Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 12: Αόριστο Ολοκλήρωμα

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 12

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

12.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότεροι κανόνες ολοκλήρωσης, που κύρια εμφανίζονται στις τεχνολογικές εφαρμογές. Διευκρινίζεται ότι ακολουθώντας μία αυστηρά μαθηματική σειρά το μάθημα αυτό κανονικά πρέπει να ακολουθεί αυτό του ορισμένου ολοκληρώματος, που ακολουθεί στη συνέχεια.[1]

12.1.1 Παράγουσα συνάρτηση

Ορισμός 12.1.1 - 1 (αόριστο ολοκλήρωμα). *Έστω οι συναρτήσεις f και F με κοινό πεδίο ορισμού D όπου $D \subseteq \Re$. Τότε η F θα λέγεται ότι είναι μία παράγουσα ή αρχική συνάρτηση ή διαφορετικά ένα αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο D και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in D \tag{12.1.1 - 1}$$

τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της F στο D και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in D. \tag{12.1.1 - 2}$$

[1] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη των εννοιών και των κανόνων ολοκλήρωσης που θα δοθούν, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 7.

Συνεπώς

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{τότε και μόνον, όταν} \quad F'(x) = f(x) \qquad (12.1.1 - 3)$$

για κάθε $x \in D$ και αντίστροφα.

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 12.1.1 - 1. *Αν F και G είναι δύο παράγουσες της συνάρτησης f στο D, τότε αυτές θα διαφέρουν κατά μία σταθερά συνάρτηση.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.1.1 - 1 ο τύπος $(12.1.1 - 3)$ τελικά γράφεται

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{για κάθε} \quad x \in D \qquad (12.1.1 - 4)$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Στο παρακάτω παράδειγμα δίνονται τα αόριστα ολοκληρώματα ορισμένων συναρτήσεων, ενώ στον Πίνακα 12.1.1 - 1 των κυριότερων στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 12.1.1 - 1

- $$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c\,, \quad \text{επειδή} \quad \left(\frac{x^4}{4} + c\right)' = x^3.$$

- $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c\,, \quad \text{επειδή} \quad (\ln|x| + c)' = \frac{1}{x}\,, \quad \text{όταν} \quad x > 0.$$

- $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c\,, \quad \text{επειδή} \quad (\tan x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

- $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c\,, \quad \text{επειδή} \quad \left(\tan^{-1} x + c\right)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Πίνακας 12.1.1 - 1: αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων στοιχειωδών συναρτήσεων

α/α	$f(x)$	$F(x)$	α/α	$f(x)$	$F(x)$
1	$x^a;\ a \in \Re - \{-1\}$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	7	e^x	e^x
2	$\sin x$	$-\cos x$	8	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
3	$\cos x$	$\sin x$	9	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
4	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$	10	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$
5	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$	11	$\cosh x$	$\sinh x$
6	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x$	12	$\sinh x$	$\cosh x$

12.1.2 Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 12.1.2 - 1. *Αν f είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο D και $\lambda \in \Re$, τότε*

$$\int \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx. \tag{12.1.2 - 1}$$

Θεώρημα 12.1.2 - 2. *Αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο D, τότε*

$$\int \left[f(x) + g(x)\right]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx. \tag{12.1.2 - 2}$$

Από τις $(12.1.2-1)$ και $(12.1.2-2)$ προκύπτει τότε η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**

$$\int \left[k f(x) + \lambda g(x)\right]\, dx = k \int f(x)\, dx + \lambda \int g(x)\, dx, \tag{12.1.2 - 3}$$

όταν k, $\lambda \in \Re$. Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται για ν - συναρτήσεις.

Παράδειγμα 12.1.2 - 1

$$\begin{aligned}
\int \left(2x^2 + 5\sin x - e^x\right)\, dx &= 2\int x^2\, dx + 5\int \sin x\, dx - \int e^x\, dx \\
&= 2\,\frac{x^3}{3} + 5\,(-\cos x) - e^x + c \\
&= \frac{2\,x^3}{3} - 5\,\cos x - e^x + c.
\end{aligned}$$

Όμοια

$$\begin{aligned}
\int \left(2\tan x - \sqrt[3]{x} + \frac{4}{x}\right)\, dx &= 2\int \tan x\, dx + \int x^{1/3} dx + 4\int \frac{dx}{x} \\
&= 2\,\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 4\ln|x| + c \\
&= \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{4}\, x^{\frac{4}{3}} + 4\ln|x| + c.
\end{aligned}$$

12.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Δίνονται στη συνέχεια ορισμένες μέθοδοι ολοκλήρωσης, που απαιτούνται στη λύση των διαφόρων προβλημάτων, που κύρια εμφανίζονται στις διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές. Στο εξής υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις που εξετάζονται είναι ολοκληρώσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

12.2.1 Ολοκλήρωση με δημιουργία του διαφορικού

Ο Πίνακας 12.1.1 - 1 των ολοκληρωμάτων της παραγράφου 12.1.2 δεν εφαρμόζεται, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι σύνθετη. Έχοντας υπ' όψιν τον Πίνακα $9.1.4 - 1$ και τον τύπο $(9.1.4 - 1)$ του Μαθήματος 9, είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε τον παρακάτω Πίνακα 12.2.1 - 1 με τα αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

Πίνακας 12.2.1 - 1: αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων

α / α	Συνάρτηση	Αόριστο ολοκλήρωμα
1	$f'(x)f^{a}(x);\ \ a \in \Re - \{-1\}$	$\dfrac{f^{\,a+1}(x)}{a+1}$
2	$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$
3	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
4	$f'(x)\sin f(x)$	$-\cos f(x)$
5	$f'(x)\cos f(x)$	$\sin f(x)$
6	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$	$\tan f(x)$
7	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$	$\cot f(x)$
8	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$\tan^{-1} f(x)$
9	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$\sin^{-1} f(x)$
10	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$\cos^{-1} f(x)$
11	$f'(x)\cosh f(x)$	$\sinh f(x)$
12	$f'(x)\sinh f(x)$	$\cosh f(x)$
13	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)}$	$\tanh f(x)$
14	$-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)}$	$\coth f(x)$

Παράδειγμα 12.2.1 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt{2x-5}\, dx.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται $(2x-5)^{1/2} = f^{1/2}(x)$ όπου $f(x) = 2x-5$ και $f'(x) = 2$. Τότε εφαρμόζοντας τον τύπο 1 του Πίνακα 12.2.1 - 1 για $a = 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int (2x-5)^{1/2}\, dx &= \frac{1}{2}\int \overbrace{(2x-5)'}^{f'(x)=2}(2x-5)^{1/2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2x-5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{3}(2x-5)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 12.2.1 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{5x+2}.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση ανάγεται με κατάλληλο μετασχηματισμό στη μορφή $f'(x)/f(x)$ όπου $f(x) = 5x+2$ και $f'(x) = 5$ (δημιουργία σταθεράς). Τότε σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 12.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{5}\int \frac{\overbrace{(5x+2)'}^{f'(x)=5}}{5x+2}\, dx = \frac{1}{5}\ln|5x+2| + c.$$

Παράδειγμα 12.2.1 - 3

Όμοια το

$$\int \frac{x\, dx}{x^2+4}.$$

Λύση. Όμοια η ολοκληρωτέα συνάρτηση, επειδή στον αριθμητή υπάρχει ήδη το x, ανάγεται στη μορφή$f'(x)/f(x)$ όπου $f(x) = x^2+4$ και $f'(x) = 2x$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 12.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \frac{x\, dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{\left(x^2+4\right)'}^{f'(x)=2x}}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + c.$$

Παράδειγμα 12.2.1 - 4

΄Ομοια

$$\int \cos \omega x \, dx, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0.$$

Λύση. ΄Ομοια ανάγεται στη μορφή $f'(x) \cos \omega$ όπου $f(x) = \omega x$ και $f'(x) = \omega$ (δημιουργία σταθεράς). Τότε σύμφωνα με τον τύπο 5 του Πίνακα 12.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\omega} \int (\omega x)' \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\omega} \sin \omega x + c.$$

Παράδειγμα 12.2.1 - 5

΄Ομοια είναι

$$\int \sin \omega x \, dx = \frac{1}{\omega} \int (\omega x)' \sin \omega x \, dx = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x + c.$$

Παράδειγμα 12.2.1 - 6

΄Ομοια το

$$\int x e^{-x^2} \, dx.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται στη μορφή $f'(x) e^{f(x)}$ όπου $f(x) = -x^2$ και $f'(x) = -2x$, ενώ η $f'(x)$ είναι δυνατόν να δημιουργηθεί, επειδή ήδη υπάρχει το x. ΄Αρα σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 12.2.1 - 1 έχουμε

$$\int x e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int (-2x) e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c.$$

Παρατήρηση 12.2.1 - 1

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\int e^{-x^2} dx$$

δε γίνεται με τον παραπάνω τρόπο, επειδή απαιτεί τη δημιουργία της

$$f'(x) = -2x,$$

δηλαδή τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με $-2x$, που σημαίνει ότι απαιτείται στην περίπτωση αυτή η δημιουργία μεταβλητής.

