Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ενότητα 7: Προσέγγιση ολοκληρωμάτων – Μέρος Ι

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 7

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ - ΜΕΡΟΣ Ι

Όμοια, όπως και στο Μάθημα 6, η προσέγγιση της τιμής του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

χρησιμοποιείται στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν λόγω της πολύπλοκης μορφής του τύπου μιας συνάρτησης είναι αδύνατος ο θεωρητικός υπολογισμός του, και

ii) όταν δεν είναι γνωστός ο τύπος της συνάρτησης, αλλά μόνον οι τιμές της σε ορισμένα σημεία

Οι προσεγγίσεις που θα εξεταστούν στο μάθημα αυτό βασίζονται στον τύπο παρεμβολής του Newton. Σύμφωνα με τον αριθμό και τον τρόπο που συνδυάζονται τα σημεία παρεμβολής προκύπτουν οι μέθοδοι υπολογισμού ή όπως συνήθως λέγονται οι **κανόνες ολοκλήρωσης**.

7.1 Απλοί κανόνες ολοκλήρωσης

Ανάλογα με το θεωρούμενο αριθμό των σημείων παρεμβολής έχουμε τους παρακάτω κανόνες.

7.1.1 Κανόνας του ορθογωνίου

Εισαγωγικές έννοιες

Έστω το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx \tag{7.1.1 - 1}$$

όπου η $f(x)$ θεωρείται ότι είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ ή γενικότερα στην περίπτωση που δεν είναι γνωστός ο τύπος της ότι είναι γνωστές οι τιμές της στα $n+1$ διαφορετικά σημεία x_0, x_1, …, x_n του $[a,b]$. Τότε, όπως είναι ήδη γνωστό, ισχύει ο παρακάτω τύπος παρεμβολής του Newton

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\approx \quad P_n(x)=f\left[x_0\right]+f\left[x_0,x_1\right](x-x_0)+\dots \\ &\qquad +f\left[x_0,x_1,\dots,x_n\right](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\,. \end{aligned} \tag{7.1.1 - 2}$$

Υποθέτοντας ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$, το ολοκλήρωμα $(7.1.1-1)$ γεωμετρικά ισούται με το εμβαδόν του σχήματος που ορίζεται από τον x-άξονα, τις ευθείες $x=a$, $x=b$ και το διάγραμμα της $y=f(x)$ (Σχ. 7.1.1 - 1).

Σημείο παρεμβολής : x_0

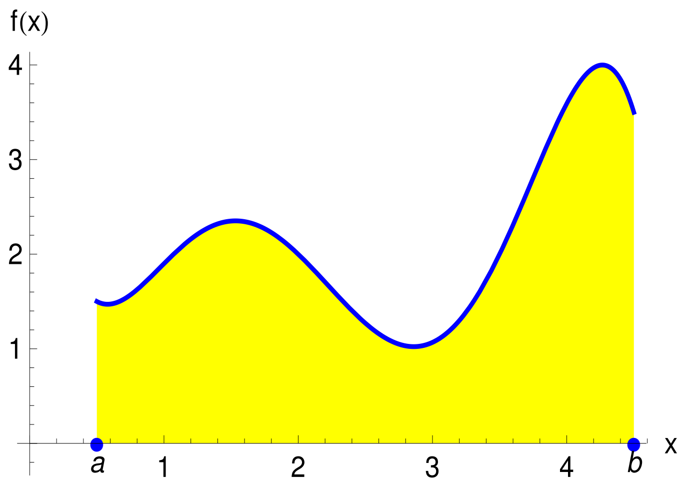
Επειδή υπάρχει ένα σημείο παρεμβολής[1], από την $(7.1.1-2)$ προκύπτει τότε ότι

$$f(x)\approx P_0(x)=f\left[x_0\right]=f\left(x_0\right),$$

οπότε

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx\approx f\left(x_0\right)\int_a^b dx=(b-a)f\left(x_0\right) \tag{7.1.1 - 3}$$

[1] Άρα $n+1=0+1$, οπότε $n=0$ και επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι μηδενικού βαθμού. Βλέπε Μάθημα 3 Θεώρημα του Lagrange.



Σχήμα 7.1.1 - 1: Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$

που είναι γνωστός σαν ο **κανόνας του ορθογωνίου** (rectangle rule).

Ανάλογα με τις θέσεις του σημείου x_0 διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x_0 = a$, αντίστοιχα $x_0 = b$, τότε από την $(7.1.1 - 3)$ έχουμε (Σχ. 7.1.1 - 2a)

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(a), \tag{7.1.1 - 4}$$

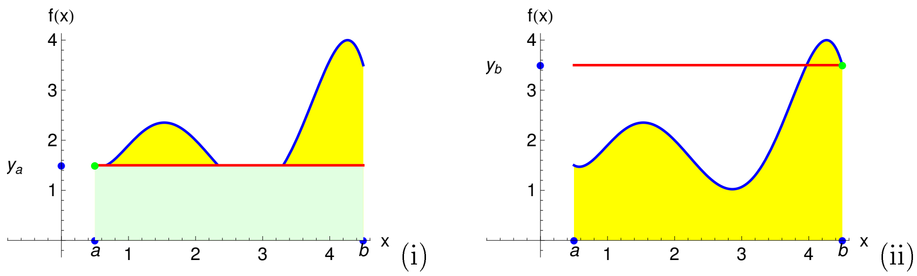
αντίστοιχα (Σχ. 7.1.1 - 2b)

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(b). \tag{7.1.1 - 5}$$

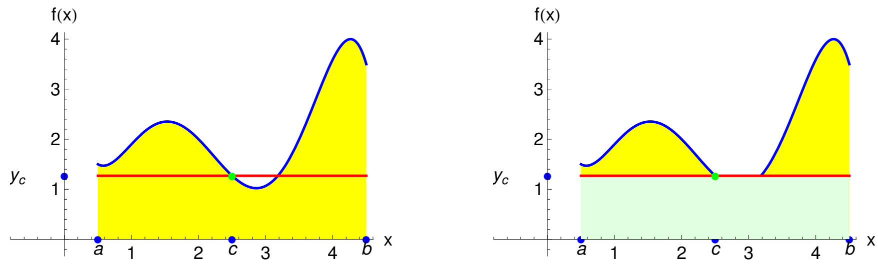
- Έστω τώρα ότι $x_0 = (a+b)/2$. Τότε η $(7.1.1 - 3)$ γράφεται

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{7.1.1 - 6}$$

που είναι γνωστός σαν ο **κανόνας του μέσου σημείου** (midpoint rule). (Σχ. 7.1.1 - 3)



Σχήμα 7.1.1 - 2: (i) Προσέγγιση $(7.1.1-4)$ με: $x_0 = a$, $y_a = f(a)$ και (ii) $(7.1.1-5)$ με: $x_0 = b$, $y_b = f(b)$. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$



Σχήμα 7.1.1 - 3: Κανόνας του μέσου σημείου $(7.1.1-6)$ με: $c = x_0 = \frac{a+b}{2}$ και $y_c = f(c)$. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

7.1.2 Κανόνας του τραπεζίου

Σημεία παρεμβολής : x_0, x_1

Τότε, επειδή τα σημεία παρεμβολής είναι 2, από την $(7.1.1-2)$ προκύπτει ότι

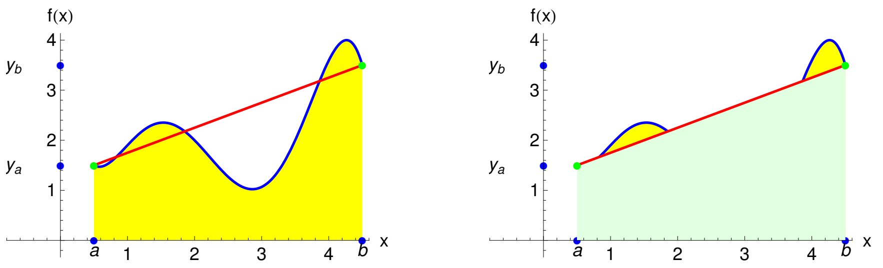
$$f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0),$$

δηλαδή το πολυώνυμο παρεμβολής είναι 1ου βαθμού, οπότε πρόκειται για ευθεία γραμμή. Θέτοντας (Σχ. 7.1.2 - 1)

$$x_0 = a, \quad x_1 = b \quad \text{και} \quad h = b - a,$$

από την $(7.1.1-1)$ τελικά προκύπτει ότι

$$I(f) \approx \int_a^b P_1(x)\,dx = \frac{h}{2}\{f(a) + f(b)\}. \qquad (7.1.2\text{ - }1)$$



Σχήμα 7.1.2 - 1: Απλός κανόνας του τραπεζίου (7.1.2 − 1) με: $x_0 = a$, $y_a = f(a)$ και $x_1 = b$, $y_b = f(b)$. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$ και η κόκκινη του πολυωνύμου $P_1(x)$

Ο τύπος (7.1.2−1) είναι γνωστός σαν ο **κανόνας του τραπεζίου** (trapezoidal rule).

7.1.3 Κανόνας του Simpson

Σημεία παρεμβολής : $x_0, \quad x_1, \quad x_2$

Τότε, επειδή τα σημεία είναι 3, το πολυώνυμο παρεμβολής είναι 2ου βαθμού (παραβολή), δηλαδή

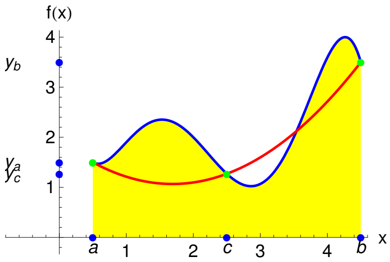
$$\begin{aligned} f(x) \approx P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1). \end{aligned}$$

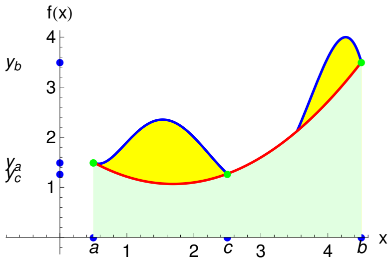
Θέτοντας (Σχ. 7.1.3 - 1)

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_3 = b \quad \text{με} \quad h = \frac{b-a}{2}$$

και αντικαθιστώντας στην (7.1.1 − 1) τελικά έχουμε τον παρακάτω κανόνα ολοκλήρωσης

$$\begin{aligned} I(f) &\approx \int_a^b P_2(x)\,dx \\ &= \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\} \\ &= \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right\} \qquad (7.1.3 - 1) \end{aligned}$$





Σχήμα 7.1.3 - 1: Απλός κανόνας του Simpson $(7.1.2-1)$ με: $x_0 = a$, $x_1 = c = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $y_a = f(a)$, $y_c = f(c)$ και $y_b = f(b)$. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$ και η κόκκινη του πολυωνύμου $P_2(x)$

που είναι γνωστός σαν ο **κανόνας του Simpson**[2] (Simpson's rule).

7.1.4 Κανόνας των 3/8

Σημεία παρεμβολής : $x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3$

Όμοια, επειδή τα σημεία είναι 4, το πολυώνυμο παρεμβολής είναι 3ου βαθμού, δηλαδή

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

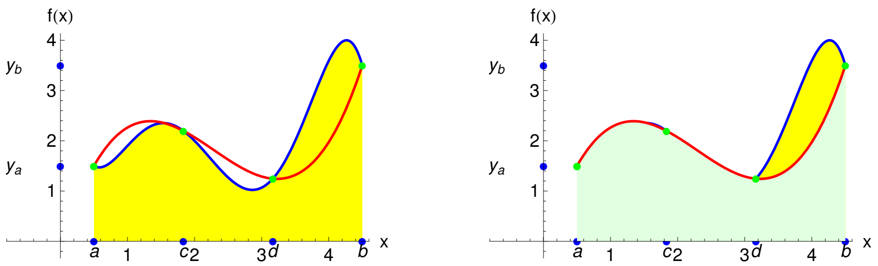
Ακολουθώντας παρόμοιους υπολογισμούς με εκείνους της Παραγράφου 7.1.3 θεωρώντας ότι το διάστημα $[a, b]$ υποδιαιρείται σε 3 ισοαπέχοντα διαστήματα από τα σημεία (Σχ. 7.1.4 - 1)

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \frac{a+b}{3}, \quad x_2 = x_0 + \frac{2(a+b)}{3}, \quad x_3 = b \quad \text{με} \quad h = \frac{b-a}{3}$$

αποδεικνύεται ότι ο τύπος υπολογισμού του ολοκληρώματος $(7.1.1-1)$ τελικά γράφεται ως εξής:

$$I(f) \approx \int_a^b P_3(x)\,dx$$

[2] Ακριβέστερα κανόνας του Simpson με 2ου βαθμού πολυώνυμο παρεμβολής (Simpson's rule with quadratic interpolating polynomial).



Σχήμα 7.1.4 - 1: Απλός κανόνας των 3/8 του Simpson (7.1.4−1) με: $x_0 = a$, $x_1 = c = \frac{a+b}{3}$, $x_2 = c = \frac{2(a+b)}{3}$, $x_3 = b$, $y_a = f(a)$ και $y_b = f(b)$. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$ και η κόκκινη του πολυωνύμου $P_3(x)$

$$= \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\}. \quad (7.1.4 - 1)$$

Ο τύπος $(7.1.4 - 1)$ είναι γνωστός σαν ο **κανόνας των 3/8 του Simpson** (Simpson's 3/8 rule).[3]

Όλοι οι παραπάνω κανόνες ολοκλήρωσης είναι γνωστοί επίσης και σαν κανόνες ολοκλήρωσης των **Newton-Cotes** (Newton-Cotes rules) και χαρακτηριστικό τους είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος (7.1.1−1) με ισοαπέχοντα σημεία. Οι αντίστοιχοι τύποι λέγονται τότε και τύποι ολοκλήρωσης των Newton-Cotes (Newton-Cotes formulas).[4]

7.2 Σύνθετοι κανόνες

Η ακρίβεια των τύπων στους απλούς κανόνες ολοκλήρωσης είναι περιορισμένη, κυρίως όταν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι μεγάλο. Ένας τρόπος για να έχουμε καλύτερη ακρίβεια είναι να αυξηθεί ο αριθμός των σημείων παρεμβολής, που όμως όπως είναι φυσικό θα δυσκολέψει περισσότερο τον υπολογισμό του τύπου. Ένας άλλος τρόπος τότε, που παρακάμπτει τις δυσκολίες αυτές, είναι να υποδιαιρεθεί κατάλληλα το διάστημα ολοκλήρωσης σε επιμέρους υποδιαστήματα και να εφαρμοστεί ένας από τους παραπάνω κανόνες σε καθένα από τα

[3] Επίσης είναι γνωστός και σαν κανόνας του Simpson με 3ου βαθμού πολυώνυμο παρεμβολής (Simpson's rule with cubic interpolating polynomial).

[4] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 9.

υποδιαστήματα αυτά.

Η παραπάνω διαδικασία, όταν γενικευτεί, οδηγεί στους λεγόμενους **σύνθετους κανόνες ολοκλήρωσης** (composite quadrature rules), οι κυριότεροι των οποίων συναντώνται στις εφαρμογές δίνονται στη συνέχεια.

7.2.1 Σύνθετος κανόνας του τραπεζίου

Έστω ότι το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ υποδιαιρείται σε N το πλήθος υποδιαστήματα πλάτους (Σχ. 7.2.1 - 1)

$$h = \frac{b-a}{N} \quad \text{από τα} \quad N+1 \quad \text{σημεία } x_i = a + ih;\ i = 0, 1, \ldots, N.$$

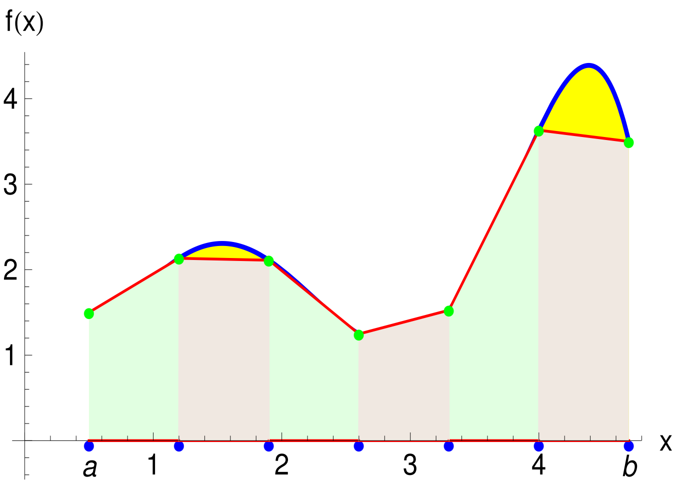
Τότε σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων και τον τύπο $(7.1.1 - 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{a=x_0}^{b=x_N} f(x)\,dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx \\ &\approx \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + f(x_1)\right\} + \frac{h}{2}\left\{f(x_1) + f(x_2)\right\} \\ &\quad + \ldots + \frac{h}{2}\left\{f(x_{N-1}) + f(x_N)\right\}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$I(f) \approx \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1})\right] + f(x_N)\right\} \qquad (7.2.1 - 1)$$

που είναι γνωστός σαν ο **σύνθετος κανόνας του τραπεζίου** (composite trapezoidal rule). Ο υπολογισμός δίνεται στον Αλγόριθμο 7.2.1 - 1.



Σχήμα 7.2.1 - 1: σύνθετος κανόνας του τραπεζίου. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

Αλγόριθμος 7.2.1 - 1 (σύνθετου κανόνα του τραπεζίου)

Δεδομένα a, b, N, $h = (b-a)/N$

Έστω $S_0 = f(a) + f(b)$, $S_1 = 0$.

Για $i = 1, 2, \ldots, N-1$

$x = x_0 + ih;$

$S_1 := S_1 + f(x)$

τέλος i

$I = \frac{h}{2}(S_0 + 2S_1)$

7.2.2 Σύνθετος κανόνας του Simpson

Υποδιαιρώντας το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ σε $2N$ το πλήθος υποδιαστήματα[5] πλάτους $h = (b-a)/2N$ από τα $2N+1$ σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_{2N}$, όμοια σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων και τον τύπο $(7.1.1-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_{a=x_0}^{b=x_{2N}} f(x)\,dx \\
&= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2N-2}}^{x_{2N}} f(x)\,dx \\
&\approx \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\} \\
&\quad + \frac{h}{3}\{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\} + \ldots \\
&\quad + \frac{h}{3}\{f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})\},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
I(f) \approx\ & \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2N-1})] \\
& +2[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2N-2})] \\
& +f(x_{2N})\}
\end{aligned} \qquad (7.2.2\text{ - }1)$$

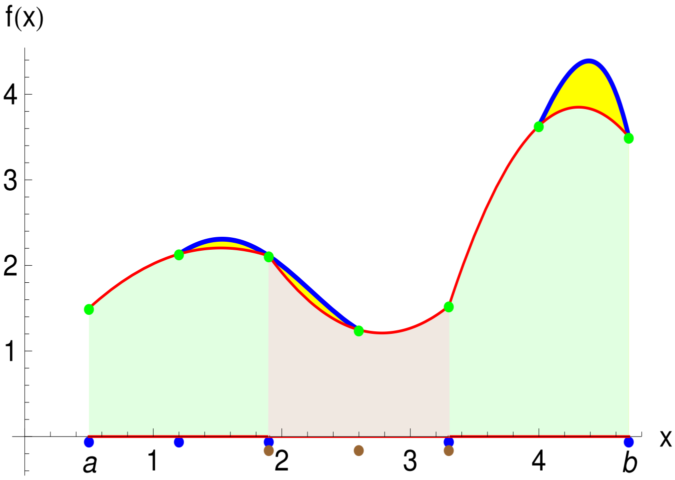
που είναι γνωστός σαν **σύνθετος κανόνας του Simpson** (composite Simpson's rule). Ο υπολογισμός δίνεται στον Αλγόριθμο 7.2.2 - 1.

Παράδειγμα 7.2.2 - 1

Ζητείται να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου, αντίστοιχα του Simpson το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1.$$

[5] Επειδή ο απλός κανόνας του Simpson απαιτεί για την εφαρμογή του 3 σημεία, δηλαδή 2 υποδιαστήματα, η υποδιαίρεση του $[a, b]$ πρέπει να γίνει σε **άρτιο** αριθμό υποδιαστημάτων.



Σχήμα 7.2.2 - 1: σύνθετος κανόνας του Simpson. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

Αλγόριθμος 7.2.2 - 1 (σύνθετου κανόνα του Simpson)

Δεδομένα a, b και $n = 2N$ άρτιος

Έστω $h = (b-a)/n$, $S_0 = f(a) + f(b)$, $S_1 = S_2 = 0$.

Για $i = 1, 2, \ldots, n-1$

  $x = x_0 + ih$

  αν i άρτιος $S_2 = S_2 + f(x)$, διαφορετικά $S_1 = S_1 + f(x)$

τέλος i

$I = \dfrac{h}{3}(S_0 + 4S_1 + 2S_2)$

Πίνακας 7.2.2 - 1: Παράδειγμα 7.2.2 - 1: οι τιμές $(x_i, f(x_i))$

x_i	$f(x_i)$	x_i	$f(x_i)$
0.0	0.100 000	0.7	0.819 2319
0.1	0.995 037	0.8	0.780 8688
0.2	0.980 580	0.9	0.743 2941
0.3	0.957 826	1.0	0.707 1068
0.4	0.928 476	1.1	0.672 6728
0.5	0.894 427	1.2	0.640 1844
0.6	0.857 492		

Η θεωρητική τιμή είναι $I = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^{1.2} \approx 1.015\,973.$
Λύση. Αν $a_0 = x_0 = 0$ και $b = x_{12} = 1.2$, τότε ο τύπος $(7.2.1 - 1)$ για το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου δίνει

$$I \approx \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \ldots + f(x_{11})\right] + f(x_{12})\right\} = 1.015\,711,$$

αντίστοιχα ο τύπος $(7.2.2 - 1)$ για το σύνθετο κανόνα του Simpson

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9) + f(x_{11})\right]\right. \\ &\quad \left. +2\left[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_{10})\right] + f(x_{12})\right\} \\ &= 1.015\,973. \end{aligned}$$

Στον Πίνακα 7.2.2 - 1 δίνονται οι τιμές $(x_i, f(x_i))$ των παραπάνω υπολογισμών, ενώ στον Πίνακα 7.2.2 - 2 οι τιμές των σφαλμάτων του ολοκληρώματος I για διάφορες τιμές του h.

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.2.2 - 2 προκύπτει ότι ο σύνθετος κανόνας του Simpson για τιμές του h με $h \leq 0.001$, οπότε το n είναι αρκετά μεγάλο, δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα από τον αντίστοιχο του τραπεζίου, ενώ, όταν $h = 0.0001$, οπότε έχουμε μεγαλύτερη αύξηση του n, ακριβέστερα αποτελέσματα προκύπτουν από τον κανόνα του τραπεζίου. Θεωρητικά είναι

Πίνακας 7.2.2 - 2: Παράδειγμα 7.2.2 - 1: τα σφάλματα της ολοκλήρωσης του I για τις διάφορες τιμές του h

h	Σφάλμα τραπεζίου	Σφάλμα Simpson
0.1000	2.62E-04	9.06E-09
0.0500	6.55E-05	1.39E-09
0.0100	2.62E-06	7.69E-10
0.0010	2.55E-08	7.68E-10
0.0001	5.06E-10	7.68E-10

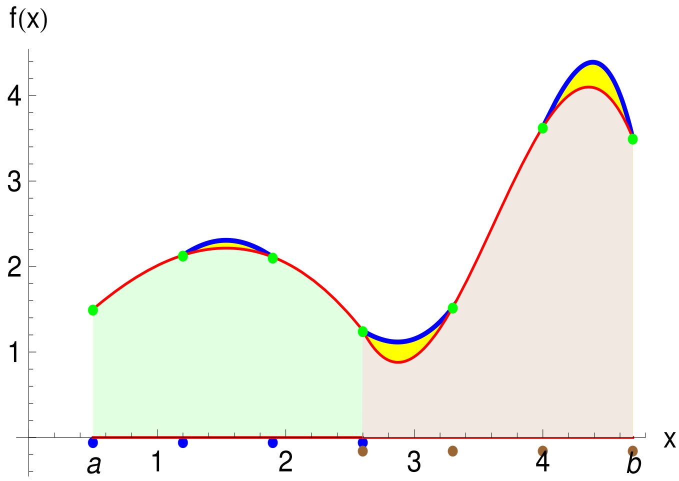
αναμενόμενο, όταν η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν ή διαφορετικά όταν το h τείνει στο μηδέν, η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος να τείνει στη θεωρητική τιμή του. Πολλές φορές όμως, όπως και παραπάνω, συμβαίνει το h να ελαττώνεται, χωρίς να έχουμε και αντίστοιχη μείωση του σφάλματος. Αυτό κύρια οφείλεται αφενός μεν στο σφάλμα που παρουσιάζει ο κανόνας ολοκλήρωσης που χρησιμοποιείται και αφετέρου στα σφάλματα στρογγυλοποίησης που υπεισέρχονται στους διάφορους υπολογισμούς.

7.2.3 Σύνθετος κανόνας των 3/8

Υποδιαιρώντας το διάστημα ολοκλήρωσης σε $3N$ το πλήθος υποδιαστήματα[6] πλάτους $h = (b-a)/3N$ από τα $3N+1$ σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_{3N}$. Τότε όμοια έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) &= \int\limits_{a=x_0}^{b=x_{3N}} f(x)\,dx \\ &= \int\limits_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx + \int\limits_{x_3}^{x_6} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{x_{3N-3}}^{x_{3N}} f(x)\,dx \end{aligned}$$

[6]Επειδή ο απλός κανόνας των 3/8 απαιτεί για την εφαρμογή του 4 σημεία, δηλαδή 3 υποδιαστήματα, η υποδιαίρεση του $[a,b]$ πρέπει να γίνει σε αριθμό υποδιαστημάτων, που να είναι πολλαπλάσιο του 3.



Σχήμα 7.2.3 - 1: σύνθετος κανόνας των 3/8 του Simpson. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

$$
\begin{aligned}
&\approx \frac{3h}{8}\{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\} \\
&+\frac{3h}{8}\{f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)\}+\dots \\
&+\frac{3h}{8}\{f(x_{3N-3})+3f(x_{3N-2})+3f(x_{3N-1})+f(x_{3N})\},
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
I(f) \approx\ & \frac{3h}{8}\{f(x_0)+3\left[f(x_1)+f(x_4)+\dots+f(x_{3N-2})\right] \\
&+3\left[f(x_2)+f(x_5)+\dots+f(x_{3N-1})\right] \\
&+2\left[f(x_3)+f(x_6)+\dots+f(x_{3N-3})\right] \\
&+f(x_{3N})\} \qquad (7.2.3 - 1)
\end{aligned}
$$

που είναι γνωστός σαν **σύνθετος κανόνας ολοκλήρωσης των 3/8 του Simpson** (composite 3/8 Simpson's rule).

Παράδειγμα 7.2.3 - 1

Έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα των 3/8 το ολοκλήρωμα I του Παραδείγματος 7.2.2 - 1. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(7.2.3-1)$, όταν $h=0.1$, έχουμε

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{3h}{8}\left\{f\left(x_0\right)+3\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_4\right)+f\left(x_7\right)+f\left(x_{10}\right)\right]\right. \\ &+3\left[f\left(x_2\right)+f\left(x_5\right)+f\left(x_8\right)+f\left(x_{11}\right)\right] \\ &\left.+2\left[f\left(x_3\right)+f\left(x_6\right)+f\left(x_9\right)\right]+f\left(x_{12}\right)\right\} \\ &= 1.015\,973. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Έστω ότι το διάστημα ολοκλήρωσης $[a,b]$ υποδιαιρείται σε N το πλήθος υποδιαστήματα πλάτους (Σχ. 7.2.3 - 2)

$$h=\frac{b-a}{N} \quad \text{από τα} \quad N+1 \quad \text{σημεία } x_i=a+ih;\ i=0,1,\ldots,N.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο $(7.1.1-6)$ του απλού κανόνα του μέσου σημείου σε κάθε ένα υποδιάστημα, υπολογίστε τον αντίστοιχο τύπο του σύνθετου κανόνα. Στη συνέχεια εφαρμόστε τον τύπο αυτό στον υπολογισμό του ολοκληρώματος του Παραδείγματος 7.2.2 - 1 και συγκρίνατε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα των άλλων μεθόδων.

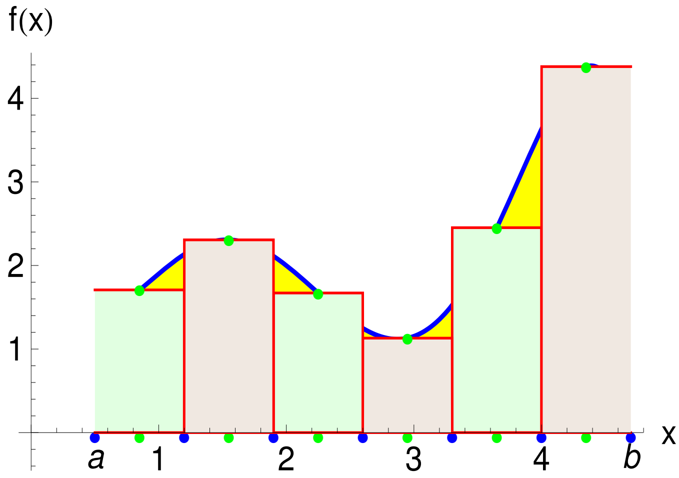
2. Να υπολογιστεί με τους παραπάνω σύνθετους κανόνες το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{1.2} e^{-x^2}\,dx, \quad \text{όταν} \quad h=0.1$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή $I=0.806\,745$.

3. Είναι γνωστό ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}\,.$$



Σχήμα 7.2.3 - 2: σύνθετος κανόνας του μέσου σημείου. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson όταν το $h = 0.1,\ 0.01$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή.

4. Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx,$$

όταν $h = 0.1$ και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή του ολοκληρώματος.

5. Όμοια με το σύνθετο κανόνα του Simpson και των $3/8$ το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6} \left(1 - x^2\right)^{3/2}\, dx,$$

όταν $h = 0.1,\ 0.05$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή του ολοκληρώματος $(0.439\,919)$.
[7]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Bratsos, A. G., The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines, J. Comput. Appl. Math., vol. 206 No. 1 (2006), pp. 251–277.

[6] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[7] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[8] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[9] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[10] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[11] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[12] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[13] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων