Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 13: Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Μέρος Ι

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 13

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - ΜΕΡΟΣ Ι

Στο μάθημα αυτό, που όπως έχει ήδη γραφεί πρέπει σε μια αυστηρά μαθηματική σειρά να προηγηθεί του Μαθήματος 12, θα δοθούν περιληπτικά οι σημαντικότερες έννοιες, που αναφέρονται στο ορισμένο ολοκλήρωμα.[1]

Η αρχική μορφή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος σαν προσέγγιση του εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος συναντάται το πρώτον στην αρχαιότητα κατά τον 3ον π.χ. αιώνα με τον Αρχιμήδη, ο οποίος χρησιμοποίησε προσεγγιστικές μεθόδους για να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου, της έλικας, κ.λπ. Στα μέσα του 18ου αιώνα γίνεται από τον Riemann μια προσπάθεια ορισμού της έννοιας με καθαρά μαθηματικούς όρους. Ο ορισμός αυτός γενικεύτηκε στη συνέχεια από μία σειρά άλλων επιστημόνων, η σημαντικότερη όμως γενίκευση της έννοιας έγινε από τον Lebesgue στις αρχές του 19ου αιώνα.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα εκτός από τον υπολογισμό εμβαδών χρησιμοποιείται και σε μία σειρά άλλων εφαρμογών που καλύπτει το σύνολο των θετικών επιστημών, μέρος των οποίων θα δοθούν στο μάθημα που ακολουθεί.

[1] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.

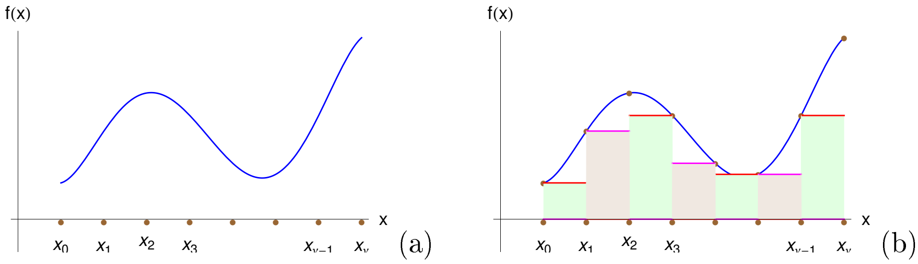
13.1 Εισαγωγικές έννοιες

13.1.1 Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$, που υποτίθεται ότι είναι συνεχής για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα ότι ισχύει $f(x) > 0$. Αν το $[\alpha, \beta]$ υποδιαιρεθεί σε ν το πλήθος υποδιαστήματα από τα σημεία

$$\delta = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta\}, \qquad (13.1.1 - 1)$$

τότε η υποδιαίρεση αυτή θα λέγεται στο εξής **διαμέριση** και θα συμβολίζεται με δ, ενώ τα x_0, x_1, …, x_ν σημεία της διαμέρισης. Το πλάτος Δx_i των υποδιαστημάτων είναι τότε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, όταν $i = 1, 2, \ldots, \nu$ (Σχ. 13.1.1 - 1a).



Σχήμα 13.1.1 - 1: (a) Το διάγραμμα της $f(x)$ και η διαμέριση δ του $[\alpha, \beta]$. (b) Άθροισμα $K(\delta, f)$

Επειδή η συνάρτηση f έχει υποτεθεί συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, θα πρέπει να είναι συνεχής και σε κάθε υποδιάστημα της παραπάνω διαμέρισης. Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνεχών συναρτήσεων[2] θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο σ_i, αντίστοιχα s_i, που η $f(x) \mid [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ να λαμβάνει μια ελάχιστη, αντίστοιχα μια μέγιστη τιμή σε αυτό. Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω είναι δυνατόν να οριστούν:

i) το **κάτω άθροισμα** (Σχ. 13.1.1 - 1b)

$$K(\delta, f) = \sigma_1 \Delta x_1 + \sigma_2 \Delta x_2 + \ldots + \sigma_\nu \Delta x_\nu, \qquad (13.1.1 - 2)$$

[2] Βλέπε Μάθημα 8 Θεώρημα 8.1.3 – 6.