Παράδειγμα 12.2.1 - 7

Όμοια
$$\int \frac{dx}{9+4x^2}\,.$$

Λύση. Έχουμε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με σταθερά ως αριθμητή και συνάρτηση που είναι άθροισμα τετραγώνων στον παρονομαστή. Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην
$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$
με την παρακάτω διαδικασία: αρχικά γράφεται ο παρονομαστής στη μορφή $1+f^2(x)$ ως εξής:
$$9+4x^2 = 9\left(1+\frac{4x^2}{9}\right) = 9\left[1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right] \quad \text{όπου } f(x)=\frac{2x}{3} \text{ και } f'(x)=\frac{2}{3}.$$
Άρα σύμφωνα με τον τύπο 8 του Πίνακα 12.2.1 - 1 είναι
$$\int \frac{dx}{9+3x^2} = \frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int \frac{\overbrace{(\frac{2x}{3})'}^{f'(x)=2/3}\;dx}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+c.$$

Παράδειγμα 12.2.1 - 8

Όμοια
$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}\,.$$

Λύση. Πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με σταθερά ως αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή. Αρχικά μετασχηματίζεται ο παρονομαστής σε άθροισμα τετραγώνων σύμφωνα με τον τύπο
$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}, \qquad (12.2.1 - 1)$$
δηλαδή
$$x^2+6x+10 = (x+3)^2+1,$$
οπότε σύμφωνα και με το Παράδειγμα 12.2.1 - 7 έχουμε
$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \int \frac{\overbrace{(x+3)'}^{f'(x)=1}\,dx}{(x+3)^2+1} = \tan^{-1}(x+1)+c.$$

Παράδειγμα 12.2.1 - 9

Όμοια
$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+6x+10}.$$

Λύση. Πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με 1ου βαθμού πολυώνυμο στον αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή. Αρχικά δημιουργείται στον αριθμητή η παράγωγος του παρονομαστή. Έχουμε

$$\left(x^2+6x+10\right)'=2x+6,$$

οπότε ο αριθμητής γράφεται

$$2x+1=2x+6-5=\left(x^2+6x+10\right)'-5.$$

Σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 12.2.1 - 1 και το Παράδειγμα 12.2.1 - 8 είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+6x+10} &= \int \frac{(x^2+6x+10)'-5\,dx}{x^2+6x+10}\\ &= \int \frac{(x^2+6x+10)'\,dx}{x^2+6x+10}-5\int \frac{dx}{x^2+6x+10}\\ &= \ln\left(x^2+6x+10\right)-5\tan^{-1}(x+3)+c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 12.2.1 - 10

Όμοια
$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2+6x+10}.$$

Λύση. Όμοια πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με 1ου βαθμού πολυώνυμο στον αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή, οπότε σύμφωνα και με το Παράδειγμα 12.2.1 - 9, επειδή $(x^2+6x+10)'=2x+6$, ο αριθμητής γράφεται

$$\begin{aligned}3x-2 &= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2x}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-\frac{4}{3}\right)\\ &= \frac{3}{2}\left(2x+6-6-\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{2}(2x+6)-7.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 12.2.1 - 1 και το Παράδειγμα 12.2.1 - 9 είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2+6x+10} &= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+6)\,dx}{x^2+6x+10} - 11\int \frac{dx}{(x+3)^2+1} \\ &= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+6x+10\right) - 11\tan^{-1}(x+1)+c.\end{aligned}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

$i)$	$\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$	$vii)$	$\dfrac{x}{x+2}$
$ii)$	e^{-2x}	$viii)$	$3\cosh 2x - 4\sinh 2x$
$iii)$	$\dfrac{x}{\sqrt{2+5x^2}}$	$ix)$	$\dfrac{5x+1}{x^2+2x+2}$
$iv)$	$\dfrac{1}{\cos^2 4x}$	$x)$	$\dfrac{1}{x\ln^3 x}$
$v)$	$x\sin x^2$	$xi)$	$\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}$
$vi)$	$2^x \quad \left(a^x = e^{x\ln a}\right)$	$xii)$	$\tan 2x \quad \left(\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\right).$

12.2.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Πολλές φορές το πρόβλημα του υπολογισμού του αόριστου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(x)$ με πεδίο ορισμού, έστω D, απλουστεύεται, αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με μία νέα, έστω $u=u(x)$, που να είναι ορισμένη σε ένα κατάλληλο διάστημα D_1 της μεταβλητής u, έτσι ώστε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης αυτής να είναι $u\left(D_1\right)=D$.

Στη μέθοδο αυτή πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν τα εξής:

- Ο μετασχηματισμός πρέπει να αντιστρέφεται μονοσήμαντα, δηλαδή να λύνεται μονοσήμαντα ως προς x, και

- το ολοκλήρωμα που προκύπτει να είναι απλούστερο του αρχικού, δηλαδή να μην περιέχει ρίζες, αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κ.λπ.

Παράδειγμα 12.2.2 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-3x}\,dx.$$

Αν

$$u=-3x \quad \text{είναι} \quad x=-\frac{u}{3}, \quad \text{οπότε} \quad dx=d\left(-\frac{u}{3}\right)=\left(-\frac{u}{3}\right)'\,du=-\frac{1}{3}\,du,$$

τότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{-3x}\,dx &= \int e^{u}\,\overbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)du}^{dx}=-\frac{1}{3}\int e^{u}\,du\\ &= -\frac{1}{3}\,e^{u}+c=-\frac{1}{3}\,e^{-3x}+c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 12.2.2 - 2

Όμοια το

$$\int e^{-x^2}\,dx.$$

Αν

$$u=-x^2 \quad \text{με} \quad u<0, \quad \text{τότε είναι} \quad x=\pm\sqrt{-u}.$$

Επομένως ο μετασχηματισμός δε λύνεται μονοσήμαντα ως προς x και η μέθοδος δεν εφαρμόζεται.

Παράδειγμα 12.2.2 - 3

Όμοια το

$$I=\int \tan 5x\,dx.$$

Αν

$$u=5x \quad \text{είναι} \quad x=\frac{u}{5}, \quad \text{οπότε} \quad dx=d\left(\frac{u}{5}\right)=\left(\frac{u}{5}\right)'\,du=\frac{1}{5}\,du,$$

και αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{aligned}\int \tan 5x\,dx &= \int \tan u \overbrace{\left(\frac{1}{5}\right) du}^{dx} = \frac{1}{5}\int \tan u\,du \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{\overbrace{\sin u\,du}^{(-\cos u)'du}}{\cos u} = -\frac{1}{5}\int \frac{(-\cos u)'du}{\cos u} \\ &= -\frac{1}{5}\ln|\cos u| + c = -\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + c.\end{aligned}$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας κατάλληλη αντικατάσταση να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκλήρωμα των συναρτήσεων $f(x)$

$i)$ $\cos(\omega x + \phi)$

$ii)$ $\dfrac{1}{\sqrt{5x-3}}$

$iii)$ $\cot 3x$

$iv)$ $\dfrac{x}{\sqrt{1+9x^4}}$.

12.2.3 Παραγοντική ολοκλήρωση

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g παραγωγίζονται στο $D \subseteq \Re$ με D ανοικτό σύνολο. Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου έχουμε

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι

$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + f(x)g'(x)\,dx$$

που σύμφωνα με τον Ορισμό 12.1.1 - 1 γράφεται

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

δηλαδή τελικά

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \qquad (12.2.3 - 1)$$

Η μέθοδος ολοκλήρωσης που προκύπτει από τον τύπο (12.2.3−1) είναι γνωστή σαν η μέθοδος της **παραγοντικής** ή της **κατά μέρη ολοκλήρωσης**. Είναι προφανές ότι ο τύπος (12.2.3−1) εφαρμόζεται, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ή είναι δυνατόν να θεωρηθεί σαν γινόμενο δύο συναρτήσεων, αφού πρώτα μία από τις δύο συναρτήσεις γραφεί στη μορφή $g'(x)$, όπως αυτό περιγράφεται στα παρακάτω παραδείγματα όπου δίνονται οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες περιπτώσεις εφαρμογής της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Γινόμενο πολυωνύμου με εκθετική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 12.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x\, e^{-2x}\, dx.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(12.2.3-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f(x)} \overbrace{e^{-2x}}^{g(x)}\, dx &= \int \underbrace{x}_{f(x)} \overbrace{\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)'}^{g'(x)} dx \\
&= -\frac{1}{2}x\, e^{-2x} + \frac{1}{2}\int \underbrace{x'}_{f'(x)} \overbrace{e^{-2x}}^{g(x)}\, dx = -\frac{1}{2}x\, e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 12.2.3 - 2

Όμοια το

$$\int x^2\, e^{-2x}\, dx.$$

Λύση. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int x^2\, e^{-2x}\, dx &= -\frac{1}{2}\int x^2 \left(e^{-2x}\right)'\, dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\int \overbrace{\left(x^2\right)'}^{2x} e^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot 2\int xe^{-2x} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\, dx,
\end{aligned}
$$

όταν σύμφωνα με το Παράδειγμα 12.2.3 - 1 είναι

$$\int x\, e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$$

Άρα

$$\int x^2e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$$

Γινόμενο πολυωνύμου με τριγωνομετρική συνάρτηση

[2]Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 12.2.3 - 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^2\, \sin 3x\, dx.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά λόγω του x^2 δύο φορές την παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int x^2\, \sin 3x\, dx &= \int x^2 \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)'\, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2\, \cos 3x + \frac{1}{3}\int \left(x^2\right)' \cos 2x\, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2\, \cos 3x + \frac{2}{3}\int x\, \cos 3x\, dx \quad \text{1η παραγοντική}
\end{aligned}
$$

[2]Ημιτόνου ή συνημιτόνου.

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)' dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x\sin 3x\,dx - \frac{1}{3}\int x'\sin 3x\,dx\right] \\
&= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x - \frac{2}{9}\int x'\sin 3x\,dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x - \frac{2}{9}\overbrace{\int \sin 3x\,dx}^{-\frac{\cos 3x}{3}} \\
&= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + c.
\end{aligned}
$$

Γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση

Δημιουργείται ανάλογα με την ευκολία που παρουσιάζεται η παράγωγος ή της τριγωνομετρικής ή της εκθετικής συνάρτησης και εφαρμόζεται δύο φορές ο τύπος (12.2.3 − 1). Στη 2η παραγοντική δημιουργείται πάντοτε η παράγωγος της ίδιας συνάρτησης με την 1η φορά.

Παράδειγμα 12.2.3 - 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx.$$

Λύση. Έστω ότι δημιουργείται η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} = \int \underbrace{e^{-x}}_{f(x)}\overbrace{\sin 2x}^{g(x)}\,dx &= \int \overbrace{\left(-e^{-x}\right)'}^{f'(x)}\sin 2x\,dx \\
&= -e^{-x}\sin 2x + \int e^{-x}\,\overbrace{(\sin 2x)'}^{2\cos 2x}\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\,dx \quad \text{1η παραγοντική}\\
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\int \left(-e^{-x}\right)'\cos 2x\,dx\\
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\left[-e^{-x}\cos 2x - \int e^{-x}\overbrace{(\cos 2x)'}^{-2\sin 2x}\,dx\right]\\
&= -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x - 4\int e^{-x}\sin 2x\,dx\\
&= -e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right) - 4\,\mathrm{I} \quad \text{2η παραγοντική.}
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\mathrm{I} = -e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right) - 4\,\mathrm{I},$$

οπότε λύνοντας ως προς I τελικά έχουμε

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{-e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right)}{5} + c.$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με τις εντολές:

```
>> syms x
>> int(exp(-x)*sin(2*x),x)
```

Γινόμενο πολυωνύμου με λογαριθμική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 12.2.3 - 5

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^2\,\ln x\,dx.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x\,dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}}\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.\end{aligned}$$

Όμοια ο υπολογισμός με το MATLAB είναι:

```
>> syms x
>> int(x^2*log(x),x)
```

Γινόμενο πολυωνύμου με αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 12.2.3 - 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \tan^{-1} 3x\,dx.$$

Λύση. Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1} 3x\,dx &= \int x^0\ \tan^{-1} 3x\,dx = \int \overbrace{x^1}^{f'(x)}\ \tan^{-1} 3x\,dx \\ &= x\ \tan^{-1} 3x - \int x\ \overbrace{\left(\tan^{-1} 3x\right)'}^{\frac{(3x)'}{1+(3x)^2}=\frac{3}{1+9x^2}}\ dx \\ &= x\ \tan^{-1} 3x - \int \frac{3x\,dx}{1+9x^2} = x\ \tan^{-1} 3x - \frac{1}{6}\int \frac{\left[9x^2+1\right]'\,dx}{1+9x^2} \\ &= x\ \tan^{-1} 3x - \frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right) + c.\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

$i)$	$x^2 e^{-3x}$	$viii)$	$\ln^2 x$
$ii)$	$x^2 \sin \omega x; \quad \omega > 0$	$ix)$	$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
$iii)$	$x \tan^{-1} x$	$x)$	$\sin^{-1} 2x$
$iv)$	$e^{-2x} \sin 3x$	$xi)$	$x \cos^2 x$

2. Αν $a, \omega \neq 0$, δείξτε ότι

$$\int e^{ax} \sin \omega x \, dx = \frac{e^{ax}\left(a \sin \omega x - \omega \cos \omega x\right)}{a^2 + \omega^2} + c.$$

12.2.4 Ολοκλήρωση με υποβιβασμό

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση ή όρος αυτής είναι υψωμένη σε δύναμη και αποσκοπεί στην αναγωγή του υπολογισμού του αρχικού ολοκληρώματος σε υπολογισμό ολοκληρώματος με όρο υψωμένο σε βαθμό μικρότερο του αρχικού. Ο τύπος υπολογισμού που προκύπτει, λέγεται τότε **αναγωγικός**.

Παράδειγμα 12.2.4 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}_\nu = \int x^\nu e^{-x} \, dx, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1, \, 2, \, \ldots .$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_\nu &= \int x^\nu e^{-x} \, dx = \int x^\nu \left(-e^{-x}\right)' \, dx \\ &= -x^\nu e^{-x} + \int \left(x^\nu\right)' e^{-x} \, dx \\ &= -x^\nu e^{-x} + \nu \int x^{\nu-1} e^{-x} \, dx. \end{aligned}$$

Άρα

$$\int x^\nu e^{-x} \, dx = -x^\nu e^{-x} + \nu \int x^{\nu-1} e^{-x} \, dx,$$

δηλαδή

$$\mathrm{I}_\nu = -x^\nu e^{-x} + \nu\, \mathrm{I}_{\nu-1}, \qquad (12.2.4 - 1)$$

όταν $\nu = 1,\, 2,\, \ldots$.

Στον αναγωγικό τύπο $(12.2.4-1)$ το προς υπολογισμό ολοκλήρωμα I_ν υπολογίζεται συναρτήσει του όρου $-x^\nu e^{-x}$ και του ολοκληρώματος $I_{\nu-1} = \int x^{\nu-1} e^{-x} dx$, όπου ο όρος $x^{\nu-1}$ στην ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι κατά βαθμό μικρότερος του αρχικού όρου x^ν. Είναι προφανές ότι με διαδοχική εφαρμογή του τύπου υπολογίζεται τελικά το ολοκλήρωμα I_ν.

Εφαρμογή για $\nu = 3$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 &= -x^3 e^{-x} + 3\mathrm{I}_2 \\
\mathrm{I}_2 &= -x^2 e^{-x} + 2\mathrm{I}_1 \\
\mathrm{I}_1 &= -xe^{-x} + \mathrm{I}_0 = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -x\, e^{-x} - e^{-x},
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 &= \int x^3 e^{-x}\, dx = -x^3\, e^{-x} + 3\, \mathrm{I}_2 \\
&= -x^3\, e^{-x} + 3\left(-x^2\, e^{-x} + 2\, \mathrm{I}_1\right) \\
&= -x^3\, e^{-x} - 3\, x^2 e^{-x} + 6\, \mathrm{I}_1 \\
&= -x^3\, e^{-x} - 3\, x^2 e^{-x} + 6\left(-x\, e^{-x} - e^{-x}\right) \\
&= -\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right) e^{-x} + c.
\end{aligned}$$

Άσκηση

Αν $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$, εκτός αν διαφορετικά ορίζεται, δείξτε τους παρακάτω αναγωγικούς τύπους

$$\begin{aligned}
\int \cos^\nu x\, dx &= \frac{\sin x\, \cos^{\nu-1} x}{\nu} + \frac{\nu - 1}{\nu} \int \cos^{\nu-2} x\, dx. \\
\int \ln^\nu x\, dx &= x\, \ln^\nu x - \nu \int \ln^{\nu-1} x\, dx, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^{\nu}\,\sin\omega x\,dx &= -\frac{x^{\nu}\,\cos\omega x}{\omega}+\frac{\nu x^{\nu-1}\,\sin\omega x}{\omega^2}\\ &\quad -\frac{\nu(\nu-1)}{\omega^2}\int x^{\nu-2}\,\sin\omega x\,dx,\quad \text{όταν}\quad \omega\neq 0.\end{aligned}$$

$$\int e^x\,\sin^{\nu}x\,dx = \frac{e^x\,\sin^{\nu-1}x}{\nu^2+1}\,(\sin x-\nu\,\cos x)+\frac{\nu(\nu-1)}{\nu^2+1}\int e^x\,\sin^{\nu-2}x\,dx.$$

12.2.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Έστω ότι η ρητή συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{12.2.5 - 1}$$

όπου το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού, έστω ν και το $Q(x)$ βαθμού m. Τότε διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις.

I. Ο βαθμός του αριθμητή να είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή

Υποθέτοντας ότι ο παρονομαστής $Q(x)$ έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων όρων,[3] η ρητή συνάρτηση $(12.2.5-1)$ είναι δυνατόν να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

i) ο παράγοντας με παρονομαστή $ax+b$ αναλύεται σε απλό κλάσμα της μορφής

$$\frac{A}{ax+b}\,, \tag{12.2.5 - 2}$$

ii) ο με παρονομαστή $(ax+b)^2$, αντίστοιχα $(ax+b)^3$, σε

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}\,,\quad \text{αντίστοιχα} \tag{12.2.5 - 3}$$

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}\,,\quad \text{κ.λπ.} \tag{12.2.5 - 4}$$

[3] Περιπτώσεις παραγόντων ανωτέρου βαθμού δε θα εξεταστούν. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία για τη γενική περίπτωση και τα σχετικά με αυτή θεωρήματα.

iii) ο με ax^2+bx+c σε

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \quad \text{κ.λπ.} \tag{12.2.5 - 5}$$

Η μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών A, B, C, $\ldots$ που θα εξεταστεί στο μάθημα αυτό στηρίζεται στη σύγκριση των συντελεστών των ίσων δυνάμεων του x.

Παράδειγμα 12.2.5 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}=\int \frac{x+2}{x^2+x-12}\,dx\,, \quad \text{όταν} \quad x\neq 3,\,-4.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(12.2.5-2)$ έχουμε

$$\frac{x+2}{x^2+x-12}=\frac{x+2}{(x-3)(x+4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}\,. \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με τον παρονομαστή που αναλύεται, δηλαδή με $(x-3)(x+4)$, προκύπτει ότι

$$x+2=A(x+4)+B(x-3). \tag{2}$$

Η (2) γράφεται

$$(A+B-1)x+4A-3B-2=0$$

που για να ισχύει για κάθε $x\in\Re$, πρέπει

$$\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 1 \\ 4A & - & 3B & = & 2, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad A=\frac{5}{7} \quad \text{και} \quad B=\frac{2}{7}\,.$$

Τελικά σύμφωνα και με την (1) έχουμε

$$\mathrm{I}=\frac{5}{7}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{2}{7}\int\frac{dx}{x+4}=\frac{5}{7}\,\ln|x-3|+\frac{2}{7}\,\ln|x+4|+c.$$

Παράδειγμα 12.2.5 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2}\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq \pm 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με τις $(12.2.5-2)$ - $(12.2.5-3)$ έχουμε

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\,,$$

οπότε

$$1 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1). \tag{3}$$

Η (3) γράφεται

$$(A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C-1) = 0$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \Re$, πρέπει

$$\begin{array}{rcccccl} A & + & B & & & = & 0 \\ -2A & & & + & C & = & 0 \\ A & - & B & + & C & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε } A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4} \text{ και } C = \frac{1}{2}\,.$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| \;+\; \frac{1}{2}\overbrace{\int (x-1)'(x-1)^{-2}\,dx}^{\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}} \\ &= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| \;-\; \frac{1}{2(x-1)} + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 12.2.5 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int \frac{x\,dx}{(x-1)\left(x^2+4\right)}\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq 1.$$

Λύση. Όμοια σύμφωνα με τις $(12.2.5-2)$ και $(12.2.5-5)$ έχουμε

$$\frac{x}{(x-1)\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4},$$

οπότε

$$x=A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)(x-1). \tag{4}$$

Η (4) γράφεται

$$(A+B)x^2+(-B+C-1)x+(4A-C)=0$$

που για να ισχύει για κάθε $x\in\Re$, πρέπει

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ & - & B & + & C & = & 1 \\ 4A & & & - & C & = & 0, \end{array} \quad \text{οπότε } A=-\frac{1}{5},\ B=\frac{1}{5} \text{ και } C=\frac{4}{5}. \tag{5}$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4} \\ &= -\frac{1}{5}\ln|x+1|+\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2 \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= \frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\overbrace{\left(x^2+4\right)'}^{2x}\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{10}\ln\left(x^2+4\right), \\ \mathrm{I}_2 &= \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{4}{5}\int\frac{dx}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{5}\cdot 2\int\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{1}{10}\,\ln\left(x^2+4\right) + \frac{2}{5}\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με την εντολή:

```
>> syms x
>> int(x/((x-1)*(x^2+4)),x)
```

II. Ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του παρονομαστή

Αρχικά στην $(12.2.5-1)$ γίνεται η διαίρεση των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται τελικά στη περίπτωση I.

Παράδειγμα 12.2.5 - 4

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^3-1}{x^2-4}\,dx\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq \pm 2.$$

Από τη διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή και μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x-1}{x^2-4} = x + \frac{7}{4}\,\frac{1}{x-2} + \frac{9}{4}\,\frac{1}{x+2}\,,$$

οπότε

$$\int \frac{x^3-1}{x^2-4}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{4}\ln|x-2| + +\frac{9}{4}\ln|x+2| + c.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω ρητών συναρτήσεων $f(x)$

$i)\quad \dfrac{x-3}{(x+1)(x-5)}$

$ii)\quad \dfrac{1}{(x-1)(x-2)^2}$

$iii)\quad \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$iii)\quad \dfrac{x^4}{x^3-1}$

$iv)\quad \dfrac{1}{x^3-1}$

$viii)\quad \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,.$

12.2.6 Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εξετάζονται μόνον οι μορφές:

$$\int \sin mx\, \cos nx\, dx, \quad \int \sin mx\, \sin nx\, dx \quad \text{και} \quad \int \cos mx\, \cos nx\, dx$$

Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται οι παρακάτω τύποι της Τριγωνομετρίας

$$\begin{aligned} 2\,\sin A\,\cos B &= \sin(A+B)+\sin(A-B), && (12.2.6\text{ - }1)\\ 2\,\sin A\,\sin B &= \cos(A-B)-\cos(A+B), && (12.2.6\text{ - }2)\\ 2\,\cos A\,\cos B &= \cos(A-B)+\cos(A+B). && (12.2.6\text{ - }3) \end{aligned}$$

Επίσης ισχύουν

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{και} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,. \qquad (12.2.6\text{ - }4)$$

Παράδειγμα 12.2.6 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(12.2.6-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int \sin x \sin 3x\, dx &= \frac{1}{2}\int [\cos(x-3x)-\cos(x+3x)]\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\ dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\\ &= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + c. \end{aligned}$$

Άσκηση

[4]Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

[4]Στην (i) να χρησιμοποιηθεί πρώτα η $(12.2.6-4)$.

$i)$ $\sin^2 2x\,\cos 4x$

$ii)$ $\sin\dfrac{x}{2}\sin^2 2x$

$iii)$ $\sin 10x\,\sin 8x$

$iv)$ $\sin x\,\sin 2x\,\sin 3x.$

12.2.7 Προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρώματος

Στα περισσότερα προβλήματα των εφαρμογών το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με κανένα μετασχηματισμό ή άλλη τροποποίηση της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Η γενική αντιμετώπιση του προβλήματος, μέρος του οποίου θα μελετηθεί σε προσεχές εξάμηνο, είναι αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών και ο αναγνώστης παραπέμπεται για περαιτέρω μελέτη στη βιβλιογραφία. Στο μάθημα αυτό θα γίνει η προσέγγιση του ολοκληρώματος με αντικατάσταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης ή όρου αυτής με το αντίστοιχο πολυώνυμο του Taylor ή του Maclaurin.

Παράδειγμα 12.2.7 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-x^2}\,dx.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Maclaurin το πολυώνυμο 4ου βαθμού που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση e^{-x^2} είναι

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\,.$$

Επομένως

$$\int e^{-x^2}\,dx \approx \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + c.$$

Παράδειγμα 12.2.7 - 2

Όμοια έστω το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\ln x}{x-1}\,dx, \quad \text{όταν} \quad x > 1.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Taylor με κέντρο, έστω $\xi = e$, το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση $\ln x$ είναι

$$\ln x \approx 1 + \frac{x-e}{e}\,.$$

Επομένως

$$\int \frac{\ln x}{x-1}\,dx \approx \int \frac{1}{x-1}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)\,dx = \frac{x}{e} + \frac{\ln(x-1)}{e} + c.$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο του Maclaurin 5ου, αντίστοιχα 4ου βαθμού να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx\,, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

5

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος Θ. (2008), Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 978–960–456–092–9.

[4] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων