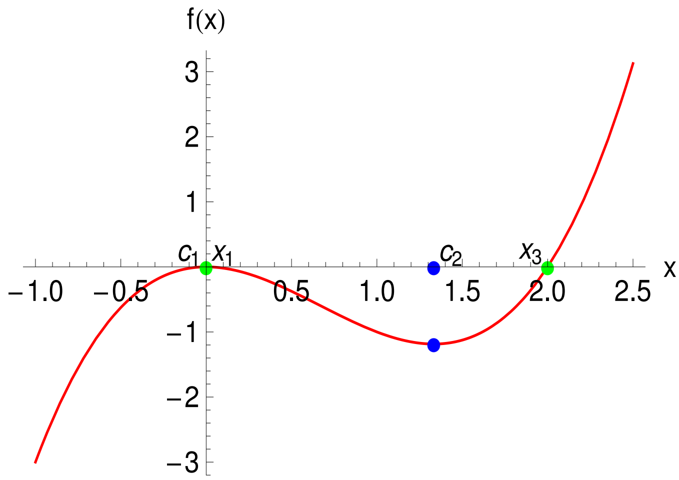
Παράδειγμα 10.2.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2(x-2) \quad \text{με} \quad f'(x) = x(3x-4).$$

Οι ρίζες της f είναι $x_1 = 0$ με πολλαπλότητα 2 και $x_2 = 2$ με πολλαπλότητα 1, ενώ τα κρίσιμα σημεία της f είναι $c_1 = 0$ και $c_2 = \frac{4}{3}$. Το πρόσημα της πρώτης παραγώγου δίνονται στον Πίνακα 10.2.1 - 1, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x)$ στο Σχ. 10.2.1 - 1, όπου προφανώς από τον τύπο της $f(x)$ προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



Σχήμα 10.2.1 - 1: Παράδειγμα 10.2.1 - 1

Πίνακας 10.2.1 - 1

Συνάρτηση	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
f'		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$		$+$	
f		$\nearrow$	$\circ$	$\searrow$		$\nearrow$	$\circ$	$\nearrow$	
ακρότατα			max		min				

10.2.2 Υπολογισμός ακρότατων

Δίνονται στη συνέχεια τα θεωρήματα σύμφωνα με τα οποία υπολογίζονται τα ακρότατα μιας συνάρτησης, όταν υπάρχουν.

Θεώρημα 10.2.2 - 1. *Αν η συνάρτηση $f|(a,b)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (a,b)$, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες*

i) η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ ακρότατο,

ii) η παράγωγος της f παρουσιάζει στο σημείο x_0 αλλαγή προσήμου.

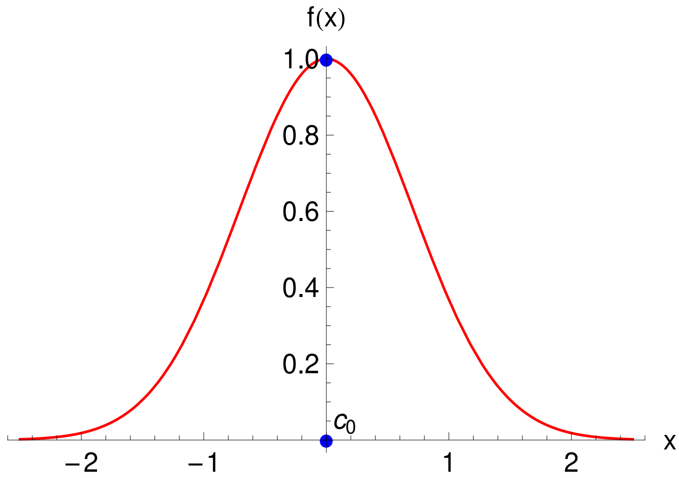
Παρατήρηση 10.2.2 - 1

Επειδή το πρόσημο της πρώτης παραγώγου συνδέεται με την μονοτονία της συνάρτησης, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2 - 1, όταν η συνάρτηση είναι αύξουσα αριστερά του σημείου x_0 και φθίνουσα δεξιά του, το σημείο x_0 θα είναι θέση μεγίστου, ενώ, όταν είναι φθίνουσα αριστερά του σημείου x_0 και αύξουσα δεξιά του, το x_0 θα είναι θέση ελαχίστου.

Παράδειγμα 10.2.2 - 1

Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = x^2(x-2)$$
του Παραδείγματος 10.2.1 - 1. Τότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 10.2.2 - 1 και τον Πίνακα 10.2.1 - 1, η συνάρτηση πρέπει να παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = 0$, επειδή στο σημείο αυτό από αύξουσα γίνεται φθίνουσα και ελάχιστο στο $x = \frac{4}{3}$, επειδή από φθίνουσα γίνεται αύξουσα (Σχ. 10.2.1 - 1).

Θεώρημα 10.2.2 - 2. *Έστω η συνάρτηση $f|D$, τέτοια ώστε να υπάρχει η $f'(x)$ στο D και να είναι συνεχής, ενώ για ένα σημείο $x_0 \in D$ να ισχύει $f'(x_0) = 0$ (κρίσιμο σημείο). Τότε, αν υπάρχει και η $f''(x)$ στο D και ισχύει $f''(x_0) < 0$, αντίστοιχα $f''(x_0) > 0$, η f παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο, αντίστοιχα ελάχιστο.*



Σχήμα 10.2.2 - 1: Παράδειγμα 10.2.2 - 2: το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$

Παράδειγμα 10.2.2 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης προφανώς προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Επίσης είναι

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad \text{με ρίζα (κρίσιμο σημείο)} \quad c_0 = 0.$$

Τότε, επειδή

$$f''(x) = -2\left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2} \quad \text{και} \quad f''(c_0) = f''(0) = -2 < 0,$$

η f σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2 - 2 θα παρουσιάζει στο σημείο $c_0 = 0$ μέγιστο (ολικό) με τιμή $f(c_0) = f(0) = 1$ (Σχ. 10.2.2 - 1).

Πολλές φορές η ρίζα της 1ης παραγώγου είναι και ρίζα της 2ης παραγώγου κ.λπ. Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος της ύπαρξης ακρότατου γίνεται με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 10.2.2 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f|D$ όπου D ανοικτό διάστημα, τέτοια ώστε να υπάρχουν οι παράγωγοι της f στο D μέχρι και τάξης $2\nu - 1$. Έστω επίσης ότι για κάποιο $x_0 \in D$ ισχύει ότι $f^{(k)}(x_0) = 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, 2\nu - 1$. Αν η συνάρτηση $f^{(2\nu-1)}(x)$ είναι συνεχής στο D και υπάρχει η $f^{(2\nu)}(x)$ και είναι $f^{(2\nu)}(x_0) < 0$, αντίστοιχα $f^{(2\nu)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 μέγιστο, αντίστοιχα ελάχιστο.*

Παράδειγμα 10.2.2 - 3

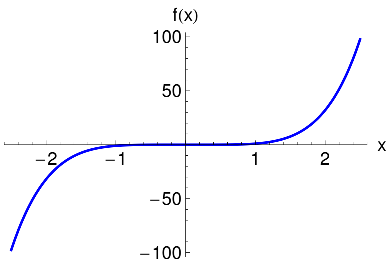
Η συνάρτηση

$$f(x) = x^5$$

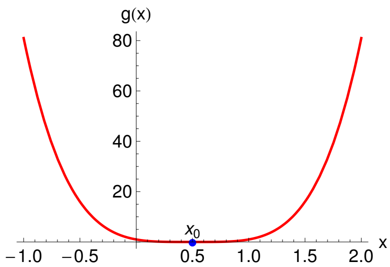
δεν παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 0$ ακρότατο (Σχ. 10.2.2 - 2 a), επειδή $f^{(5)}(x_0) = 120$, δηλαδή η τάξη της μη μηδενικής τιμής της παραγώγου της f είναι 5 (περιττός αριθμός), οπότε δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 10.2.2 - 3, ενώ η

$$g(x) = (2x-)^4$$

παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$ ακρότατο, επειδή είναι $g^{(4)}(x_0) = 384$, δηλαδή η τάξη της μη μηδενικής τιμής της παραγώγου είναι 4 (άρτιος αριθμός). Άρα το Θεώρημα 10.2.2 - 3 εφαρμόζεται και, επειδή $g^{(4)}(x_0) = 384 > 0$, το ακρότατο είναι ελάχιστο (Σχ. 10.2.2 - 2 b).



(a)



(b)

Σχήμα 10.2.2 - 2: (α) Συνάρτηση $f(x) = x^5$ και (b) η $g(x) = (2x-1)^4$ με $x_0 = 0.5$

10.2.3 Υπολογισμός σημείων καμπής, ασύμπτωτων ευθειών

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση $f \mid D$ έχει 2ης τάξηw παράγωγο στο D. Η μελέτη του προσήμου της f'' δίνει πρόσθετες πληροφορίες για τη γραφική παράσταση της f και συγκεκριμένα για την **καμπυλότητά** της (curvature ή concavity). Ειδικότερα τα σημεία στα οποία η 2η παράγωγος αλλάζει πρόσημο, ορίζουν τα λεγόμενα **σημεία καμπής** (inflection points) του διαγράμματος της f. Συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

i) Αν
$$f''(x) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in D,$$
σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.1 - 2 η 1η παράγωγος της f θα είναι αύξουσα στο D και αντίστροφα. Τότε όμως, καθώς το x αυξάνει στο D, ο αντίστοιχος συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $(x, f(x))$ θα αυξάνει επίσης. Αυτό έχει σαν συνέπεια η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία ή όπως συνήθως λέγεται, η f στρέφει τα **κοίλα άνω** (concave upwards) στο D.

ii) Όμοια, αν
$$f'' < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in D,$$
τότε η f στρέφει τα **κοίλα κάτω** (concave downwards) στο D.

Παρατήρησεις 10.2.3 - 1

i) Προφανώς στα σημεία καμπής είναι $f''(x) = 0$, διαφορετικά οι ρίζες της 2ης παραγώγου είναι πιθανά σημεία καμπής. Επομένως η συνθήκη $f''(x) = 0$ είναι *αναγκαία, αλλά όχι και ικανή.*[1]

ii) Τα σημεία καμπής είναι επίσης δυνατόν να κατηγοριοποιηθούν από τον αντίστοιχο μηδενισμό ή μη της 1ης παραγώγου. Συγκεκριμένα, έστω ότι x_0 είναι ένα σημείο καμπής, οπότε $f''(x_0) = 0$. Τότε:

a. αν είναι επίσης $f'(x_0) = 0$, το x_0 λέγεται **σταθερό** (stationary) ή **σαγματικό** (saddle) **σημείο καμπής**, ενώ αν

[1] Βλέπε Θεώρημα 10.2.2 - 3 και Παράδειγμα 10.2.2 - 3.

b. $f'(x_0) \neq 0$, το σημείο x_0 λέγεται **μη σταθερό** (non-stationary) σημείο καμπής.

ii) Αν είναι $f''(x_0) = 0$, ενώ στο x_0 η f'' δεν αλλάζει πρόσημο, τότε το x_0 λέγεται **σημείο κυματισμού** (undulation ή hyperflex point) του διαγράμματος.[2]

Παράδειγμα 10.2.3 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3\left(x^2 - 1\right)$$

με ρίζες

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0 \quad \text{με πολλαπλότητα} \quad 3 \quad \text{και} \quad x_3 = 1.$$

Η f είναι περιττή, οπότε το διάγραμμά της θα είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων O.

Η 1η παράγωγός της είναι

$$f'(x) = x^2\left(5x^2 - 3\right)$$

με ρίζες (κρίσιμα σημεία)

$$c_1 \approx -0.78, \quad c_2 = 0 \quad \text{με πολλαπλότητα} \quad 2 \quad \text{και} \quad c_3 \approx 0.78,$$

ενώ η 2η παράγωγός της

$$f''(x) = 2x\left(10x^2 - 3\right)$$

με ρίζες

$$d_1 \approx -0.6, \quad d_2 = 0 \quad \text{και} \quad d_3 \approx 0.6.$$

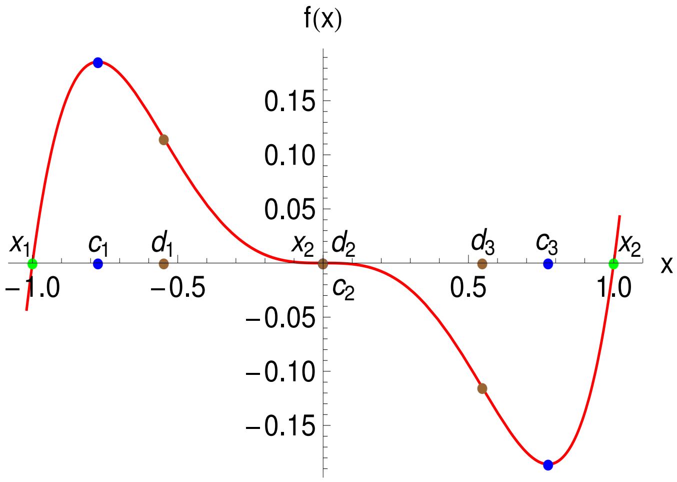
Τότε υπολογίζοντας τις τιμές της 2ης παραγώγου στα κρίσιμα σημεία, διαφορετικά εξετάζοντας τη μονοτονία της f, προκύπτει ότι:

- η f παρουσιάζει στο σημείο $c_1 \approx -0.8$ μέγιστο, επειδή $f''(-0.8) < 0$, διαφορετικά επειδή η f από αύξουσα γίνεται φθίνουσα,

[2] Βλέπε σημείο $x_0 = 0.5$ στο Σχ. 10.2.2 - 2 b.

Πίνακας 10.2.3 - 1: Παράδειγμα 10.2.3 - 1

	$-\infty$	-1		-0.8		-0.6		0		0.6		0.8		1	$+\infty$
f'	+		+	○	-		-	○	-		-	○	+		+
f''	-		-		-	○	+	○	-	○	+		+		+
f	-	○	+		+		+	○	-		-		-	○	+
	↗		↗		↘		↘		↘		↘		↗		↗
				max								min			



Σχήμα 10.2.3 - 1: Παράδειγμα 10.2.3 - 1

- στο $c_3 \approx 0.8$ ελάχιστο, επειδή $f''(0.8) > 0$, διαφορετικά επειδή η f από φθίνουσα γίνεται αύξουσα, ενώ
- για το σημείο 0 έχουμε $f''(0) = 0$, ενώ $f^{(3)}(0) = -24 < 0$ (περιττή τάξη), οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2 - 3 δεν υπάρχει ακρότατο της f.

Από το πρόσημο της 2ης παραγώγου προκύπτει ότι το διάγραμμα της f έχει σημεία καμπής τα $d_1 \approx -0.6$, $d_2 = 0$ και $d_3 \approx 0.6$, επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο στα σημεία αυτά και επί πλέον

- στρέφει τα κοίλα κάτω στα διαστήματα $(-\infty, -0.6)$ και $(0, 0.6)$, επειδή στα αντίστοιχα διαστήματα είναι $f''(x) < 0$, ενώ

- στα $(-0.6, 0)$ και $(0.6, \infty)$ προς τα άνω,, επειδή είναι $f''(x) > 0$ (Σχ. 10.2.3 - 1).
- Τέλος, επειδή το σημείο $d_2 = 0$ είναι ρίζα και της 1ης παραγώγου, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 10.2.3 - 1 (iia) το σημείο αυτό θα είναι σαγματικό.

Ασύμπτωτες ευθείες

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω ορισμοί, που αφορούν τις λεγόμενες ασύμπτωτες (asymptotes) ευθείες του διαγράμματος μιας συνάρτησης.

Ορισμός 10.2.3 - 1 (οριζόντια ασύμπτωτη). *Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού της μορφής $(-\infty, \gamma)$, αντίστοιχα $(\gamma, +\infty)$. Τότε η ευθεία $y = ax + b$ θα λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη (horizontal asymptote) του διαγράμματος της f, όταν*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\,, \quad \textit{αντίστοιχα} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Τότε από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] \tag{10.2.3 - 1}$$

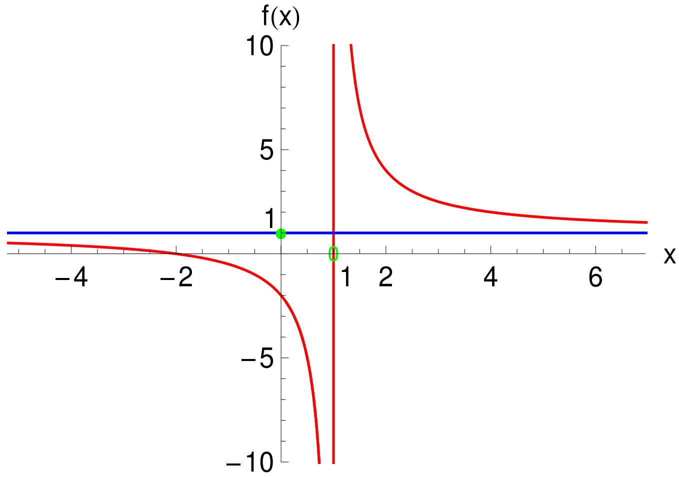
Όμοια ορίζεται και η **πλάγια ασύμπτωτη** (oblique ή slant) ευθεία

$$y = ax + b, \quad \text{όταν} \quad a \neq 0,$$

ενώ ισχύουν ανάλογοι τύποι υπολογισμού των a, b.

Ορισμός 10.2.3 - 2 (κατακόρυφη ασύμπτωτη ευθεία). *Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα τουλάχιστον ανοικτό διάστημα της μορφής (γ, δ). Τότε η ευθεία $x = \gamma$ αντίστοιχα $x = \delta$ θα λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη (vertical asymptote) του διαγράμματος της f, όταν*

$$\lim_{x \to \gamma + 0} f(x) = +\infty \quad ή \quad \lim_{x \to \gamma + 0} f(x) = -\infty, \tag{10.2.3 - 2}$$



Σχήμα 10.2.3 - 2: Παράδειγμα 10.2.3 - 2: Συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

αντίστοιχα

$$\lim_{x\to\delta+0} f(x) = +\infty \quad ή \quad \lim_{x\to\delta+0} f(x) = -\infty. \tag{10.2.3 - 3}$$

Παράδειγμα 10.2.3 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

με πεδίο ορισμού $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Τότε η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f, επειδή

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty,$$

ενώ

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1,$$

που σημαίνει ότι η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (Σχ. 10.2.3 - 2).

Ασκήσεις

1. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$:

$i)$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2$	$vii)$	$x + \dfrac{1}{x}$
$i)$	$x^3 - 3x^2 - 144x + 432$	$viii)$	$(1+x)\, e^{-x}$
$iii)$	$e^{-x} \sin x$	$ix)$	$x^2 \ln x$
$iv)$	$\exp\left[-\dfrac{1}{x}\right]$	$x)$	$\dfrac{\sin x^2}{x}$
$v)$	$\exp\left[-\dfrac{1}{x^2}\right]$	$xi)$	$\dfrac{\sin x}{x}$
$vi)$	$x - \ln(x-2)$	$xii)$	$\dfrac{\cos x}{x}$

2. Να γίνει η γραφική παράσταση των αντίστροφων τριγωνομετρικών, υπερβολικών και αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.

3. Όμοια των πολυωνύμων 2ου και 3ου βαθμού των Legendre, Laguerre και Hermite.

4. Δύο αντίθετα ηλεκτρικά φορτία q_1 και q_2 είναι τοποθετημένα στα σημεία A και B αντίστοιχα, όπου $(AB) = d$ σταθερά. Στο σημείο M με $(AM) = x$ της ευθείας AB η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{x}^2 + \frac{q_2}{(d-x)^2}\right].$$

Να υπολογιστεί το σημείο εκείνο της ευθείας AB για το οποίο η ένταση E είναι ελάχιστη.

5. Το καλώδιο υποθαλάσσιου τηλέγραφου αποτελείται από δέσμη συρμάτων χαλκού με μονωτικό υλικό εξωτερικά (τομή κυκλική). Έστω x ο λόγος της ακτίνας της δέσμης προς το πάχος του μονωτικού. Τότε η ταχύτητα διάδοσης των σημάτων δίνεται από τη σχέση

$$v = -ax^2 \ln x.$$

Να υπολογιστεί η τιμή του x, έτσι ώστε η ταχύτητα να είναι μέγιστη.

6. Η ισχύς P που παράγεται από ένα ηλεκτρικό στοιχείο σταθερής ηλεκτρεγερτικής δύναμης E και σταθερής εσωτερικής αντίστασης r, όταν διέρχεται ρεύμα δια μέσου σταθερής εξωτερικής αντίστασης R, είναι

$$P = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}\,.$$

Να υπολογιστεί η τιμή του R, που καθιστά την ισχύ μέγιστη.

7. Η κίνηση εκκρεμούς, όταν ληφθεί υπ' όψιν και η αντίσταση του αέρα, δίνεται από τον τύπο

$$\theta(t) = c\,e^{-kt}\cos(\omega t + \varphi),$$

όταν $c,\, k > 0,\ \omega \neq 0,\ \varphi$ σταθερές και θ η τιμή της γωνίας που σχηματίζει το νήμα με την διεύθυνση της κατακορύφου. Να υπολογιστούν οι χρονικές στιγμές, που η γωνία θ γίνεται μέγιστη.

[3]

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος Θ. (2008), Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 978–960–456–092–9.

[4] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Ανώτερα Μαθηματικά Ι. Ενότητα 10: Παράγωγος Συνάρτησης – Μέρος ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων