Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ενότητα 4: Μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 4

ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

4.1 Μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων

4.1.1 Εισαγωγή

Στο Μάθημα 3 εξετάστηκε το πρόβλημα της εύρεσης του πολυωνύμου παρεμβολής, δηλαδή του πολυωνύμου που συνέπιπτε ή διαφορετικά διέρχονταν από ορισμένα σημεία μιας συνάρτησης. Το πρόβλημα που θα εξεταστεί στο μάθημα αυτό, είναι ο προσδιορισμός ενός πολυωνύμου που προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό ή διαφορετικά **άριστο τρόπο** (best approximation ή **best fitting**) ένα σύνολο τιμών (data) της μορφής (Σχ. 4.1 - 1):

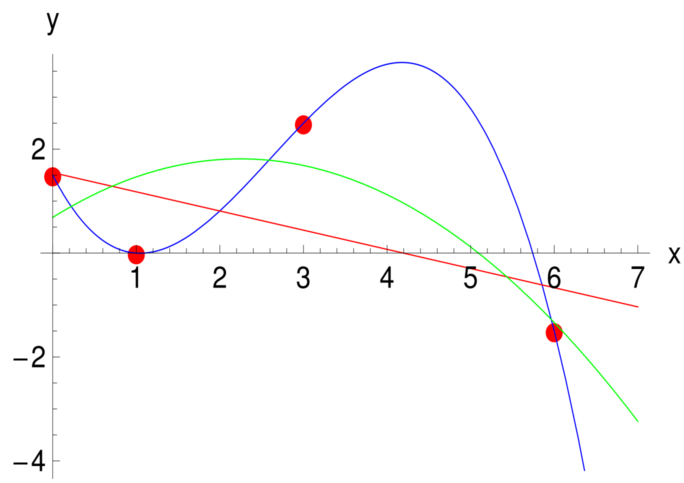
$$S = \{(x_i, y_i) \quad \text{με} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{4.1 - 1}$$

Έστω ότι $y_i = f(x_i)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ όπου f μια άγνωστη γενικά συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση, που ενώ είναι γνωστό ότι υπάρχει, είναι άγνωστος ο τύπος της. Η έννοια της άριστης προσέγγισης σημαίνει τότε ότι το σφάλμα της προσέγγισης στην περίπτωση αυτή είναι το μικρότερο δυνατό.

4.1.2 Περίπτωση Ι πολυώνυμο 1ου βαθμού

Έστω ότι το σύνολο των σημείων S στην $(4.1 - 1)$ προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού της μορφής

$$P_1(x) = P(x) = ax + b, \tag{4.1 - 2}$$



Σχήμα 4.1 - 1: Δεδομένα: $S = \{(0, 1.5), (1, 0), (3, 2.5), (6, -1.5)\}$. Προσέγγιση με: παρεμβολή (μπλε καμπύλη) και με διακριτή προσέγγιση: 1ου βαθμού - ευθεία (κόκκινη) και 2ου βαθμού - παραβολή (πράσινη) καμπύλη

δηλαδή η προσέγγιση των δεδομένων γίνεται με μια ευθεία. Αν θεωρηθεί το τυχόν σημείο $(x_i, y_i) \in S$, τότε η τιμή y_i προσεγγίζεται από την τιμή $\tilde{y}_i = P(x_i) = ax_i + b$, οπότε το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$e_i = |y_i - \tilde{y}_i| = |y_i - (ax_i + b)|\,.$$

Επομένως για το ολικό σφάλμα, έστω $\tilde{E}$, θα έχουμε

$$\tilde{E} = \tilde{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_n = |y_1 - (ax_1 + b)| + \ldots + |y_n - (ax_n + b)|\,. \qquad (4.1 - 3)$$

Προφανώς $\tilde{E} = \tilde{E}(a, b)$, δηλαδή το ολικό σφάλμα είναι μια συνάρτηση των a, b. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό των a και b, έτσι ώστε το σφάλμα $\tilde{E}$ στην $(4.1{-}3)$ να είναι ελάχιστο. Τότε, όπως είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από τη μελέτη συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, οι **αναγκαίες** συνθήκες για να συμβαίνει αυτό είναι:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = 0. \qquad (4.1 - 4)$$

Εύκολα όμως διαπιστώνεται ότι η $(4.1-4)$ λόγω και του απολύτου δεν παραγωγίζεται[1], οπότε το πρόβλημα στη μορφή αυτή δε λύνεται.

Στη **διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων** (discrete least squares method), σε αντίθεση με την $(4.1-3)$, προσδιορίζονται οι σταθερές a και b, έτσι ώστε το ολικό τετραγωνικό σφάλμα E, δηλαδή το

$$E = e_1^2 + \ldots + e_n^2 = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \qquad (4.1\text{ - }5)$$

να είναι **ελάχιστο**. Τότε από την $(4.1-5)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)\,x_i = 0 \quad \text{και} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned}$$

που τελικά μετά τις πράξεις γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i &= \sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + b\overbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i^0}^{n} &= \sum_{i=1}^{n}y_i. \end{aligned} \qquad (4.1\text{ - }6)$$

Το γραμμικό σύστημα $(4.1-6)$ λέγεται τότε και **σύστημα κανονικών εξισώσεων** (normal equations) και από τη λύση του προκύπτει ότι:

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \qquad (4.1\text{ - }7)$$

[1] Έστω για ευκολία ότι απαλείφονται τα απόλυτα. Τότε

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = -x_1 - \ldots - x_n = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = -1 - \ldots - 1 = -n = 0$$

άτοπο.

Πίνακας 4.1 - 1: Παράδειγμα 4.1 - 1

i	x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2
1	-0.5	1.2	-0.6	0.25
2	0.3	2.0	0.6	0.09
3	0.7	1.0	0.7	0.49
4	1.5	-1.0	-1.5	2.25
	2.0	3.2	-0.8	3.08

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\,. \qquad (4.1 - 8)$$

Παράδειγμα 4.1 - 1

Να προσδιοριστεί με την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα:

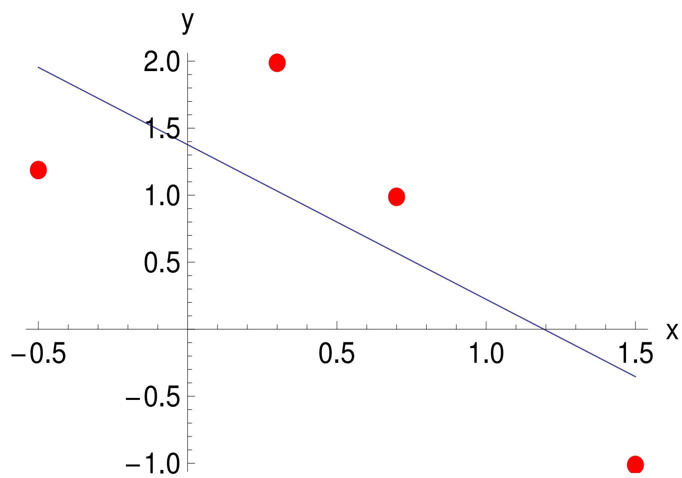
x_i	-0.5	0.3	0.7	1.5
y_i	1.2	2.0	1.0	-1.0

Λύση. Για την εφαρμογή των τύπων $(4.1-7)$ και $(4.1-8)$ απαιτείται η δημιουργία του Πίνακα 4.1 - 1.

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\cdot(-0.8) - 2\cdot(3.2)}{4\cdot(3.08) - 2^2} \approx -1.1539 \quad \text{και} \\ b &= \frac{(3.08)\cdot(3.2) - (-0.8)\cdot 2}{4\cdot(3.08) - 2^2} \approx 1.3769, \end{aligned}$$

δηλαδή $P(x) = -1.1539\,x + 1.3769$ (Σχ. 4.1 - 2). ∎



Σχήμα 4.1 - 2: Παράδειγμα 4.1 - 1. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -1.1539\,x + 1.3769$

Παράδειγμα 4.1 - 2

Όμοια το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (x_i, y_i) του Πίνακα 4.1 - 3.

Λύση. Σύμφωνα με τους τύπους $(4.1-8)$ και $(4.1-8)$ προκύπτει ότι

$$a = \frac{10 \cdot 485.9487 - 56.2933 \cdot 73.8373}{10 \cdot 380.5423 - 56.2933^2} \approx 1.1044 \quad \text{και}$$

$$b = \frac{380.5423 \cdot 73.8373 - 56.2933 \cdot 485.9487}{10 \cdot 380.5423 - 56.2933^2} \approx 1.1667.$$

Άρα $P(x) = 1.1044\,x + 1.1667$ (Σχ. 4.1 - 3). ■

4.1.3 Περίπτωση ΙΙ πολυώνυμο m-βαθμού

Στην περίπτωση αυτή ζητείται η προσέγγιση του συνόλου S στην $(4.1-1)$ με ένα πολυώνυμο m-βαθμού της μορφής

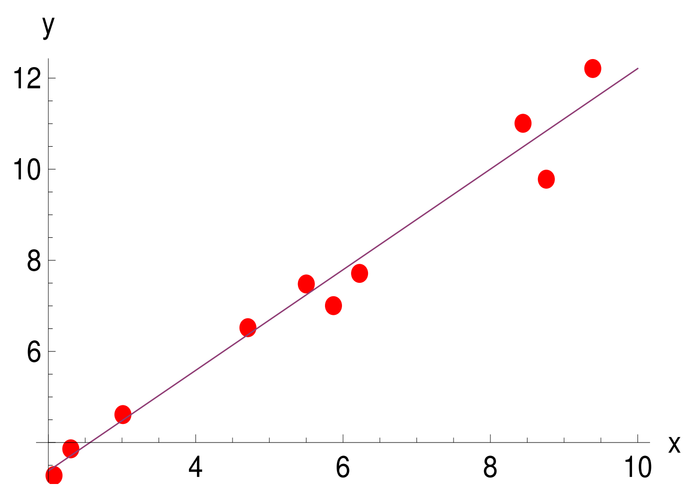
$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

όταν

$$\mathbf{m} < \mathbf{n}\text{ - }\mathbf{1}. \tag{4.1 - 9}$$

Πίνακας 4.1 - 2: Παράδειγμα 4.1 - 2

i	x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2
1	2.0774	3.3123	6.8810	4.3156
2	2.3049	3.8982	8.9850	5.3126
3	3.0125	4.6500	14.0081	9.0752
4	4.7092	6.5576	30.8810	22.1766
5	5.5016	7.5173	41.3572	30.2676
6	5.8704	7.0415	41.3364	34.4616
7	6.2248	7.7497	48.2403	38.7481
8	8.4431	11.0451	93.2549	71.2859
9	8.7594	9.8179	85.9989	76.7271
10	9.3900	12.2477	115.0059	88.1721
	56.2933	73.8373	485.9487	380.5423



Σχήμα 4.1 - 3: Παράδειγμα 4.1 - 2. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 1.1044\,x + 1.1667$

Τότε, όμοια με την Περίπτωση Ι, εκλέγονται οι σταθερές a_0, a_1, …, a_m, έτσι ώστε το σφάλμα[2]

$$E = e_1^2 + \ldots + e_n^2 = [y_1 - P_m(x_1)]^2 + \ldots + [y_n - P_m(x_n)]^2$$

να είναι ελάχιστο.

Όπως και στην περίπτωση του πολυωνύμου 1ου βαθμού οι ανάλογες αναγκαίες συνθήκες των $(4.1 - 4)$ είναι οι εξής:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{για κάθε} \quad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{4.1 - 10}$$

Από την (4.1–10) τελικά[3] έχουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα **κανονικών εξισώσεων** με $m+1$ εξισώσεις και $m+1$ αγνώστους τους συντελεστές a_0, a_1, …, a_m του πολυωνύμου

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^1 \\
&\;\vdots \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^m .
\end{aligned} \tag{4.1 - 11}$$

[2] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 7.

[3] Το σύστημα $(4.1 - 10)$ γράφεται $\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k} = 0$, οπότε $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots, n$. Η απόδειξη να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

Παρατήρησεις 4.1 - 1

i) Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^0 & \sum_{i=1}^{n} x_i^1 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^1 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \tag{4.1 - 12}$$

είναι **συμμετρικός**. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική και περιορίζει τον αριθμό των πράξεων[4], που απαιτούνται για τη λύση του συστήματος $(4.1-11)$.

ii) Αποδεικνύεται ότι το σύστημα $(4.1-11)$ έχει ακριβώς μία λύση, όταν τα σημεία x_i; $i = 1, 2, \dots, n$ είναι **διαφορετικά** μεταξύ τους.

iii) Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να διευκρινιστεί ότι μια γενίκευση του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή η προσέγγιση των σημείων S με ένα πολυώνυμο $P_m(x)$ με την απαίτηση το άθροισμα των σφαλμάτων $E = \sum_{i=1}^{n} e_i^k$ με $k \geq 3$, να είναι ελάχιστο, καταλήγει μετά και την εφαρμογή της συνθήκης $(4.1-10)$ σε μη γραμμικό σύστημα. Επομένως η μέθοδος με την απαίτηση αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη.

Παράδειγμα 4.1 - 3

Να προσδιοριστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο 2ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα του Παραδείγματος 4.1 - 1.

Λύση. Επειδή ο αριθμός των σημείων είναι $n = 4$, σύμφωνα με τη συνθήκη $(4.1-9)$ ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός m του πολυωνύμου θα είναι $m < 4-1$, δηλαδή $m = 2$. Έστω

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

[4]Βλέπε βιβλιογραφία μέθοδος Cholesky και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.

Πίνακας 4.1 - 3: Παράδειγμα 4.1 - 2

x_i	y_i	$x_i\, y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2\, y_i$
-0.5	1.2	-0.6	0.25	-0.125	0.0625	0.30
0.3	2.0	0.6	0.09	0.027	0.0081	0.18
0.7	1.0	0.7	0.49	0.343	0.2401	0.49
1.5	-1.0	-1.5	2.25	3.375	5.0625	-2.25
2.0	3.2	-0.8	3.08	3.62	5.3732	-1.28

το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε το σύστημα $(4.1-11)$ γράφεται

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^0 & + & a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 & + & a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & = & \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 & + & a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & + & a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 & = & \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^1 \quad , \\ a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & + & a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 & + & a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^4 & = & \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^2, \end{array}$$

οπότε σύμφωνα με τον Πίνακα 4.1 - 3 έχουμε

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4a_0 & + & 2.0a_1 & + & 3.08a_2 & = & 3.2 \\ 2.0a_0 & + & 3.08a_1 & + & 3.62a_2 & = & -0.8 \\ 3.08a_0 & + & 3.62a_1 & + & 5.3732a_2 & = & -1.28. \end{array}$$

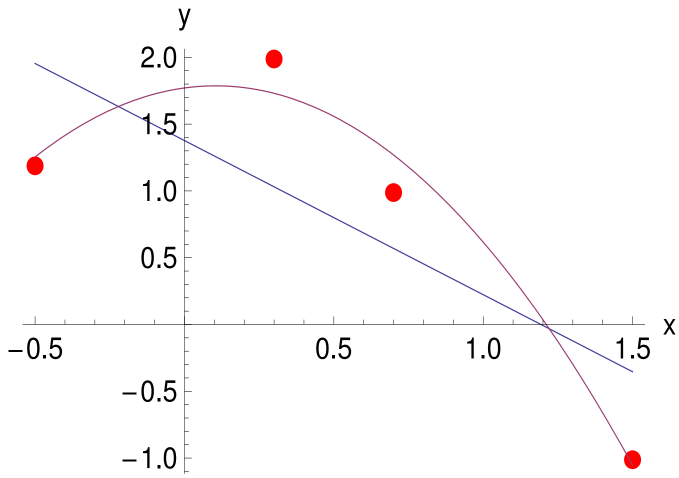
Από τη λύση[5] του συστήματος προκύπτει ότι το πολυώνυμο είναι (Σχ. 4.1 - 4)

$$P_2(x) = -1.4583\, x^2 + 0.3045\, x + 1.7707.$$

Τότε το σφάλμα της προσέγγισης είναι $E = \sum_{i=1}^{5} \left[y_i - P_2\left(x_i\right)\right]^2 \approx 2.76E-04$, που είναι και το ελάχιστο που προκύπτει από προσέγγιση με πολυώνυμο 2ου βαθμού για τα παραπάνω δεδομένα.

■

[5] Η λύση του συστήματος δεν είναι στην εξεταστέα ύλη.



Σχήμα 4.1 - 4: Παράδειγμα 4.1 - 2. Η καμπύλη ορίζεται από το πολυώνυμο $P_2(x) = -1.4583\,x^2 + 0.3045\,x + 1.7707$, ενώ η ευθεία (Παράδειγμα 4.1 - 1) έχει εξίσωση $y = -1.1539\,x + 1.3769$

Ασκήσεις

1. Έστω τα δεδομένα:

x_i	0.500	0.150	0.250	0.400	0.550	0.700
y_i	1.235	1.750	2.020	-1.550	-2.345	0.435

Με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων να υπολογιστούν

i) το πολυώνυμο 1ου, αντίστοιχα 2ου βαθμού που τα προσεγγίζει και να γίνει η γραφική τους παράσταση,

ii) το αντίστοιχο σε κάθε περίπτωση σφάλμα της προσέγγισης.

2. Όμοια τα δεδομένα

x_i	0.3	0.5	0.7	1.4	1.8	2.2	3.5
y_i	0.0647	0.0985	0.2490	1.0395	1.5393	3.5941	4.0549

[6]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[6] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[7] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[9] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[10] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[11] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[12] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Ενότητα 4: Μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- Το Σημείωμα Αναφοράς
- Το Σημείωμα Αδειοδότησης
- Τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- Το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.