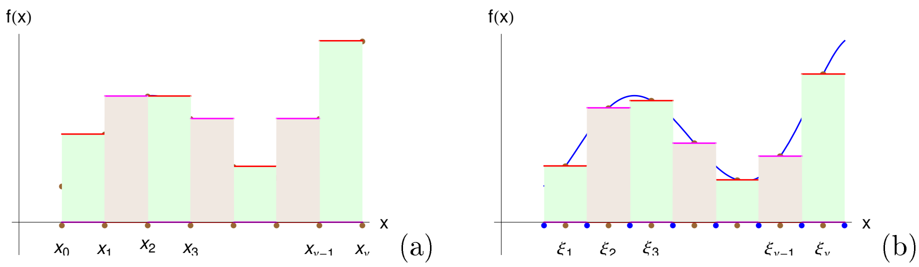
ii) το **άνω άθροισμα** (Σχ. 13.1.1 - 2a)

$$A(\delta, f) = s_1\Delta x_1 + s_2\Delta x_2 + \ldots + s_\nu \Delta x_\nu, \qquad (13.1.1 - 3)$$

iii) το **ενδιάμεσο άθροισμα** (Σχ. 13.1.1 - 2b)

$$\begin{aligned} E(\delta, f, \xi) &= f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 \\ &\quad + \ldots + f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu, \end{aligned} \qquad (13.1.1 - 4)$$

όταν ξ_i; $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων, δηλαδή $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$; $i = 1, 2, \ldots, \nu$.



Σχήμα 13.1.1 - 2: (a) Άθροισμα $A(\delta, f)$ και (b) $E(\delta, f, \xi)$

Είναι προφανές ότι σε κάθε διαμέριση του $[\alpha, \beta\,]$ αντιστοιχούν και διαφορετικά αθροίσματα των μορφών $(13.1.1 - 3)$ - $(13.1.1 - 4)$. Στην περίπτωση όμως που το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο μηδέν, οι τιμές των παραπάνω αθροισμάτων τελικά συγκλίνουν. Συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεμελιώδες θεώρημα.

Θεώρημα 13.1.1 - 1 (ορισμένου ολοκληρώματος). *Έστω $f\,|\,[\alpha, \beta\,]$ μία συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha, \beta\,]$. Τότε, όταν το πλάτος $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ όπου $i = 1, 2, \ldots, \nu$, της διαμέρισης δ του $[\alpha, \beta\,]$ τείνει στο μηδέν, τα παραπάνω αθροίσματα $(13.1.1 - 3)$ - $(13.1.1 - 4)$ συγκλίνουν προς ένα μονοσήμαντα ορισμένο πραγματικό αριθμό, έστω $I(f)$, που είναι ανεξάρτητος από την διαμέριση δ και την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ.*

Ορισμός 13.1.1 - 1 (ορισμένου ολοκληρώματος). *Ο πραγματικός αριθμός $I(f)$, στον οποίο σύμφωνα με το Θεώρημα 13.1.1 - 1 συγκλίνουν τα αθροίσματα*

(13.1.1–3) - (13.1.1–4), *ορίζεται σαν το ορισμένο ολοκλήρωμα ή ολοκλήρωμα του Riemann της f στο $[\alpha, \beta]$ και συμβολίζεται με*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = I(f). \qquad (13.1.1 - 5)$$

Τα σημεία α και β λέγονται τότε κάτω και άνω αντίστοιχα άκρα ολοκλήρωσης ή γενικά άκρα ολοκλήρωσης, ενώ το $[\alpha, \beta]$ διάστημα ολοκλήρωσης.

Παρατήρησεις 13.1.1 - 1

I. Ειδικά ορίζεται ότι

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

ενώ προφανώς ισχύει

$$\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx.$$

II. Στην περίπτωση που το ένα άκρο ολοκλήρωσης, έστω το β, μεταβάλλεται, δηλαδή $\beta = x$, τότε με τον τύπο $(13.1.1-5)$ ορίζεται η συνάρτηση

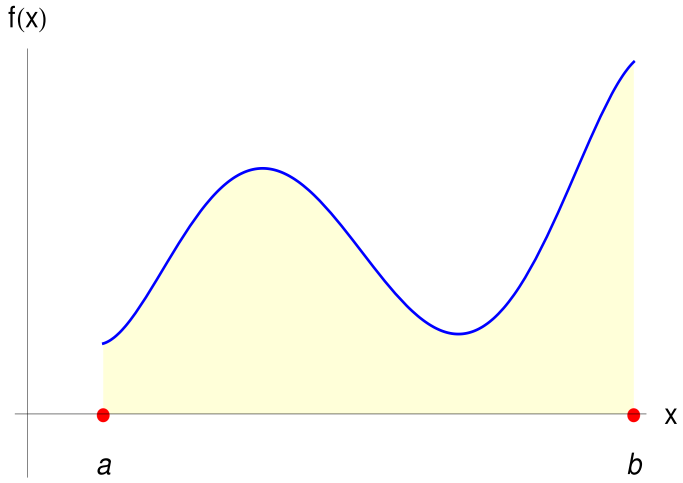
$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt \qquad (13.1.1 - 6)$$

με πεδίο ορισμού, έστω D, όπου $D \subseteq [\alpha, \beta]$.

Σημείωση 13.1.1 - 1

Η μεταβλητή της ολοκλήρωσης και η μεταβλητή του άκρου ολοκλήρωσης δεν θα πρέπει να συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα.

III. **Γεωμετρική ερμηνεία**: ο αριθμός $I(f)$, όταν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, παριστάνει το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου (Σχ. 13.1.1 - 3), που ορίζεται από τον άξονα των x, το διάγραμμα της συνάρτησης $y = f(x)$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



Σχήμα 13.1.1 - 3: γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος

13.1.2 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων χωρίς απόδειξη οι κυριότερες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 13.1.2 - 1. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta\,]$ και $\lambda \in \Re$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Θεώρημα 13.1.2 - 2. *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta\,]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]\;dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \;+\; \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx.$$

Από τα Θεωρήματα 13.1.2 - 1 - 13.1.2 - 2 προκύπτει ότι:

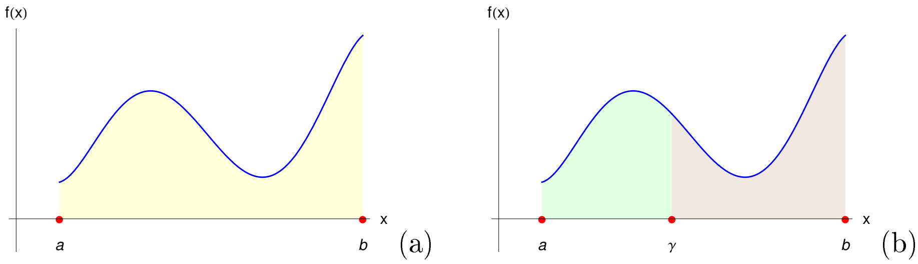
Πόρισμα 13.1.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$ και k, $\lambda \in \Re$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [kf(x) + \lambda g(x)]\, dx = k \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \, + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx.$$

Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Θεώρημα 13.1.2 - 3. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν γ (Σχ. 13.1.2 - 1) είναι ένα σημείο με $\alpha < \gamma < \beta$, ισχύει ότι*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\, dx \, + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\, dx.$$



Σχήμα 13.1.2 - 1: η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος 13.1.2 - 3

Θεώρημα 13.1.2 - 4. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \geq 0.$$

Αν επί πλέον για ένα σημείο $\xi \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(\xi) > 0$, είναι[3]

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx > 0.$$

[3] Μια προφανής γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος προκύπτει από το (Σχ. 13.1.2 - 1a).

13.1.3 Θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

[4]Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη τα παρακάτω δύο βασικά θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Θεώρημα 13.1.3 - 1. *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \;\geq\; \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx$$

Θεώρημα 13.1.3 - 2 (μέσης τιμής). *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε*

$$m \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx \;\leq\; \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x)\, dx \;\leq\; M \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx \qquad (13.1.3 - 1)$$

όπου $m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$ και $M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$. Ειδικά, όταν $g(x) = 1$, είναι

$$m\,(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \;\leq\; M\,(\beta - \alpha). \qquad (13.1.3 - 2)$$

Οι ανισότητες (13.1.3−1) και (13.1.3−2) είναι δυνατόν να αντικατασταθούν από τις παρακάτω ισοδύναμες ισότητες

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx, \qquad (13.1.3 - 3)$$

αντίστοιχα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = f(\xi)(\beta - \alpha), \qquad (13.1.3 - 4)$$

όταν $\xi \in (\alpha, \beta)$.

[4]Η παράγραφος αυτή να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

13.2 Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

13.2.1 Θεώρημα υπολογισμού

Έχοντας υπ' όψιν και τη σχέση (13.1.1 − 6) αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 13.2.1 - 1 (θεμελιώδες Απειροστικού Λογισμού). *Αν $f|[\alpha,\beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε η*

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{για κάθε } x \in [\alpha,\beta]. \qquad (13.2.1 - 1)$$

Το θεώρημα αυτό συνδέει την έννοια της παραγώγου και του ορισμένου ολοκληρώματος της $f(x)$.

13.2.2 Τύπος υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

Με το Θεώρημα 13.2.1 - 1 αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 13.2.2 - 1. *Αν $f|[\alpha,\beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και $F(x)$ ένα αόριστο ολοκλήρωμά της, τότε*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(x)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (13.2.2 - 1)$$

Το θεώρημα αυτό θα χρησιμοποιείται στο εξής για τον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 13.2.2 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (Σχ. 13.2.2 - 1a)

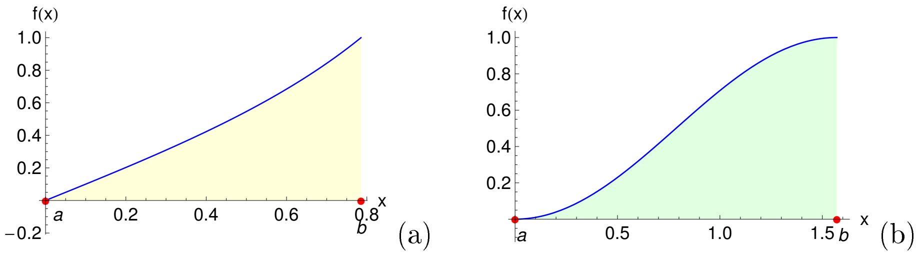
$$\int_0^{\pi/4} \tan\, x\, dx.$$

Λύση. Είναι

$$\int \tan\, x\, dx = \int \frac{\sin\, x}{\cos\, x}\, dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos\, x}\, dx = -\ln|\cos\, x| + c,$$

οπότε από τον τύπο $(13.2.2-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan\, x\, dx &= -\ln|\cos\, x|\,\Big|_0^{\pi/4} = -\left[\ln|\cos\frac{\pi}{4}| - \ln|\cos\, 0|\right] \\ &= -\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\, 1\right] = -\left(\ln\, 2^{-1/2} - 0\right) = -\left(-\frac{1}{2}\,\ln\, 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\ln 2.\end{aligned}$$



Σχήμα 13.2.2 - 1: (a) Ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \tan\, x\, dx$ και (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$

Παράδειγμα 13.2.2 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 13.2.2 - 1b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx.$$

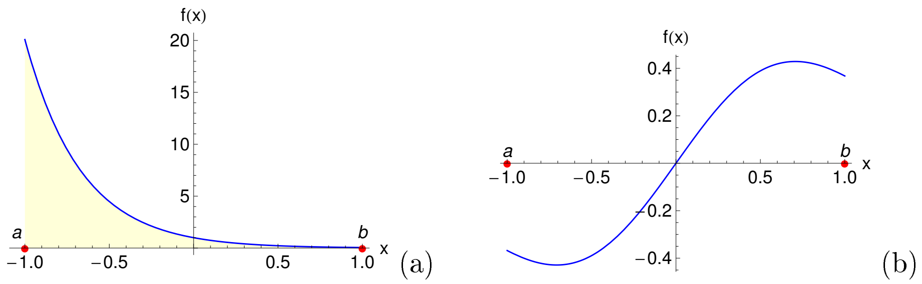
Λύση. Ισχύει ότι
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,,$$
οπότε
$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (2x)'\cos 2x\,dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c.\end{aligned}$$
Άρα
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx &= \left.\frac{x}{2}\right|_0^{\pi/2} - \left.\frac{1}{4}\sin 2x\right|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{4}\left(\overbrace{\sin 2\,\frac{\pi}{2}}^{0} - \overbrace{\sin 0}^{0}\right) = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 13.2.2 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 13.2.2 - 2a)
$$\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,dx.$$

Λύση. Είναι
$$\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\,e^{-3x} + c,$$
οπότε[5]
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,dx &= \left.-\frac{1}{3}\,e^{-3x}\right|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\left(e^{-3} - e^{-(-3)}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(e^{3} - e^{-3}\right) = \frac{2}{3}\,\sinh 3.\end{aligned}$$

[5] Ισχύει ότι : $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.



Σχήμα 13.2.2 - 2: (a) Ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} e^{-3x}\, dx$ και (b) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x\, e^{-x^2}$, όταν $x \in [-1, 1]$

Παράδειγμα 13.2.2 - 4

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 13.2.2 - 2b)

$$\int_{-1}^{1} x\, e^{-x^2}\, dx.$$

Λύση. Είναι

$$\int x\, e^{-x^2}\, dx = \int \frac{(-x^2)'}{-2}\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + c,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x\, e^{-x^2}\, dx &= -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}\Big|_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-1^2} - e^{-(-1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-1^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 13.2.2 - 1

Στο Παράδειγμα 13.2.2 - 4 η ολοκληρωτέα συνάρτηση $x\, e^{-x^2}$ είναι περιττή. Γενικότερα αποδεικνύεται στις περιπτώσεις αυτές ότι:

Πρόταση 13.2.2 - 1. *Αν η* ***περιττή*** *συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-a, a]$, τότε*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0. \tag{13.2.2 - 2}$$

Παράδειγμα 13.2.2 - 5

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 13.2.2 - 3a)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x)'}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x) + c.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2} &= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\overbrace{\underbrace{\tan^{-1}}_{\text{συνάρτηση περιττή}}(-2)}^{-\tan^{-1}2} \\
&= \tan^{-1}2.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 13.2.2 - 2

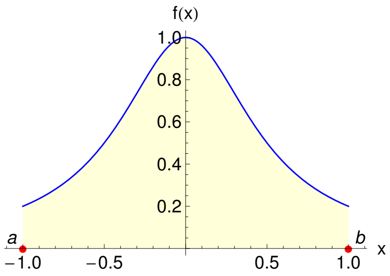
Στο Παράδειγμα 13.2.2 - 6 η ολοκληρωτέα συνάρτηση

$$\frac{1}{1+4x^2}$$

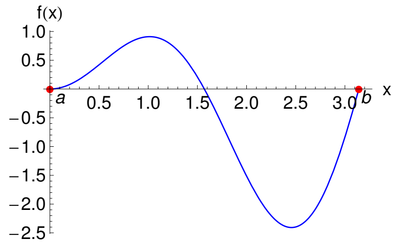
είναι άρτια. Γενικότερα αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 13.2.2 - 2. *Αν η* **άρτια** *συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-a,a]$, τότε*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{13.2.2 - 3}$$



(a)



(b)

Σχήμα 13.2.2 - 3: (a) Ολοκλήρωμα $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2}$ και (b) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x \sin 2x$, όταν $x \in [0, \pi]$

Παράδειγμα 13.2.2 - 6

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 13.2.2 - 3b)

$$\int\limits_0^{\pi} x \sin 2x \, dx.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int x \sin 2x \, dx = \int x \left(\frac{-\cos 2x}{-2} \right)' dx = \cdots = -\frac{1}{2}\, x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c.$$

Άρα

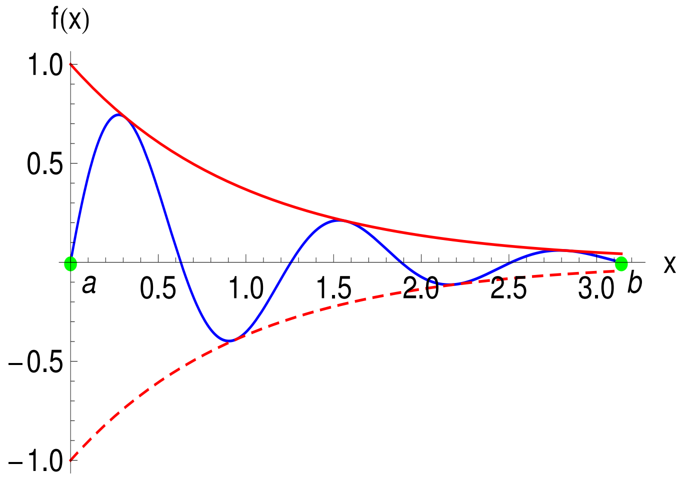
$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\pi} x \sin 2x \, dx &= -\frac{1}{2}\, x \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \Big(\pi \overbrace{\cos 2\pi}^{1} - 0 \Big) + \frac{1}{4} \Big(\overbrace{\sin 2\pi}^{0} - \overbrace{\sin 0}^{0} \Big) = -\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 13.2.2 - 3

Γενικά ισχύει

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{και} \quad \sin(n\pi) = 0 \qquad (13.2.2 - 4)$$

για κάθε $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.



Σχήμα 13.2.2 - 4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $e^{-x}\sin 5x$ (**ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση**)

Παράδειγμα 13.2.2 - 7

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\ \sin 5x\, dx.$$

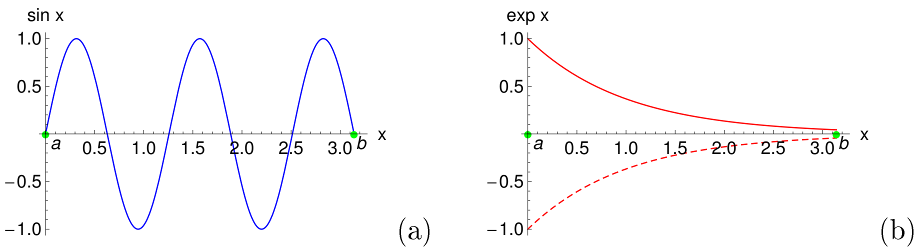
Λύση. Η γραφική παράσταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης $e^{-x}\sin 5x$ (Σχ. 13.2.2 - 4), που χαρακτηρίζεται σαν ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση,[6] προκύπτει από τις γραφικές παραστάσεις των:

- $\sin 5x$ ελεύθερη αρμονική ταλάντωση (Σχ. 13.2.2 - 5a), και
- e^{-x} απόσβεση (Σχ. 13.2.2 - 5b).

Εφαρμόζοντας 2 φορές την παραγοντική ολοκλήρωση[7] έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin 5x\,dx &= \int \left(-e^{-x}\sin 5x\right)' dx = \cdots \\ &= -\frac{e^{-x}}{26}\left(5\cos 5x+\sin 5x\right)+c.\end{aligned}$$

[6] Βλέπε Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 1.
[7] Βλέπε Μάθημα 12 ανάλογο Παράδειγμα 12.2.3 − 4.



Σχήμα 13.2.2 - 5: $x \in [0,\pi]$. (a) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin 5x$ (**ελεύθερη αρμονική ταλάντωση**) και (b) της e^{-x} συνεχής και $-e^{-x}$ διακεκομμένη καμπύλη (**απόσβεση**)

Άρα

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{-x}\sin 5x\,dx &= -\frac{e^{-x}}{26}\left(5\cos 5x+\sin 5x\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{e^{-\pi}}{26}\left(5\overbrace{\cos 5\pi}^{-1}+\overbrace{\sin 5\pi}^{0}\right) \\
&\quad -\left[-\frac{e^{0}}{26}\left(5\overbrace{\cos 5\cdot 0}^{1}+\overbrace{\sin 5\cdot 0}^{0}\right)\right] \\
&= \frac{5}{26}\left(1+e^{-\pi}\right).
\end{aligned}
$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με την εντολές:

```
>> syms x
>> int(exp(-x)*sin(5*x),x,0,pi)
```

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

$$i) \quad \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx)\, dx \;=\; \frac{4\pi}{n^2}\,; \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

$$ii) \quad \int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx)\, dx \;=\; -\,\frac{4\pi^2}{n}\,; \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

$$iii) \quad \int_0^{\pi} e^x\, \sin(nx)\, dx = \begin{cases} \dfrac{n}{1+n^2}\,(1-e^{\pi}) & \text{αν} \quad n \quad \text{άρτιος} \\ \dfrac{n}{1+n^2}\,(1+e^{\pi}) & \text{αν} \quad n \quad \text{περιττός}\ . \end{cases}$$

2. Αν $m,\, n = 1,\, 2,\, \ldots$ χρησιμοποιώντας κατάλληλη τριγωνομετρική ταυτότητα δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi} \sin(mx)\, \sin(nx)\, dx \;=\begin{cases} 0 & \text{αν} \quad m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{αν} \quad m = n. \end{cases}$$

13.3 Ολοκληρώματα ειδικής μορφής

Δίνονται στη συνέχεια τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα, που έχουν μεγάλη σημασία στα προβλήματα των εφαρμογών και των οποίων ο υπολογισμός γίνεται μόνον προσεγγιστικά.

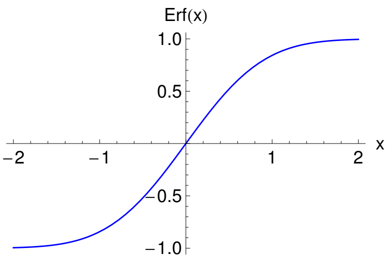
13.3.1 Συνάρτηση σφάλματος

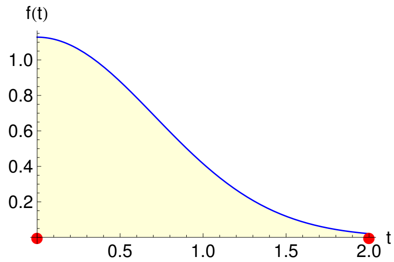
Η συνάρτηση σφάλματος (error function) είναι σημαντική στη Στατιστική, όπου λέγεται και ολοκλήρωμα πιθανότητας, στη θεωρία διάδοσης της θερμότητας και μετάδοσης σημάτων στη Φυσική, όπως επίσης και σε πολλές άλλες επιστήμες.

Ορισμός 13.3.1 - 1. *Η συνάρτηση σφάλματος ορίζεται από το ολοκλήρωμα*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt. \tag{13.3.1 - 1}$$

Επομένως είναι μια συνάρτηση - ακριβέστερα μια περιττή συνάρτηση - του άνω άκρου ολοκλήρωσης (Σχ. 13.3.1 - 1a).





Σχήμα 13.3.1 - 1: (a) Η συνάρτηση σφάλματος $\operatorname{erf}(x)$, όταν $x \in [-2, 2]$ και (b) Το εμβαδόν ισούται με την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\operatorname{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^2 e^{-t^2}\, dt$

Αναπτύσσοντας τον όρο e^{-t^2} κατά Maclaurin έχουμε

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \cdots\,,$$

οπότε αντικαθιστώντας στην $(13.3.1 - 1)$ προκύπτει ότι

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1\,!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2\,!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3\,!} + \ldots \right). \qquad (13.3.1 - 2)$$

Οι τιμές της συνάρτησης σφάλματος δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα. Για παράδειγμα, αν $x = 2$, τότε είναι (Σχ. 13.3.1 - 1b)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt \approx 0.995\,322.$$

13.3.2 Ολοκληρώματα του Fresnel

Τα ολοκληρώματα του Fresnel (Fresnel integrals), που εμφανίζεται κυρίως σε προβλήματα της Οπτικής, ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 13.3.2 - 1 (ημιτονικό). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα*[8] *(Σχ. 13.3.2 - 1a)*

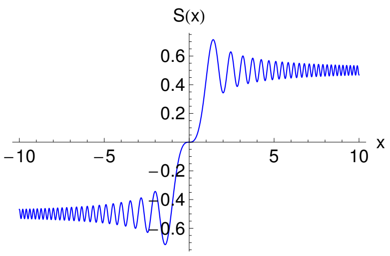
$$\mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)\,dt. \tag{13.3.2 - 1}$$

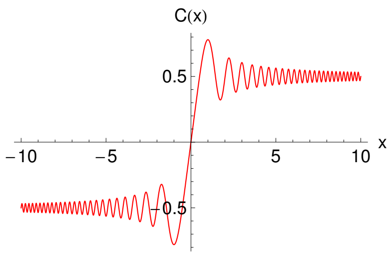
Αναπτύσσοντας κατά Maclaurin τον όρο $\sin t^2$ έχουμε

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)=\frac{\pi}{2}\left(t^2-\frac{t^6}{3\,!}+\frac{t^{10}}{5\,!}+\cdots\right),$$

οπότε αντικαθιστώντας στην $(13.3.2-1)$ προκύπτει ότι

$$\mathrm{S}(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x^3}{3\cdot 1\,!}-\frac{x^7}{7\cdot 3\,!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5\,!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7\,!}+\cdots\right). \tag{13.3.2 - 2}$$





Σχήμα 13.3.2 - 1: (a) Το ολοκλήρωμα Fresnel $S(x)$, όταν $x\in[-10,10]$ και (b) το $C(x)$

[8] Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στο βιβλίο των Abramowitz and Stegun [4] και χρησιμοποιείται στο MATHEMATICA. Επίσης ορίζεται σαν $\mathrm{S}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin t^2\,dt$ σε Α. Μπράτσος [2] ή και $\mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin t^2\,dt$.

Ορισμός 13.3.2 - 2 (συνημιτονικό). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα (Σχ. 13.3.2 - 1b)*

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)\,d\,t. \qquad (13.3.2 - 3)$$

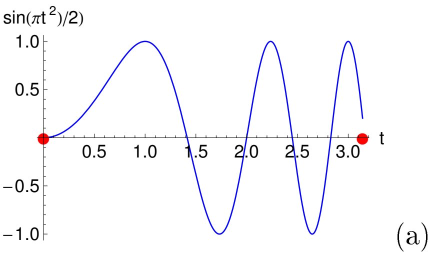
Όμοια αποδεικνύεται ότι

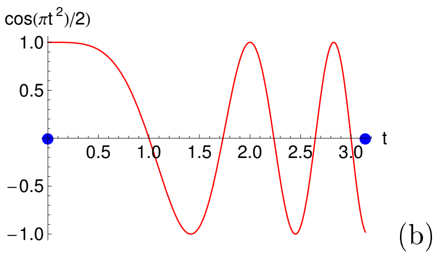
$$\mathrm{C}(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{1\,!} - \frac{x^5}{5\cdot 2\,!} + \frac{x^9}{9\cdot 4\,!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 6\,!} + \cdots\right). \qquad (13.3.2 - 4)$$

Οι τιμές των ολοκληρωμάτων του Fresnel επίσης δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα. Αν για παράδειγμα $x = \pi$, τότε

$$\mathrm{S}(\pi) = \int_0^\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)\,d\,t \approx 0.598\,249 \quad (\Sigma\chi.13.3.2 - 1c)$$

$$\mathrm{C}(\pi) = \int_0^\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)\,d\,t \approx 0.523\,699. \quad (\Sigma\chi.13.3.2 - 1d)$$





Σχήμα 13.3.2 - 2: (a) Η συνάρτηση $\sin\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)$ και (b) η $\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)$, όταν $t \in [0, \pi]$

13.3.3 Ημιτονικό ολοκλήρωμα

Το ημιτονικό ολοκλήρωμα (sine integral) εμφανίζεται σε μία μεγάλη σειρά φυσικών προβλημάτων, όπως στη διάδοση σημάτων, σε φαινόμενα Gibbs, κ.λπ.

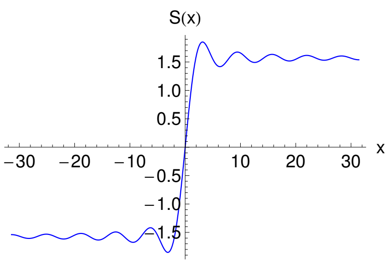
Ορισμός 13.3.3 - 1 (ημιτονικό ολοκλήρωμα). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα (Σχ. 13.3.3 - 1)*

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt. \qquad (13.3.3 - 1)$$

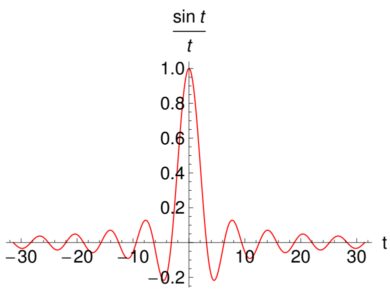
Στις περισσότερες εφαρμογές το ένα άκρο ολοκλήρωσης είναι το άπειρο. Τότε είναι γνωστό και σαν **ολοκλήρωμα του Dirichlet** (Dirichlet integral).

Αναπτύσσοντας τον όρο $\sin t$ κατά Maclaurin και ολοκληρώνοντας την $(13.3.3-1)$ έχουμε

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} \pm \ldots . \qquad (13.3.3 - 2)$$



(a)



(b)

Σχήμα 13.3.3 - 1: (a) Το ημιτονικό ολοκλήρωμα $Si(x)$, όταν $x \in [-10\pi, 10\pi]$ και (b) η ολοκληρωτέα συνάρτηση $\frac{\sin t}{t}$

Όμοια οι τιμές δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα.
[9]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[4] Abramowitz, M., Stegun, I., (1965), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover, Chapter 7 page 297, ISBN 978–048–661–272–0.

[5] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[6] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων