Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά Ι

Ενότητα 15: Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Μέρος ΙΙΙ - Εφαρμογές

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 15

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στο Μάθημα αυτό θα δοθεί μια σειρά εφαρμογών των ορισμένων ολοκληρωμάτων, που κύρια εμφανίζονται στον υπολογισμό διαφόρων χρήσιμων στις θετικές επιστήμες μεγεθών.

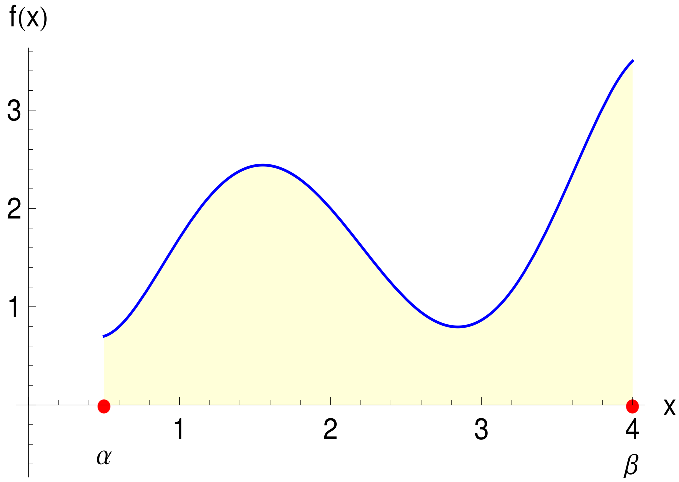
15.1 Εμβαδόν επίπεδου σχήματος

Ανάλογα με τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της εξίσωσης της καμπύλης από την οποία δημιουργείται το σχήμα, διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις.

15.1.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Είναι ήδη γνωστή στον αναγνώστη από το Μάθημα 13 ότι γεωμετρικά το ορισμένο ολοκλήρωμα παριστάνει εμβαδό. Σαν συνέπεια αυτής της γεωμετρικής ιδιότητάς του έχουμε τον παρακάτω ορισμό του εμβαδού.

Ορισμός 15.1.1 - 1 (εμβαδό σχήματος). *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τον x-άξονα, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και την καμπύλη*



Σχήμα 15.1.1 - 1: Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε $E = \int_a^b f(x)\,dx$

$y = f(x)$ δίνεται από τον τύπο (Σχ. 15.1.1 - 1)

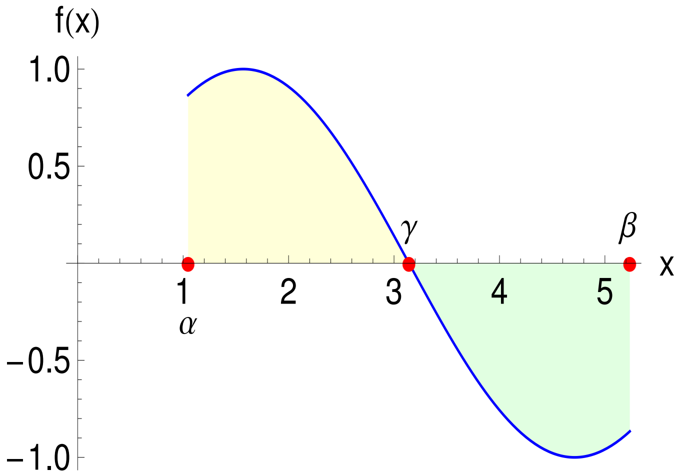
$$E = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx. \qquad (15.1.1 - 1)$$

Γενικότερα, όταν δεν είναι γνωστό το πρόσημο της $f(x)$, ισχύει ο εξής ορισμός του εμβαδού.

Ορισμός 15.1.1 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τον x-άξονα, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και την καμπύλη $y = f(x)$ δίνεται από τον τύπο (Σχ. 15.1.1 - 2)*

$$E = \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx. \qquad (15.1.1 - 2)$$

Στις περιπτώσεις όπου το σχήμα περιορίζεται από δύο καμπύλες, τότε το εμβαδόν ορίζεται ως εξής:



Σχήμα 15.1.1 - 2: Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$ και $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \beta]$. Τότε $E = \int\limits_a^\gamma |f(x)|\,dx + \int\limits_\gamma^\beta |f(x)|\,dx = \int\limits_a^\gamma f(x)\,dx - \int\limits_\gamma^\beta f(x)\,dx$

Ορισμός 15.1.1 - 3 (γενίκευση εμβαδού σχήματος). *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$. Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τις καμπύλες $f(x)$, $g(x)$ δίνεται από τον τύπο (Σχ. 15.1.1 - 3)*

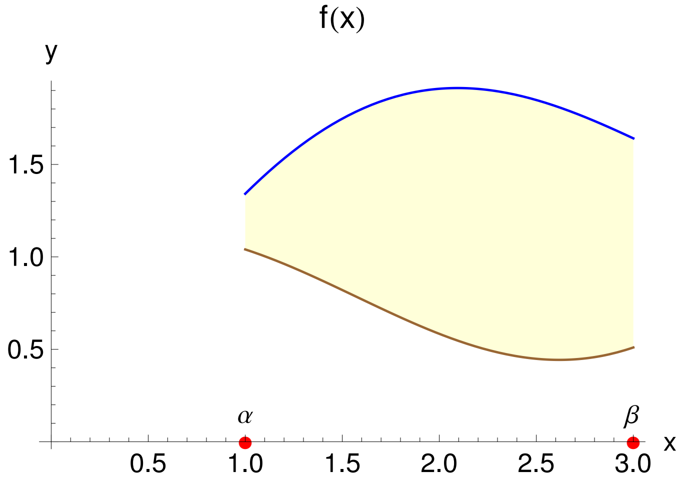
$$E = \int\limits_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|\,dx. \qquad (15.1.1 - 3)$$

Παρατήρηση 15.1.1 - 1 (εμβαδόν κύκλου)

Έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r, που όπως είναι γνωστό η εξίσωση των σημείων της περιφέρειάς του δίνεται από τον τύπο

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (15.1.1 - 4)$$

Για τον υπολογισμό των άκρων ολοκλήρωσης στον τύπο $(15.1.1 - 3)$, πρέπει να προσδιοριστούν τα σημεία που ο κύκλος με εξίσωση $(15.1.1 - 4)$, τέμνει



Σχήμα 15.1.1 - 3: Είναι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε $E = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]\, dx$

τον x-άξονα, δηλαδή όταν $y = 0$. Τότε

$$x^2 = r^2 \quad \text{ή} \quad |x| = |r|, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm r.$$

Άρα $x \in [-\alpha, \alpha]$.

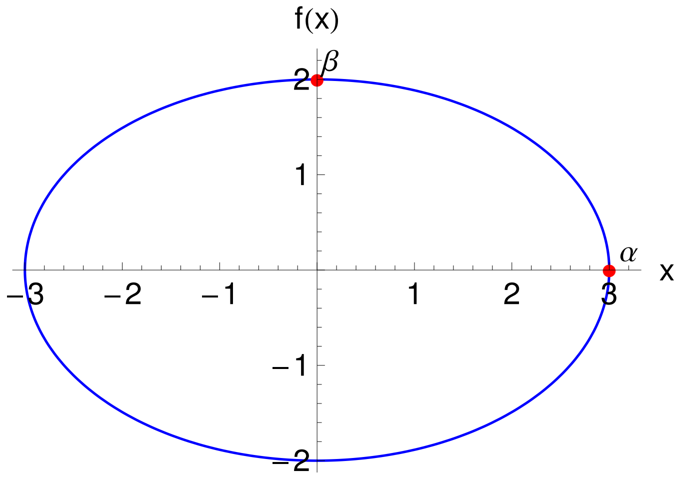
Από την εξίσωση $(15.1.1 - 4)$ προκύπτει τότε ότι $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, οπότε έστω

$$y_1 = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{και} \quad y_2 = g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

όπου προφανώς είναι $y_1(x) \geq y_2(x)$.

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(15.1.1 - 3)$ το ζητούμενο εμβαδό E, που σύμφωνα με το γνωστό τύπο της Γεωμετρίας είναι $E = \pi r^2$, θα ισούται με

$$\begin{aligned} E = \pi r^2 &= \int\limits_{-r}^{r} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx \\ &= \int\limits_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right] dx \end{aligned}$$



Σχήμα 15.1.1 - 4: Η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

$$= \quad 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx. \qquad (15.1.1 - 5)$$

Από την $(15.1.1 - 5)$ προκύπτει ότι

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}\,. \qquad (15.1.1 - 6)$$

Ο τύπος αυτός θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια του μαθήματος.

Παράδειγμα 15.1.1 - 1 (εμβαδόν έλλειψης)

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την έλλειψη (Σχ. 15.1.1 - 4)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \qquad (15.1.1 - 7)$$

Λύση. Όμοια όπως και στην Παρατήρηση 15.1.1 - 1 ο προσδιορισμός των άκρων ολοκλήρωσης στον τύπο $(15.1.1{-}3)$ υπολογίζεται θέτοντας στην $(15.1.1{-}7)$ $y = 0$. Τότε

$$x^2 = \alpha^2 \quad \text{ή} \quad |x| = |\alpha|, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm\alpha. \quad \text{Άρα} \quad x \in [-\alpha, \alpha].$$

Από την εξίσωση $(15.1.1-7)$ προκύπτει ότι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{οπότε} \quad y=\pm\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\,.$$

Άρα

$$y_1=f(x)=\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} \quad \text{και} \quad y_2=g(x)=-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

όπου προφανώς είναι $y_1(x)\geq y_2(x)$. Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(15.1.1-3)$ το ζητούμενο εμβαδόν E θα ισούται με

$$\begin{aligned} E &= \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[y_1(x)-y_2(x)\right]\,dx=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}-\left(-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\right)\right]\,dx \\ &= 2\beta\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\,dx=\frac{2\beta}{\alpha}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx \\ &\quad \text{σύμφωνα με τον τύπο } (15.1.1-6) \\ &= \frac{2\beta}{\alpha}\,\frac{\pi\alpha^2}{2}=\pi\alpha\beta. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 15.1.1 - 2

Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=x(x-2)(x-3)$ και τον x-άξονα (Σχ. 15.1.1 - 5).

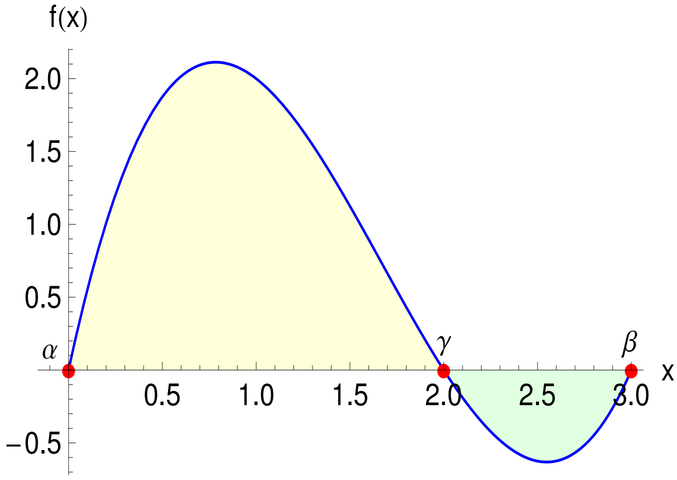
Λύση. Το γράφημα της συνάρτησης τέμνει τον x-άξονα στα σημεία όπου

$$f(x)=0, \quad \text{δηλαδή τα} \quad x=0,\,2,\,3.$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε το πρόσημο της $f(x)$, όταν $x\in[0,2]\cup[2,3]$ χρησιμοποιείται ο τύπος $(15.1.1-2)$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E=\int\limits_{0}^{2}|f(x)|\,dx+\int\limits_{2}^{3}|f(x)|\,dx. \tag{15.1.1 - 8}$$

Το πρόσημο της $f(x)$ υπολογίζεται στον Πίνακα 15.1.1 - 1.



Σχήμα 15.1.1 - 5: Παράδειγμα 15.1.1 - 2

Πίνακας 15.1.1 - 1: Παράδειγμα 15.1.1 - 2

	$-\infty$	0		2		3		$+\infty$
x	-		+		+		+	
$x-2$	-		-		+		+	
$x-3$	-		-		-		+	
$f(x)$	-		+		-		+	

Επομένως, επειδή

$$f(x) \geq 0, \quad \text{όταν} \quad x \in [0,2] \quad \text{και} \quad f(x) \leq 0, \quad \text{όταν} \quad x \in [2,3],$$

ο τύπος $(15.1.1 - 8)$ γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 |f(x)|\,dx + \int_2^3 |f(x)|\,dx \\ &= \int_0^2 x(x-2)(x-3)\,dx \;-\; \int_2^3 x(x-2)(x-3)\,dx \\ &= \left[3x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 - \left[3x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_2^3 \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12}\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 15.1.1 - 3

Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y_1 = 2x^2 + 10 \quad \text{και} \quad y_2 = 4x + 16, \quad \text{όταν} \quad x \in [-2,5] \quad (\Sigma\chi.\ 15.1.1 - 6).$$

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα σημεία τομής των καμπυλών

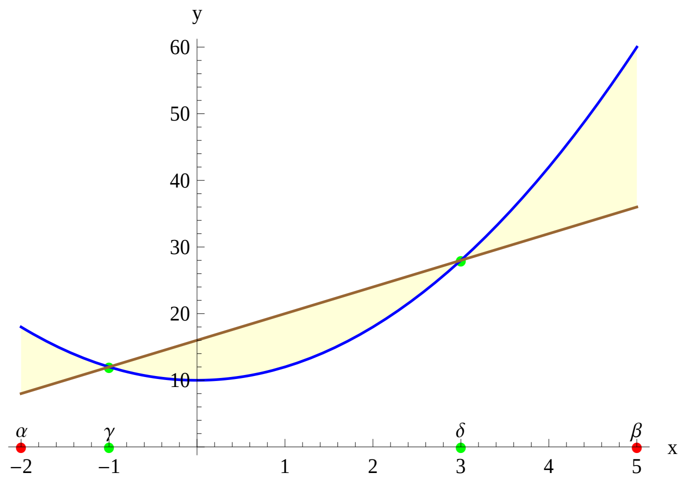
$$y_1 = 2x^2 + 10 \quad \text{και} \quad y_2 = 4x + 16 \tag{15.1.1 - 9}$$

ως εξής:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_2(x), \quad \text{οπότε} \quad 2x^2 + 10 = 4x + 16, \quad \text{δηλαδή} \\ & \qquad 2x^2 - 4x - 6 = 0. \quad \text{Άρα} \quad x = -1,\, 3. \end{aligned}$$

Έστω $\gamma(-1,0)$ και $\delta(3,0)$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(15.1.1 - 3)$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{-2}^{-1} |y_1(x) - y_2(x)|\,dx + \int_{-1}^{3} |y_1(x) - y_2(x)|\,dx$$



Σχήμα 15.1.1 - 6: Παράδειγμα 15.1.1 - 3

$$+\int_{3}^{5} |y_1(x) - y_2(x)|\, dx. \qquad (15.1.1 - 10)$$

Για να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στην (15.1.1—10), πρέπει να απαλειφθούν τα απόλυτα. Αυτό γίνεται εξετάζοντας το πρόσημο της διαφοράς $y_1(x)-y_2(x)$.

Έστω

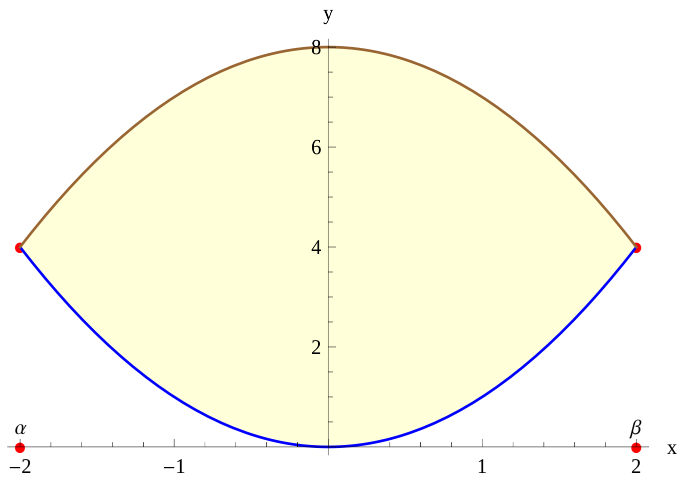
$$y_1(x) - y_2(x) \geq 0 \quad \text{ή λόγω της } (15.1.1-9) \quad (x+1)(x-3) \geq 0,$$

δηλαδή

$$x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 3.$$

Τότε η $(15.1.1-10)$ γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^{-1} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx + \int_{-1}^{3} [y_2(x) - y_1(x)]\, dx + \int_{3}^{5} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(2x^2 - 4x - 6\right) dx + \int_{-1}^{3} \left(-2x^2 + 4x + 6\right) dx + \int_{3}^{5} \left(2x^2 - 4x - 6\right) dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 6x\right]_{3}^{5} \end{aligned}$$



Σχήμα 15.1.1 - 7: Παράδειγμα 15.1.1 - 4. Η μπλε καμπύλη ορίζει την $y_1(x) = x^2$

$$= \frac{14}{3} + \frac{64}{3} + \frac{64}{3} = \frac{142}{3}.$$

Παράδειγμα 15.1.1 - 4

Όμοια το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y_1(x) = x^2 \quad \text{και} \quad y_2(x) = 8 - x^2 \quad (\Sigma\chi.\ 15.1.1 - 7).$$

Λύση. Τα κοινά σημεία τομής των δύο καμπυλών υπολογίζονται θέτοντας

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \text{οπότε} \qquad x^2 = 8 - x^2. \quad \text{Άρα} \qquad x = \pm 2.$$

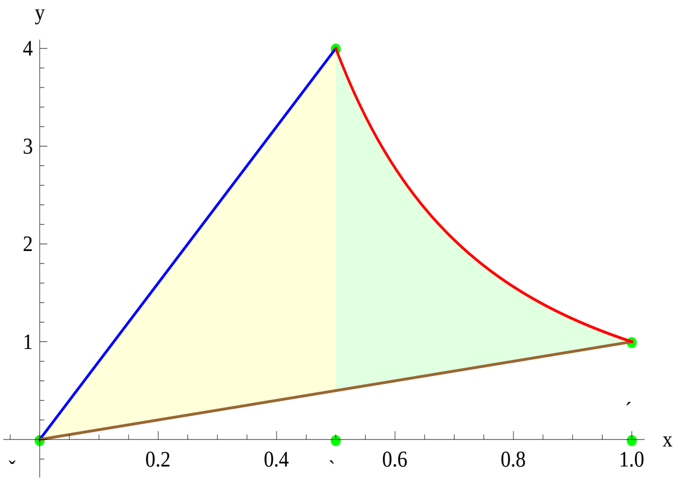
Στη συνέχεια υπολογίζεται το πρόσημο της διαφοράς $y_1(x) - y_2(x)$.

Έστω

$$y_1(x) - y_2(x) \geq 0 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 8 \geq 0, \quad \text{οπότε} \quad (x+2)(x-2) \geq 0.$$

Άρα

$$y_1(x) - y_2(x) \leq 0, \quad \text{όταν} \quad -2 \leq x \leq 2.$$



Σχήμα 15.1.1 - 8: Παράδειγμα 15.1.1 - 5. Η καφέ καμπύλη δείχνει το γράφημα της $y_2(x) = x$, η μπλε της $y_1 = 8x$ και η κόκκινη της $y_3(x) = \frac{1}{x^2}$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(15.1.1 - 8)$ το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E = \int_{-2}^{2} [y_2(x) - y_1(x)] \; dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2\right) \; dx = 8x - \frac{2x^3}{3}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{64}{3} \, .$$

Παράδειγμα 15.1.1 - 5

Όμοια το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y_1(x) = 8x, \quad y_2(x) = x \quad \text{και} \quad y_3(x) = \frac{1}{x^2} \quad (\Sigma\chi.\ 15.1.1 - 8).$$

Λύση. Τα κοινά σημεία και των τριών καμπυλών υπάρχουν μόνο για $x \geq 0$, ενώ η συνάρτηση $y_3(x)$ ορίζεται για $x \in \Re - \{0\}$. Προφανώς οι καμπύλες (ευθείες) $y_1(x)$ και $y_2(x)$ τέμνονται στο σημείο $(0, 0)$, δηλαδή την αρχή των αξόνων. Το κοινό σημείο, έστω A, της $y_1(x)$ και $y_3(x)$ υπολογίζεται θέτοντας

$$y_1(x) = y_3(x) \quad \text{ή} \quad 8x = \frac{1}{x^2}\,, \quad \text{οπότε} \quad x = \frac{1}{2}\,,$$

(οι άλλες δύο ρίζες δεν λαμβάνονται υπ' όψιν), ενώ το κοινό σημείο, έστω B, της $y_2(x)$ και $y_3(x)$ θέτοντας

$$y_2(x) = y_3(x) \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{x^2}\,, \quad \text{οπότε} \quad x = 1$$

όπου όμοια οι άλλες δύο ρίζες δεν λαμβάνονται υπ' όψιν.

Έστω $E = E_1 + E_2$ το ζητούμενο εμβαδόν. Επειδή το σημείο $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y_3(x)$, το E δεν θα προκύψει από συνδυασμό της $y_3(x)$ με την $y_1(x)$ ή την $y_2(x)$ και άκρο ολοκλήρωσης το 0. Επομένως

- το εμβαδόν E_1 θα πρέπει να ορίζεται από την $y_1(x) = 8x$ και την $y_2(x) = x$ με $x \in [0, 0.5]$ όπου προφανώς $y_1(x) \geq y_2(x)$, δηλαδή
$$E_1 = \int_0^{0.5} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx = 7 \int_0^{0.5} x\, dx = \frac{7}{8}$$
- και το εμβαδόν E_2 θα ορίζεται από την $y_3(x) = \frac{1}{x^2}$ και την $y_2(x) = x$ με $x \in [0.5, 1]$ όπου προφανώς $y_3(x) \geq y_2(x)$, δηλαδή
$$E_2 = \int_{0.5}^{1} [y_3(x) - y_2(x)]\, dx = \int_{0.5}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} = \frac{5}{8}.$$

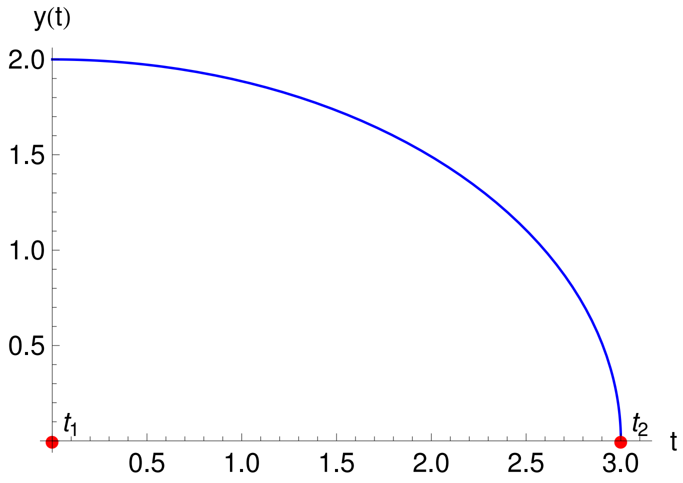
Άρα $\quad E = E_1 + E_2 = \dfrac{3}{2}.$

15.1.2 Παραμετρική μορφή

Ορισμός 15.1.2 - 1. *Αν μία καμπύλη ορίζεται με παραμετρικές εξισώσεις της μορφής $x = x(t)$ και $y = y(t)$ όταν $t \in [t_1, t_2]$, τότε το εμβαδόν E του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από την καμπύλη, τις κάθετες ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα των x, ισούται με*
$$E = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t)\, dt, \qquad (15.1.2 - 1)$$
όταν $y(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [t_1, t_2]$ και οι τιμές t_1 και t_2 προκύπτουν από την εξίσωση $x = x(t)$.

Παράδειγμα 15.1.2 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της έλλειψης που εκφράζεται με τη βοήθεια των παραμετρικών εξισώσεων της μορφής
$$x = \alpha \cos t \quad \text{και} \quad y = \beta \sin t. \qquad (15.1.2 - 2)$$



Σχήμα 15.1.2 - 1: Παράδειγμα 15.1.2 - 1. Το πρώτο τεταρτημόριο της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Λύση. Λόγω της συμμετρίας της έλλειψης αρκεί να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός τεταρτημορίου αυτής (Σχ. 15.1.2 - 1) και το αποτέλεσμα να πολλαπλασιαστεί επί 4.

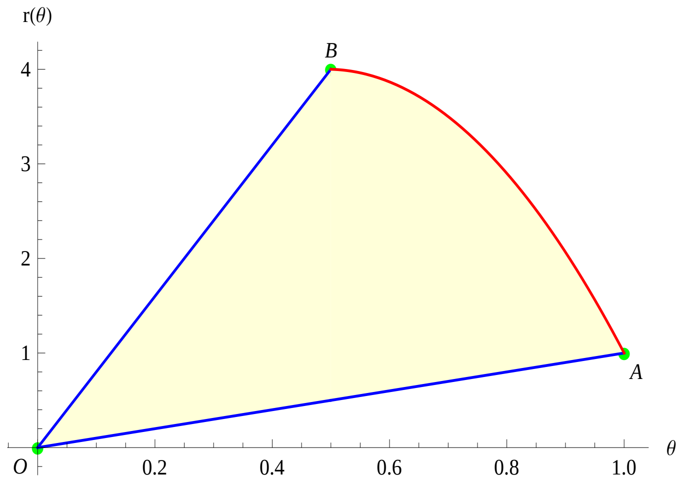
Θέτοντας στην 1η εξίσωση ($x = \alpha \cos t$) της $(15.1.2-2)$ διαδοχικά $x = 0$ και $x = a$ προκύπτουν σαν όρια ολοκλήρωσης τα $t_1 = \pi/2$ και $t_2 = 0$, ενώ είναι $y > 0$ για κάθε $t \in [0, \pi/2]$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(15.1.2-1)$ είναι

$$\int\limits_{\pi/2}^{0} \beta \sin\alpha\,(-\sin t)\,d\,t = \alpha\beta \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 t\,d\,t = \frac{\pi\alpha\beta}{4}\,.$$

Άρα $\quad E = \pi\alpha\beta$.

Παρατήρηση 15.1.2 - 1

Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού του εμβαδού της έλλειψης με τη βοήθεια της παραμετρικής παράστασής της είναι εμφανώς ευκολότερος του αντίστοιχου τρόπου με ορθογώνιες συντεταγμένες (Παράδειγμα 15.1.1 - 1). Αυτό είναι μια απόδειξη της χρησιμότητας των παραμετρικών παραστάσεων των καμπυλών.



Σχήμα 15.1.3 - 1: εμβαδόν σχήματος σε πολικές συντεταγμένες

15.1.3 Πολικές συντεταγμένες

Ορισμός 15.1.3 - 1. *Έστω ότι $r = r(\theta)$; $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ είναι η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες του τμήματος (Σχ. 15.1.3 - 1) που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και τα σημεία $A\,(r, \theta_1)$ και $B\,(r, \theta_2)$. Τότε το εμβαδόν E του σχήματος AOB δίνεται από το ολοκλήρωμα*

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\, d\theta. \qquad (15.1.3 - 1)$$

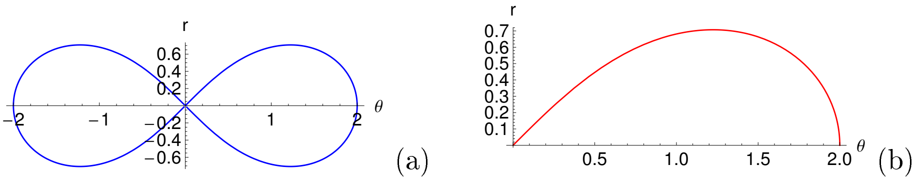
Παράδειγμα 15.1.3 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδό που περικλείεται από τους λιμνήσκους του Bernoulli (Bernoulli's lemniscate)[1] (Σχ. 15.1.3 - 2a) με εξίσωση

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Λύση. Λόγω της συμμετρίας της καμπύλης υπολογίζεται μόνο το εμβαδόν

[1] Βλέπε: http : //en.wikipedia.org/wiki/Lemniscate_of_Bernoulli



Σχήμα 15.1.3 - 2: Ο λημνίσκος του Bernoulli $r^2 = 2\cos 2\theta$, όταν (a) $\theta \in [0, 2\pi]$ και (b) $\theta \in [0, \pi/4]$

του 1ου τεταρτημορίου (Σχ. 15.1.3 - 2b), οπότε

$$\frac{1}{4}E = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}\,.$$

Άρα $\quad E = a^2$.

15.2 Μήκος τόξου καμπύλης

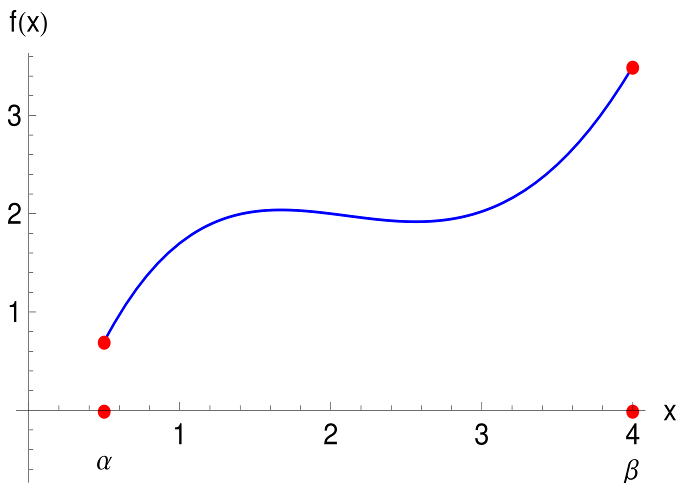
Όμοια ανάλογα με τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της εξίσωσης της καμπύλης διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις.

15.2.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Στην περίπτωση αυτή το μήκος της υπολογίζεται ως εξής:

Ορισμός 15.2.1 - 1 (μήκος καμπύλης). *Έστω ότι η συνάρτηση $f \,|\, [\alpha, \beta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε το μήκος L της καμπύλης που ορίζει η $y = f(x)$ από το σημείο α έως και το σημείο β (Σχ. 15.2.1 - 1) δίνεται από τον τύπο*

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}\, dx. \qquad (15.2.1 - 1)$$



Σχήμα 15.2.1 - 1: Η καμπύλη $y = f(x)$

Παράδειγμα 15.2.1 - 1

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης (Σχ. 15.2.1 - 2)

$$y = f(x) = 2\,x^{3/2}, \quad \text{όταν} \quad x \in [1, 3].$$

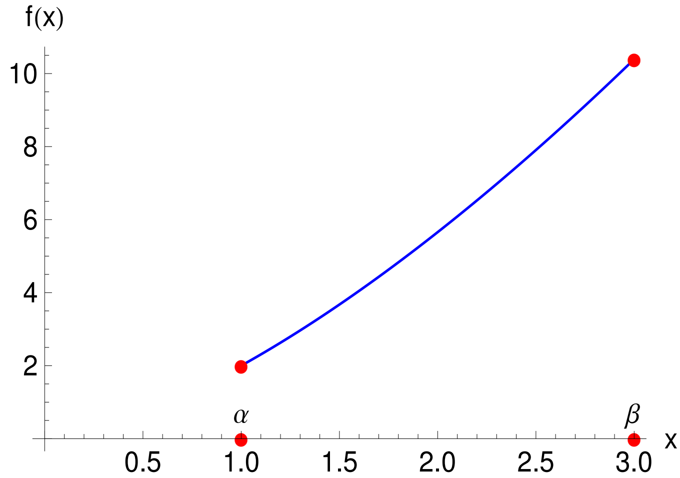
Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(15.2.1 - 1)$ όπου

$$f'(x) = 2\,\frac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}-1} = 3\,x^{1/2}$$

έχουμε $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + 9x}$.

Άρα

$$\begin{aligned} L &= \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1 + 9x}\,dx = \int_1^3 (1 + 9x)^{1/2}\,dx \\ &= \frac{1}{9}\int_1^3 (1 + 9x)'(1 + 9x)^{1/2}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{(1 + 9x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1}\Bigg|_1^3 \\ &= \frac{4}{27}\left(28\,\sqrt{7} - 5\,\sqrt{10}\right) \approx 8.632541. \end{aligned}$$



Σχήμα 15.2.1 - 2: Η καμπύλη $y = 2\,x^{3/2}$, όταν $x \in [1, 3]$

Παράδειγμα 15.2.1 - 2

Όμοια το μήκος της καμπύλης (Σχ. 15.2.1 - 3)

$$y = f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(x-3), \quad \text{όταν} \quad x \in [1, 9].$$

Λύση. Όμοια εφαρμόζεται ο τύπος $(15.2.1 - 1)$ όπου η $f'(x)$ υπολογίζεται ως εξής:

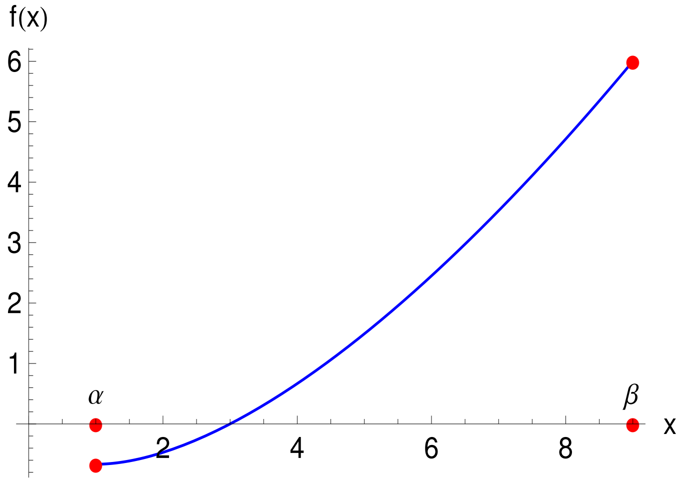
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left[x^{1/2}(x-3)\right]' = \frac{1}{3}\left[\left(x^{1/2}\right)'(x-3) + x^{1/2}(x-3)'\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}(x-3) + x^{1/2}\right] \\ &= \frac{1}{6}\,x^{-1/2}(x-3) + \frac{1}{3}\,x^{1/2} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Τότε

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Άρα

$$L = \int_1^9 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_1^9 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_1^9 \frac{x}{2\sqrt{x}}\,dx + \int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$



Σχήμα 15.2.1 - 3: Η καμπύλη $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(x-3)$, όταν $x \in [1, 9]$

$$= \int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{2}\,dx + \int_1^9 \frac{1}{2}\,x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^9 x^{1/2}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^9 x^{-1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^9 + \frac{1}{2}\left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_1^9 = \frac{1}{3}x^{3/2}\Big|_1^9 + x^{1/2}\Big|_1^9 = 9+3-\frac{1}{3}-1 = \frac{32}{3}\,.$$

Παράδειγμα 15.2.1 - 3

Όμοια το μήκος της καμπύλης (Σχ. 15.2.1 - 4)

$$y = f(x) = \ln\left(1-x^2\right), \quad \text{όταν} \quad x \in [0, 0.5].$$

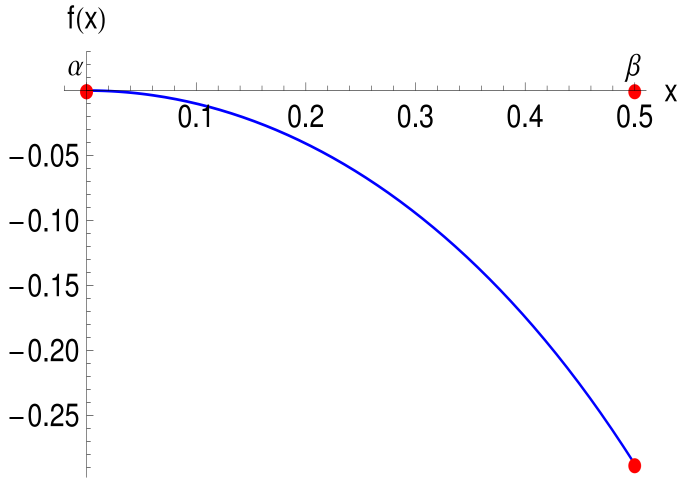
Λύση. Επειδή η συνάρτηση y είναι λογαριθμική, για να ορίζεται πρέπει $1 - x^2 > 0$, δηλαδή $(1+x)(1-x) > 0$ και τελικά $-1 < x < 1$. Το διάστημα $[0, 0.5]$ ανήκει στο πεδίο ορισμού $(-1, 1)$ και επομένως το πρόβλημα ορίζεται.

Αρχικά υπολογίζουμε την παράγωγο της $f(x)$ ως εξής:

$$f'(x) = \frac{\left(1-x^2\right)'}{1-x^2} = \frac{-2x}{1-x^2}\,,$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(15.2.1-1)$ έχουμε

$$L \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\left(1-x^2\right)^2+4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}}\,dx$$



Σχήμα 15.2.1 - 4: Η καμπύλη $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, όταν $x \in [0, 0.5]$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2}}{1-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx \qquad (15.2.1 - 2)$$

[2] Επομένως σύμφωνα με την $(15.2.1 - 2)$ είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\, dx = -x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\, dx \\ &= -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}\,. \end{aligned} \qquad (15.2.1 - 3)$$

[2] Πρόκειται για ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του παρονομαστή, όπου, όπως είναι γνωστό από το Μάθημα 12, αρχικά γίνεται η διαίρεση. Στην περίπτωση όμως αυτή, επειδή είναι του ίδιου βαθμού, τροποποιείται κατάλληλα ο αριθμητής ώστε να δημιουργηθεί ο παρονομαστής, δηλαδή

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{-1+1+1+x^2}{1-x^2} = \frac{-\left(1-x^2\right)+2}{1-x^2} = \frac{-\left(1-x^2\right)}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}\,.$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι η περίπτωση ολοκλήρωσης ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή και υπολογίζεται αναλύοντας τη ρητή συνάρτηση σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\,,$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(1-x)(1+x)$ προκύπτει

$$1 = A(1+x) + B(1-x), \quad \text{δηλαδή} \quad (A-B)x + A + B = 1$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \Re$ πρέπει

$$\begin{array}{rcl} A - B &=& 0 \\ A + B &=& 1, \end{array} \quad \text{οπότε } A = \frac{1}{2} \text{ και } B = \frac{1}{2}\,.$$

Τότε σύμφωνα και με την $(15.2.1-3)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}\right) dx \\
&= -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x} \\
&= -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-(1-x)'dx}{1-x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+x)'dx}{1+x} \\
&= -\,\frac{1}{2} - \ln|1-x|\,\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln|1+x|\,\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2} - \left[\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \ln 1\right] + \left[\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) - \ln 1\right] \\
&= -\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} - (-\ln 2) + \ln 3 - \ln 2 \\
&= -\frac{1}{2} + \ln 3 \approx 0.598\,612\,3.
\end{aligned}$$

15.2.2 Συντεταγμένες με παραμετρική μορφή

Όταν οι συντεταγμένες της καμπύλης ορίζονται παραμετρικά, το μήκος της υπολογίζεται ως εξής:

Ορισμός 15.2.2 - 1 (μήκος καμπύλης). *Έστω ότι η καμπύλη ορίζεται παραμετρικά, δηλαδή* $y = y(t)$ *και* $x = x(t)$ *για κάθε* $t \in [t_0, t_1]$. *Τότε το μήκος* L *της καμπύλης στο διάστημα* $[t_0, t_1]$ *δίνεται από τον τύπο*

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2}\, dt. \qquad (15.2.2 - 1)$$

Παράδειγμα 15.2.2 - 1

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης (Σχ. 15.2.2 - 1) με παραμετρική εξίσωση

$$x = x(t) = \frac{1}{3}(2t+4)^{3/2}, \quad y = y(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 3].$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{3}\frac{3}{2}(2t+4)^{\frac{3}{2}-1}(2t+3)' = \frac{1}{2}(2t+4)^{1/2} \cdot 2 = (2t+4)^{1/2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = t.$$

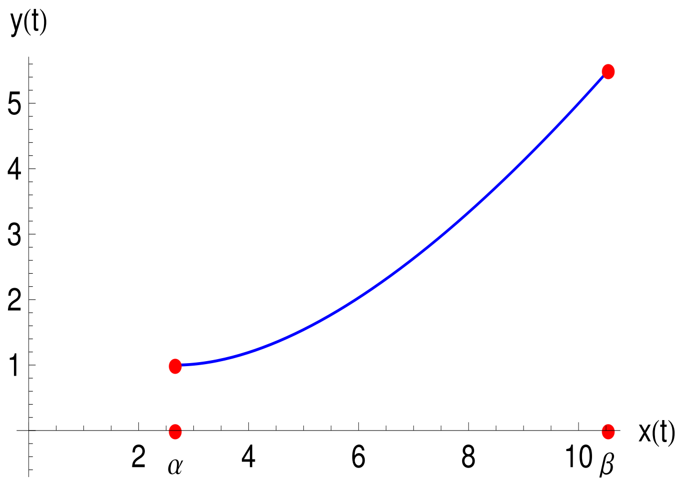
Επειδή είναι $t_0 = 0$ και $t_1 = 3$, εφαρμόζοντας τον τύπο $(15.2.2 - 1)$ έχουμε

$$\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2} = \sqrt{(2t+4)+t^2} = \sqrt{(t+2)^2} = t+2.$$

Άρα

$$L = \int_0^3 (t+2)\, dt = \frac{t^2}{2} + 2t\Big|_0^2 = \frac{9}{2} + 2 \cdot 3 = \frac{21}{2}.$$

3



Σχήμα 15.2.2 - 1: Η καμπύλη $x = x(t) = \frac{1}{3}(2t+4)^{3/2}$, $y = y(t) = \frac{t^2}{2} + 1$, όταν $t \in [0,3]$ $(\alpha = x(0), \quad \beta = x(3))$

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[4] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων