Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 6: Διπλά Ολοκληρώματα

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Πολιτικών Μηχ.ΤΕ και Μηχ. Τοπογραφίας & Γεωπληροφορικής ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 6

ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.1 Εισαγωγή και ορισμός

6.1.1 Εισαγωγή

Για την καλύτερη κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, δηλαδή του **διπλού ολοκληρώματος**, κρίνεται απαραίτητο αρχικά να γίνει περιληπτικά[1] μια αναφορά στον αντίστοιχο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της συνάρτησης, έστω $f(x) \,|\, [a,\, b]$, δηλαδή του

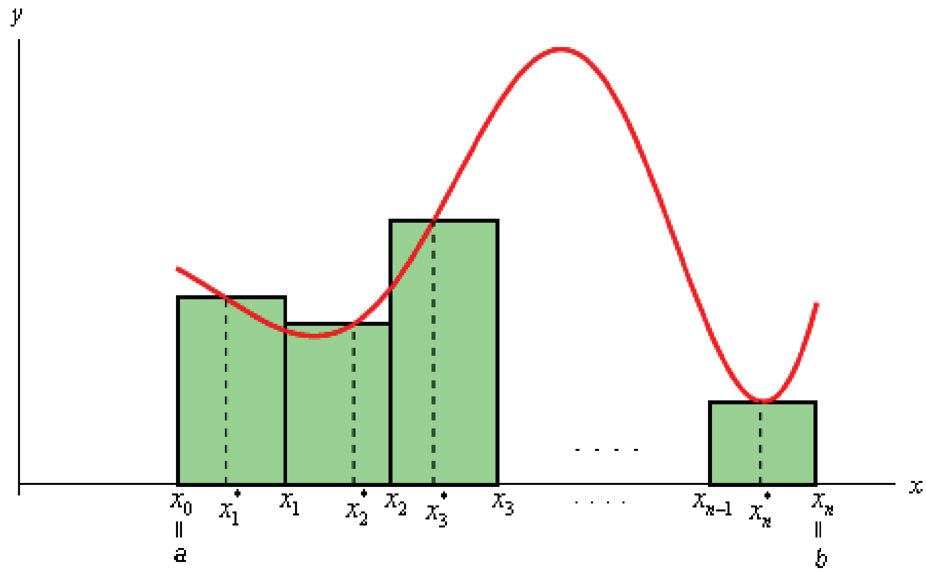
$$I(f) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx. \qquad (6.1.1 - 1)$$

[2] Στην περίπτωση αυτή υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και για ευκολία ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, όπως είναι ήδη γνωστό, γεωμετρικά ο αριθμός $I(f)$ ισούται με το εμβαδόν E του καμπυλόγραμμου τραπεζίου, που ορίζεται από τον x-άξονα, το διάγραμμα της συνάρτησης $y = f(x)$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ (Σχ. 6.1.1 - 1).

Για την προσέγγιση του E το $[a, b]$ υποδιαιρείται σε διαστήματα πλάτους

[1] Ο αναγνώστης για μια πλήρη ανάπτυξη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.

[2] Βλέπε *https://eclass.teiath.gr/courses/MDP102/* Έγγραφα → Παραδόσεις Μαθημάτων (Μάθημα 13).



Σχήμα 6.1.1 - 1: γεωμετρικός υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος $(6.1.1 - 1)$

Δx ως εξής:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

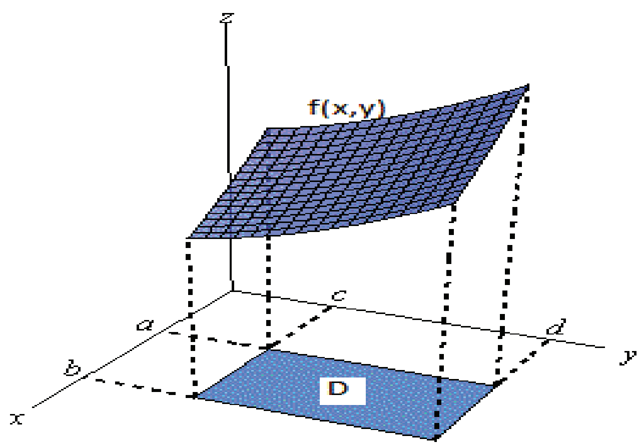
και στη συνέχεια θεωρείται το παρακάτω άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων ορθογωνίων

$$f\left(x_1^*\right) \Delta x + f\left(x_2^*\right) \Delta x + \ldots + f\left(x_n^*\right) \Delta x,$$

όταν x_i^* μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων και $f\left(x_i^*\right)$; $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ τα ύψη. Τότε το εμβαδόν E, δηλαδή το ορισμένο ολοκλήρωμα $(6.1.1 - 1)$, ισούται με την οριακή

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)\, dx \qquad (6.1.1 \text{ - } 2) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left[f\left(x_1^*\right) \Delta x + f\left(x_2^*\right) \Delta x + \ldots + f\left(x_n^*\right) \Delta x \right], \end{aligned}$$

εφόσον υπάρχει.



Σχήμα 6.1.2 - 1: το πεδίο ορισμού $D = [a, b] \times [c, d\,]$ και η επιφάνεια $f(x, y)$

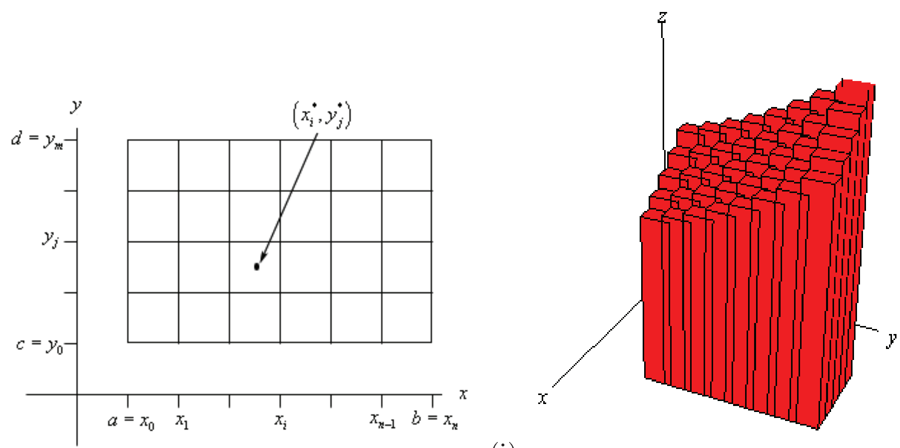
6.1.2 Ορισμός

Γενικεύοντας τα παραπάνω, έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού το $D = [a,\, b] \times [c,\, d\,] \subseteq \Re^2$, που είναι συνεχής και για ευκολία μη αρνητική για κάθε $(x, y) \in [a, b] \times [c, d\,]$ (Σχ. 6.1.2 - 1). Όπως και στην περίπτωση του ορισμένου ολοκληρώματος $(6.1.1 - 1)$, το διάστημα $[a, b]$ υποδιαιρείται σε n-υποδιαστήματα πλάτους Δx από τα σημεία x_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ και το διάστημα $[c, d\,]$ σε m-υποδιαστήματα πλάτους Δy από τα σημεία y_j; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, m$ (Σχ. 6.1.2 - 2 i).

Τότε χρησιμοποιώντας αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία με εκείνη του ολοκληρώματος $(6.1.1 - 1)$, το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy \qquad (6.1.2 - 1)$$

θα ισούται με τον όγκο V του στερεού, που έχει βάσεις το $[a, b] \times [c, d\,]$ και την επιφάνεια S, ενώ οι ακμές του είναι παράλληλες προς τον z-άξονα. Έστω $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$ το εμβαδόν του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλογράμμου της παραπάνω διαμέρισης του $[a, b] \times [c, d\,]$ και $f\left(x_i^*, y_j^*\right)$ το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που προκύπτει από τα ενδιάμεσα σημεία (x_i^*, y_i^*) και αντιστοιχεί στα επί μέρους ορθογώνια (Σχ. 6.1.2 - 2 ii). Τότε ο όγκος V (Σχ. 6.1.2 - 2



(i) (ii)

Σχήμα 6.1.2 - 2: (α) Η διαμέριση του $[a,b]\times[c,d]$ και τα ενδιάμεσα σημεία (x_i^*, y_i^*). (b) Τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που προσεγγίζουν τον όγκο V στην $(6.1.2-2)$

ii) προσεγγίζεται ως εξής:

$$V \approx f\left(x_1^*, y_1^*\right)\Delta A + f\left(x_2^*, y_1^*\right)\Delta A + \ldots + f\left(x_n^*, y_m^*\right)\Delta A. \qquad (6.1.2 - 2)$$

Παρατήρηση 6.1.2 - 1

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι, όταν η διαγώνιος των παραπάνω ορθογωνίων τείνει στο μηδέν καθώς τα $n,\, m\to +\infty$, το άθροισμα $(6.1.2-2)$ συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω I, που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων (x_i, y_j).

Σύμφωνα τώρα και με την παρατήρηση αυτή έχουμε τον παρακάτω ορισμό.[3]

Ορισμός 6.1.2 - 1 (διπλού ολοκληρώματος). *Ορίζεται σαν διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ στο $D=[a,b]\times[c,d]$ η οριακή τιμή*

$$I = \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n,\,m\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i^*, y_j^*\right)\Delta A, \qquad (6.1.2 - 3)$$

εφόσον υπάρχει.

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε φραγμένο πεδίο ορισμού D της f.

[3] Βλέπε επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Double_integral*

6.2 Ιδιότητες και μέθοδοι υπολογισμού

6.2.1 Ιδιότητες

Αποδεικνύονται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

I. **Γραμμική**

$$\int\int_D [k\, f(x,y) + \lambda\, g(x,y)]\, dx\, dy \;=\; k \int\int_D f(x,y)\, dx\, dy + \lambda \int\int_D g(x,y)\, dx\, dy,$$

όταν $k,\ \lambda \in \Re$. Η ιδιότητα γενικεύεται.

II. **Μέσης τιμής**

$$\int\int_D f(x,y)\, dx\, dy = f\,(x_0, y_0)\ A$$

όπου A το εμβαδόν του τόπου και $(x_0, y_0) \in D$.

III. Αν η περιοχή D αποτελείται από τις χωριστές περιοχές D_1 και D_2, δηλαδή $D = D_1 \cup D_2$, τότε

$$\int\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int\int_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \int\int_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Εφαρμογή της ιδιότητας θα γίνει στο Παράδειγμα 6.2.2 - 11.

6.2.2 Υπολογισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $(6.1.2-1)$ εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου ορισμού D. Συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I. $\quad D = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d\}$

δηλαδή και οι δύο μεταβλητές μεταβάλλονται σε διαστήματα με σταθερά άκρα.

Ο υπολογισμός στην περίπτωση αυτή γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.2.2 - 1 (Fubini). *Αν η συνάρτηση* $f(x,y)\,|\,D$ *με* $D=[a,\,b]\times[c,\,d]\subseteq\Re^2$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* D, *τότε*

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} f\,(x,y)\;dx\,dy &= \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f\,(x,y)\;dy\right] dx \\ &= \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f\,(x,y)\;dx\right] dy. \qquad (6.2.2\text{ - }1)\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 6.2.2 - 1

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα $(6.2.2-1)$ η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $(6.1.2-1)$ είναι ανεξάρτητη από τη σειρά ολοκλήρωσης στην $(6.2.2-1)$.

ii) Στον τύπο $(6.2.2-1)$, όταν γίνεται ολοκλήρωση ως προς μια μεταβλητή, έστω την y, τότε η x θεωρείται **σταθερά**.

Παράδειγμα 6.2.2 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\iint\limits_{D}\left(x^2y+y^3\right)\,dx\,dy,\quad \text{όταν}\quad D=[0,1]\times[0,2].$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(6.2.2-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1\left[\int\limits_0^2\left(x^2y+y^3\right)dy\right]dx=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}\,x^2\,y^2+\frac{1}{4}\,y^4\right]_{y=0}^{y=2}dx \\ &= \int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\,x^2\,2^2+\frac{1}{4}\,2^4-0\right)\,dx=\int\limits_0^1\left(2\,x^2+4\right)\,dx \\ &= \left[2\,\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^1=\frac{14}{3}\,. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά ο παραπάνω υπολογισμός είναι δυνατόν να γίνει αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left[\int_0^1 \left(x^2 y + y^3 \right) dx \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}\, x^3\, y + \frac{1}{2}\, x\, y^3 \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}\, y + y^3 - 0 \right) dy = \left[\frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = \frac{14}{3}\,. \end{aligned}$$

■

Στο εξής θα εφαρμόζεται ο ευκολότερος κατά περίπτωση τύπος στην (6.2.2–1).

Παράδειγμα 6.2.2 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int_D x\, e^{xy}\, dx\, dy, \quad \text{όταν} \quad D = [-1, 2] \times [0, 1].$$

Λύση. Έχουμε

$$I = \int_{-1}^2 \left[\int_0^1 x\, e^{xy}\, dy \right] dx = \int_{-1}^2 \left[\int_0^1 \overbrace{(x\, y)_y}^{x = (x\, y)_y}\ e^{xy}\, dy \right] dx$$

επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς y πρέπει να

δημιουργηθεί η παράγωγος $(xy)_y$ της e^{xy},

$\left(\text{μορφή } f'(x) e^{f(x)}\right)$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^2 \left[\int_0^1 (x\, y)_y\, e^{xy}\, dy \right] dx = \int_{-1}^2 e^{xy} \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^2 \left(e^x - 1 \right) dx = \left[e^x - x \right]_{-1}^{2} = e^2 - e^{-1} - 3. \end{aligned}$$

Αν η ολοκλήρωση γίνει πρώτα ως προς x, τότε απαιτείται για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος παραγοντική ολοκλήρωση. ■

Παράδειγμα 6.2.2 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I=\iint\limits_{D}\frac{dx\,dy}{(2x+3y)^2}\,,\quad \text{όταν}\quad D=[0,1]\times[1,2].$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2\left[\int_0^1 (2x+3y)^{-2}dx\right]dy \\
&= \int_1^2\left[\int_0^1 \frac{1}{2}\,(2x+3y)_x\,(2x+3y)^{-2}\,dx\right]dy
\end{aligned}$$

όμοια επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x πρέπει να

δημιουργηθεί η παράγωγος $(2x+3y)_x$ της $(2x+3y)^{-2}$,

(μορφή $f'(x)\,f^a(x)$)

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2\left[\frac{1}{2}\,\frac{(2x+3y)^{-2+1}}{-2+1}\,dx\right]dy=\int_1^2\left[-\frac{1}{2}\,(2x+3y)^{-1}\right]_{x=0}^{x=1}dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dy}{2+3y}-\left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^2\frac{dy}{3y} \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^2\overbrace{\frac{dy}{2+3y}}^{\frac{1}{3}\ln|2+3y|}+\frac{1}{6}\int_1^2\overbrace{\frac{dy}{y}}^{\ln|y|} \\
&= -\frac{1}{6}\left(\ln 8-\ln 2-\ln 5\right).
\end{aligned}$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα[4]

i)

$$\int\int_D xy(x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad (x,y)\in D \quad \text{και} \quad D=[0,1]\times[0,1],$$

ii)

$$\int\int_D \cos(x+y)\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D=[0,\pi]\times[0,\pi],$$

iii)

$$\int\int_D \sin^2 x\cos y\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D=[0,\pi/2]\times[0,\pi],$$

iv)

$$\int\int_D \frac{x\,dx\,dy}{x+y}, \quad \text{όταν} \quad D=[-1,1]\times[-1,1],$$

v)

$$\int\int_D \frac{dx\,dy}{4+y^2}, \quad \text{όταν} \quad D=[-1,1]\times[0,\pi],$$

vi)

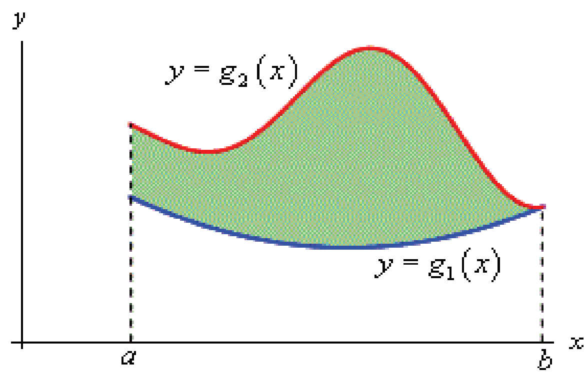
$$\int\int_D y^{-3}\,e^{x/y}\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D=[0,1]\times[1,2],$$

vii)

$$\int\int_D xy\,e^{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D=[0,1]\times[0,1].$$

[4] $i)\quad \frac{1}{4},\quad ii)\quad -4,\quad iii)\quad 0,\quad iv)\quad 1,\quad v)\quad \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad vi)\quad -\frac{1}{2}-\sqrt{e}+e,$ $vii)\quad \frac{1}{4}(-1+e)^2.$

II



Σχήμα 6.2.2 - 1: το πεδίο ορισμού $D = \{a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ της συνάρτησης $f(x, y)$

II. $D = \left\{(x, y) \in \Re^2 : \quad a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \right\}$

Τότε (Σχ. 6.2.2 - 1)

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx, \qquad (6.2.2 - 2)$$

δηλαδή γίνεται **πρώτα** η ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή y, που μεταβάλλεται συναρτήσει της x.

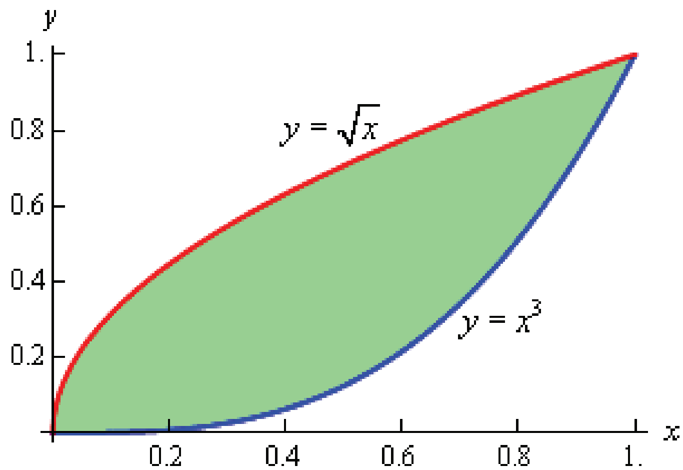
Παράδειγμα 6.2.2 - 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int_D \left(4xy - y^3\right) dx\, dy, \quad \text{όταν}$$

$$D = \left\{(x, y) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad x^3 \leq y \leq \sqrt{x} \right\} \quad (\Sigma\chi.\ 6.2.2 - 2).$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(6.2.2 - 2)$ έχουμε



Σχήμα 6.2.2 - 2: Παράδειγμα 6.2.2 - 6 με πεδίο ορισμού $D = \{\, 0 \le x \le 1, \quad x^3 \le y \le \sqrt{x}\,\}$

$$I = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} \left(4xy - y^3\right)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7}{4}\, x^2 - 2\, x^7 + \frac{1}{4}\, x^{12} \right) dx = \left[\frac{7}{12}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^8 + \frac{1}{52}\, x^{13} \right]_0^1 = \frac{55}{156}\,.$$

■

Παράδειγμα 6.2.2 - 5

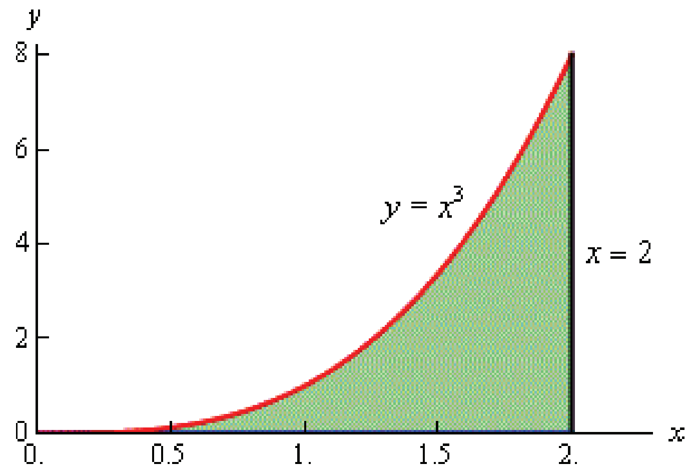
Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \sqrt{1 + x^4}\, dx\, dy, \quad \text{όταν}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \Re^2 \,:\, 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x^3 \right\} \quad (\Sigma\chi.\ 6.2.2 - 3).$$

Λύση. Έχουμε

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{x^3} \sqrt{1 + x^4}\, dy \right] dx = \int_0^2 \sqrt{1 + x^4} \left[\int_0^{x^3} dy \right] dx$$



Σχήμα 6.2.2 - 3: Παράδειγμα 6.2.2 - 5 με πεδίο ορισμού $D = \{\, 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x^3 \,\}$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\, [\, y\,]_{y=0}^{y=x^3}\, dx = \int_0^2 x^3\, \sqrt{1+x^4}\, dx$$

$$= \int_0^2 \overbrace{\frac{1}{4}\left(1+x^4\right)_x}^{x^3} \left(1+x^4\right)^{1/2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{6}\left(1+x^4\right)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(17^{3/2}-1\right) \approx 11.51547.$$

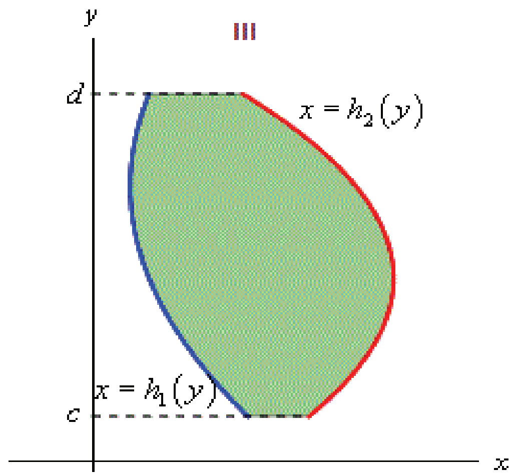
■

III. $D = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad c \le y \le d, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)\,\}$

Τότε (Σχ. 6.2.2 - 4)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy, \qquad (6.2.2 - 3)$$

δηλαδή γίνεται **πρώτα** η ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή x, που μεταβάλλεται συναρτήσει της y.



Σχήμα 6.2.2 - 4: το πεδίο ορισμού $D = \{c \leq x \leq d, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$ της συνάρτησης $f(x, y)$

Παράδειγμα 6.2.2 - 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy, \quad \text{όταν} \quad D = \left\{(x, y) \in \Re^2 \,:\, 1 \leq y \leq 2, \quad y \leq x \leq y^3\right\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(6.2.2 - 3)$ έχουμε

$$I = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}}\, dx\right] dy = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} y \left(\frac{x}{y}\right)_x e^{\frac{x}{y}}\, dx\right] dy$$

πρέπει να δημιουργηθεί η παράγωγος $\left(\dfrac{x}{y}\right)_x$ της $e^{\frac{x}{y}}$

$$= \int_1^2 \left[y\, e^{\frac{x}{y}}\right]_{x=y}^{x=y^3} dy = \int_1^2 \left(y\, e^{y^2} - y\, e^1\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{e}{2} y^2\right]_1^2 = \frac{1}{2} e^4 - 2\, e.$$

■

IV. Γενική περίπτωση: φραγμένη περιοχή του $\Re^2$

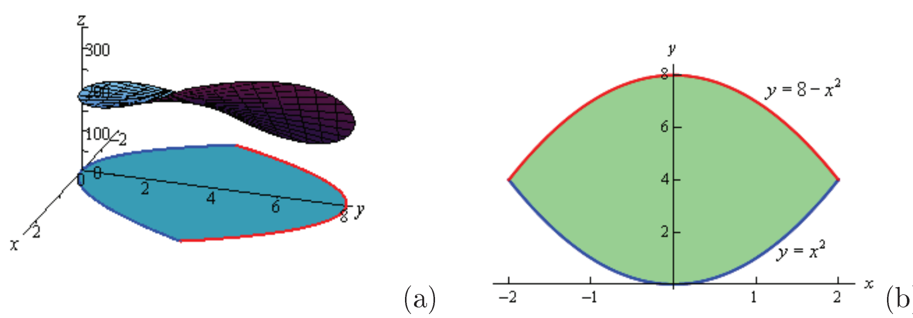
Έστω D το πεδίο ορισμού. Τότε γίνεται κατάλληλη διαμέριση του D, έτσι ώστε να προκύψει τελικά μια από τις Περιπτώσεις II ή III.

Παράδειγμα 6.2.2 - 7

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_{D} (16xy + 200)\, dx\, dy,$$

όταν D η περιοχή που περιορίζεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = 8 - x^2$ (Σχ. 6.2.2 - 5).



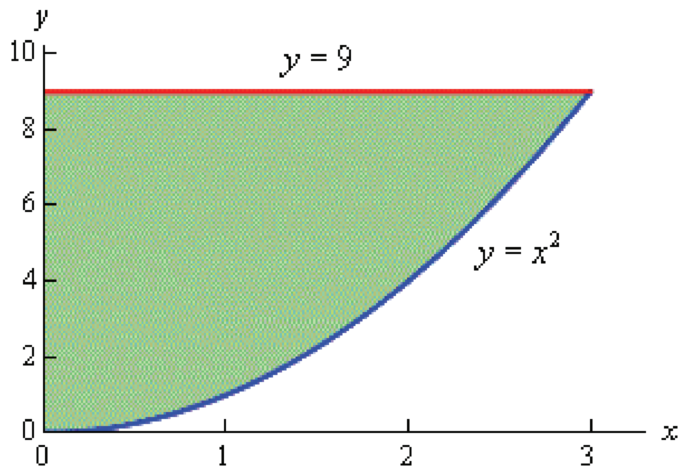
Σχήμα 6.2.2 - 5: Παράδειγμα 6.2.2 - 7.

Λύση. Από τις εξισώσεις των καμπυλών προκύπτει $x^2 = 8 - x^2$, οπότε $x = \pm 2$. Επειδή το x πρέπει να ανήκει σε φραγμένο διάστημα, προκύπτει ότι $-2 \le x \le 2$. Τότε $x^2 \le 8 - x^2$, οπότε το πεδίο ορισμού D γράφεται ως εξής:

$$D = \left\{ (x, y) \in \Re^2 : \ -2 \le x \le 2, \quad x^2 \le y \le 8 - x^2 \right\} \quad (\Sigma\chi.\ 6.2.2 - 5\text{b}),$$

δηλαδή είναι η Περίπτωση II. Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-2}^{2} \left[\int\limits_{x^2}^{8-x^2} (16xy + 200)\ dy \right] dx = \int\limits_{-2}^{2} \left[8\,x\,y^2 + 200\,y \right]_{y=x^2}^{y=8-x^2} dx \\ &= \int\limits_{-2}^{2} \left(-128\,x^3 - 400\,x^2 + 512\,x + 1600 \right) dx \end{aligned}$$



Σχήμα 6.2.2 - 6: Παράδειγμα 6.2.2 - 8

$$= \left[-32\,x^4 - \frac{400}{3}\,x^3 + 256\,x^2 + 1600\,x\right]_{-2}^{2} = \frac{12800}{3}\,.$$

■

Παράδειγμα 6.2.2 - 8

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D x^2\, y\, dx\, dy,$$

όταν D η περιοχή που περιορίζεται από τις καμπύλες $y = 9$ και $y = x^2$ με $x \geq 0$.

Λύση. Από τις εξισώσεις των καμπυλών προκύπτει $x^2 = 9$, οπότε, επειδή $x \geq 0$, είναι $x = 3$. Άρα το πεδίο ορισμού D γράφεται:

$$D = \left\{(x, y) \in \Re^2 \,:\, 0 \leq x \leq 3, \quad x^2 \leq y \leq 9\right\} \quad (\Sigma\chi.\ 6.2.2 - 6),$$

δηλαδή είναι όμοια η Περίπτωση ΙΙ. Τότε έχουμε

$$I = \int_0^3 \left[\int_{x^2}^{9} x^2 y\, dy\right] dx = \int_0^3 \left.\frac{x^2 y^2}{2}\right|_{y=x^2}^{y=9} dx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{81\,x^2}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \frac{27\,x^3}{2} - \frac{x^7}{14} \Bigg|_0^3 = \frac{1458}{7}\,.$$

■

Παράδειγμα 6.2.2 - 9

Όμοια το

$$I = \int\!\!\int_D \left(x^2 + y^3 \right) dx\, dy, \quad \text{όταν } D = \left\{ (x,\, y) \in \Re^2 \,:\, y^2 \le 9x,\; x \le 3 \right\}.$$

Λύση. Επειδή $y^2 \le 9x$, πρέπει $x \ge 0$. Είναι όμως γνωστό ότι, αν $x^2 \le a$ με $a > 0$, τότε $-\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}$, οπότε $-3\sqrt{x} \le y \le 3\sqrt{x}$. Άρα ο τόπος D γράφεται

$$D = \left\{ (x,\, y) \in \Re^2 \,: \quad 0 \le x \le 3, \quad -3\sqrt{x} \le y \le 3\sqrt{x} \right\},$$

δηλαδή η Περίπτωση ΙΙ. Τότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left[\int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \left(x^2 + y^3 \right) dy \right] dx = \int_0^3 \left[x^2 y + \frac{y^4}{4} \right]_{y=-3\sqrt{x}}^{y=3\sqrt{x}} dx \\ &= 6 \int_0^3 x^{5/2}\, dx = \frac{324\sqrt{3}}{7}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.2.2 - 10

Όμοια το

$$I = \int\!\!\int_D \left(x^4 + y^2 \right) dx\, dy, \quad \text{όταν } D = \left\{ (x,\, y) \in \Re^2 \,:\, y \ge x^2,\; x \ge y^2 \right\}.$$

Λύση. Αρχικά, επειδή

- $x \ge y^2$, πρέπει $x \ge 0$, και όμοια από την

- $y \geq x^2$, προκύπτει ότι $y \geq 0$.

Στη συνέχεια εκφράζονται τα όρια του x συναρτήσει του y ως εξής: από την $x^2 \leq y$ προκύπτει ότι $x \leq \sqrt{y}$, ενώ είναι $x \geq y^2$. Άρα

$$y^2 \leq x \leq \sqrt{y}.$$

Για το διάστημα μεταβολών του y από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$y^2 \leq \sqrt{y}, \quad \text{οπότε} \quad y^4 - y \leq 0, \quad \text{δηλαδή } y\left(y^3 - 1\right) \leq 0.$$

Επειδή $y \geq 0$, πρέπει $y \leq 1$, . Επομένως ο τόπος D γράφεται

$$D = \left\{(x,\, y) \in \Re^2 : \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\right\},$$

δηλαδή η Περίπτωση III. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(6.2.2 - 3)$ έχουμε

$$J = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(x^4 + y^2\right)\, dx\right] dy = \int_0^1 \left(\frac{6}{5}\, y^{5/2} - y^4 - \frac{1}{5}\, y^{10}\right) dy = \frac{48}{385}\,.$$

■

Παράδειγμα 6.2.2 - 11

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \left(6x^2 - 40y\right)\, dx\, dy,$$

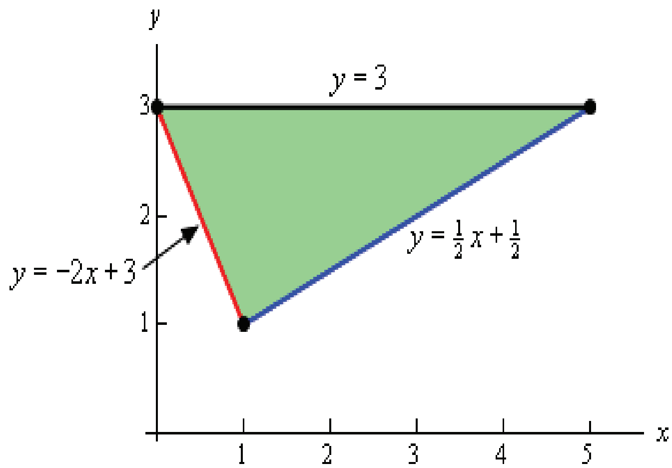
όταν D το τρίγωνο με κορυφές $(0,3)$, $(1,1)$ και $(5,3)$ (Σχ. 6.2.2 - 7).

Λύση. Η περιοχή ολοκλήρωσης D, είναι δυνατόν να προκύψει τις εξής δύο περιοχές:[5]

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\, (x,y) : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -2x + 3 \leq y \leq 3 \,\} \\ D_2 &= \left\{ (x,y) : \quad 1 \leq x \leq 5, \quad \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{2} \leq y \leq 3 \right\} \end{aligned}$$

[5] Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$



Σχήμα 6.2.2 - 7: Παράδειγμα 6.2.2 - 11

Τότε σύμφωνα με την Ιδιότητα III της Παραγράφου 6.2.1 έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1} \left(6x^2 - 40y\right)\, dx\, dy + \iint\limits_{D_2} \left(6x^2 - 40y\right)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \left[\int_{-2x+3}^{3} \left(6x^2 - 40y\right)\, dy\right] dx + \int_1^5 \left[\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{3} \left(6x^2 - 40y\right)\, dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[6x^2 y - 20\, y^2\right]_{y=-2x+3}^{y=3} dx + \int_0^1 \left[6x^2 y - 20\, y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{y=3} dx \\
&= \int_0^1 \left[12x^3 - 180 + 20\,(3-2x)^2\right] dx \\
&\quad + \int_1^5 \left[-3x^3 + 15x^2 - 180 + 5\,(x+1)^2\right] dx \\
&= \ldots = -\frac{935}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Ένας άλλος τρόπος είναι να εκφραστεί το x στις περιοχές D_1 και D_2 συναρτήσει του y ως εξής:

$$\begin{aligned} y &= -2x+3, \quad \text{οπότε} \quad & x &= -\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2} \\ y &= \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}, & x &= 2y-1. \end{aligned}$$

Άρα

$$D = \left\{ (x,y) : \quad -\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2} \leq x \leq 2y-1, \quad 1 \leq y \leq 3 \right\},$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \left[\int_{-\frac{1}{2}\,y+\frac{3}{2}}^{2y-1} \Big(6x^2 - 40y\Big)\, dx \right] dy \\ &= \int_1^3 \Big[2\,x^3 - 40\,x\,y \Big]_{x=-\frac{1}{2}\,y+\frac{3}{2}}^{x=2y-1} \, dy \\ &= \int_1^3 \left[100y - 100y^2 + 2(2y-1)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2}\right)^3 \right] dy \\ & \left[50y^2 - \frac{100}{3}\,y^3 + \frac{1}{4}(2y-1)^4 + \left(-\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2}\right)^4 \right]_1^3 \\ &= -\frac{935}{3}\,. \end{aligned}$$

■

6.2.3 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Πολλές φορές για την ευκολία υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\int\int_{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

απαιτείται να γίνει μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε άλλης μορφής συντεταγμένες. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων, οι γενικότερες δυνατές είναι οι καμπυλόγραμμες (curvilinear coordinates)[6], που ορίζονται στη συνέχεια.

Ορισμός 6.2.3 - 1 (καμπυλόγραμμες συντεταγμένες). *Ο μετασχηματισμός σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες έχει τη μορφή*

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad \text{όταν} \quad (x,y) \in D \subseteq \Re^2. \qquad (6.2.3 - 1)$$

Αν οι συναρτήσεις $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ ορίζονται για κάθε $(u,v) \in \tilde{D} \subseteq \Re^2$ και υπάρχουν οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι των x, y ως προς u και v και είναι συνεχείς συναρτήσεις, ενώ για την ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού $(6.2.3-1)$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \qquad (6.2.3 - 2)$$

είναι $J(u,v) > 0$ ή $J(u,v) < 0$, τότε ο μετασχηματισμός του τόπου D μέσω των σχέσεων $(6.2.3-1)$ στον τόπο $\tilde{D}$ είναι αμφιμονοσήμαντος και εφόσον το ολοκλήρωμα $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ υπάρχει, θα ισχύει

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{\tilde{D}} F(u,v)\ |J(u,v)|\ du\,dv. \qquad (6.2.3 - 3)$$

[6]Βλέπε: *http://en.wikipedia.org/wiki/Curvilinear_coordinates*

Σημείωση 6.2.3 - 1

Είναι ήδη γνωστή στον αναγνώστη η μέθοδος της αντικατάστασης για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $\int f(x)\,dx$. Τότε, αν $u = g(x)$, πρέπει να γίνει αντικατάσταση της u στην f αφενός και αφετέρου αντικατάσταση του dx με το du, όπως αυτό εξηγείται παρακάτω στον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int e^{3x} dx$. Τότε, έστω

$$3x = u \text{ ή } \quad x = \frac{u}{3}, \quad \text{οπότε} \quad dx = \left(\frac{u}{3}\right)' du = \frac{1}{3}\,du = J(u)\,du. \qquad (1)$$

Άρα

$$\int e^{3x} dx = \int f(x)\,dx = \int e^{u}\,\frac{1}{3}\,du = \int F(u)\,J(u)\,du = \ldots = \frac{1}{3}\,e^{3x} + c. \quad (2)$$

Τότε η $(6.2.3-2)$ είναι η αντίστοιχη της $J(u)$ στην (1) και η $(6.2.3-3)$ της $\int F(u)\,J(u)\,du$ στην (2).

Οι κυριότεροι καμπυλόγραμμοι μετασχηματισμοί, που συνήθως χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές, δίνονται στη συνέχεια.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός 6.2.3 - 2 (γραμμικός μετασχηματισμός). *Ένας γραμμικός μετασχηματισμός (linear transformation) έχει γενικά τη μορφή*

$$\mathrm{L_T}: \quad x = au + bv \quad \text{και} \quad y = cu + dv, \qquad (6.2.3 - 4)$$

όταν $a,\, b,\, c,\, d \in \Re$.

Σύμφωνα με την $(6.2.3-2)$ τότε είναι

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc. \qquad (6.2.3 - 5)$$

Αν $ad - bc \neq 0$, τότε η $(6.2.3-4)$ αντιστρέφεται, οπότε

$$\int\!\!\int_{D} f(x,\,y)\,dx\,dy = |ad-bc| \int\!\!\int_{\tilde{D}} F(u,v)\,du\,dv. \qquad (6.2.3 - 6)$$

Ο μετασχηματισμός $(6.2.3-4)$ ανήκει στην κατηγορία των λεγόμενων **ομογραφικών μετασχηματισμών** (endomorphism ή homomorphism), δηλαδή έχει την ιδιότητα να διατηρεί τα σχήματα, δηλαδή μετασχηματίζει ευθείες σε ευθείες, κ.λπ.

Παράδειγμα 6.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy,$$

όταν D το τρίγωνο με πλευρές τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x+y-2=0$.

Λύση. Έστω

$$u=y-x \quad \text{και} \quad v=y+x.$$

Λύνοντας ως προς x και y προκύπτει ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός (6.2.3–4) για την περίπτωση αυτή είναι

$$\mathrm{L_T}: \quad x=\frac{v-u}{2} \quad \text{και} \quad y=\frac{v+u}{2}.$$

Τότε σύμφωνα με την $(6.2.3-2)$ είναι

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου από τις συντεταγμένες x, y στις u, v ως εξής:

$$\begin{array}{lllcll}
\text{ευθεία} & x=0 & \mathrm{L_T}: & \begin{array}{rcl} u &=& y \\ v &=& y \end{array} & \text{οπότε} \quad u=v & \text{ευθεία} \quad v-u=0 \\
 & y=0 & & \begin{array}{rcl} u &=& -x \\ v &=& x \end{array} & u=-v & v+u=0 \\
 & x+y=2 & & & v=2 & v-2=0.
\end{array}$$

Άρα από τον τύπο $(6.2.3-6)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \left|-\frac{1}{2}\right| \int\limits_{0}^{2} \left[\int\limits_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du \right] dv = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2} \left[\int\limits_{-v}^{v} v \left(\frac{u}{v}\right)_u e^{\frac{u}{v}}\, du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2} v \left[e^{\frac{u}{v}} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \int\limits_{0}^{2} v\, dv \\ &= e - \frac{1}{e}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.2.3 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \int\limits_{D} (x+y)\, dx\, dy,$$

όταν D το τρίγωνο του Σχ. 6.2.3 - 1. Να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός

$$\mathrm{L_T}: \quad x = 2u + 3v \quad \text{και} \quad y = 2u - 3v.$$

Λύση. Αρχικά σύμφωνα με την $(6.2.3-2)$ είναι

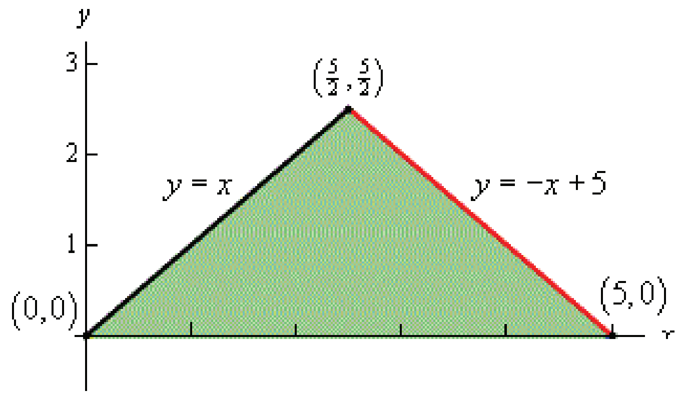
$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου από τις συντεταγμένες x, y στις u, v ως εξής:

$$\begin{array}{llll} \text{ευθεία} \quad x = 0 & \mathrm{L_T}: \ 2u + 3v = 0 & \text{ευθεία} & v = -\dfrac{2}{3}u \\ y = x & 2u - 3v = 2u + 3v & & v = 0 \\ y = -x + 5 & 2u - 3v = -(2u+3v) + 5 & & u = \dfrac{5}{4}. \end{array}$$

Άρα από τον τύπο $(6.2.3-6)$ έχουμε

$$I = |-12| \int\limits_{0}^{5/4} \left[\int\limits_{-2u/3}^{0} 48\, u\, dv \right] du = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2} \left[\int\limits_{-v}^{v} v \left(\frac{u}{v}\right)_u e^{\frac{u}{v}}\, du \right] dv$$



Σχήμα 6.2.3 - 1: Παράδειγμα 6.2.3 - 2

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 v\,\left[e^{\frac{u}{v}}\right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\int_0^2 v\,dv = \frac{125}{8}.$$

■

Πολικές συντεταγμένες

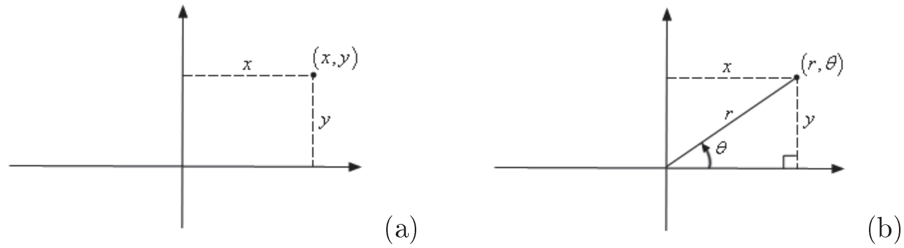
Όπως είναι γνωστό οι πολικές (Σχ. 6.2.3 - 2b) συντεταγμένες (r,θ) συνδέονται με τις καρτεσιανές (Σχ. 6.2.3 - 2a) συντεταγμένες (x,y) με τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta, \qquad \text{όταν } r \geq 0 \text{ και } 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (6.2.3 - 7)$$

Ο μετασχηματισμός $(6.2.3-7)$ είναι αμφιμονοσήμαντος με την έννοια ότι σε κάθε σημείο $(x,\,y) \in \Re^2 - \{(0,\,0)\}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο $(r,\,\theta) \in [0,\,+\infty)\times[0,\,2\pi)$ και αντίστροφα, ενώ για την ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού είναι

$$J(r,\,\theta) = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0.$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(6.2.3-3)$ το ολοκλήρωμα $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ στην



Σχήμα 6.2.3 - 2: (α) Καρτεσιανές και (b) πολικές συντεταγμένες

περίπτωση αυτή γράφεται

$$\int\int_{D} f(x,\, y)\, dx\, dy = \int\int_{\tilde{D}} F(r,\, \theta)\, r\, dr\, d\theta. \qquad (6.2.3 - 8)$$

Παράδειγμα 6.2.3 - 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int_{D} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r = 1$.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες σύμφωνα με τις σχέσεις $(6.2.3 - 7)$ έχουμε

$$f(x,\, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2} = F(r,\, \theta),$$

ενώ είναι $r \in [0, 1]$ και επειδή πρόκειται για το άνω ημικύκλιο $\theta \in [0, \pi]$. Άρα σύμφωνα με την $(6.2.3 - 8)$ είναι

$$I = \int_{0}^{\pi} \left[\int_{0}^{1} r\, \sqrt{1 - r^2}\, dr \right] d\theta = -\frac{1}{3} \int_{0}^{\pi} \left(1 - r^2\right)^{3/2} \Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{3} \int_{0}^{\pi} d\theta = \frac{\pi}{3}\,.$$

■

Παράδειγμα 6.2.3 - 4

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int_D 2xy\,dx\,dy,$$

όταν ο τόπος D είναι ο κυκλικός τομέας του 1ου τεταρτημορίου μεταξύ των κύκλων κέντρου $(0,0)$ και ακτίνων 2 και 5 αντίστοιχα.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$f(x,\,y) = 2\,x\,y = 2\,r^2\sin\theta\cos\theta = r^2\sin 2\theta = F(r,\,\theta)$$

όπου $r \in [2,5]$ και επειδή πρόκειται για το 1ο τεταρτημόριο είναι $\theta \in [0,\pi/2]$. Άρα σύμφωνα με την $(6.2.3-8)$ είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2}\left[\int_2^5 r\left(r^2\sin 2\theta\right)\,dr\right]\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,\left[\frac{1}{4}\,r^4\right]_{r=2}^{r=5}\,d\theta \\ &= \frac{609}{4}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta = -\frac{609}{4}\,\frac{1}{2}\,\cos 2\theta\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{609}{4}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.2.3 - 5

Όμοια το

$$I = \int\int_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

όταν ο τόπος D είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$f(x,y) = e^{r^2} = F(r,\,\theta)$$

όπου $r \in [0,1]$ και $\theta \in [0,2\,\pi]$. Άρα σύμφωνα με την $(6.2.3-8)$ είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\,\pi}\left[\int_0^1 r\,e^{r^2}\,dr\right]\,d\theta = \int_0^{2\,\pi}\left[\frac{1}{2}\left(r^2\right)_r\,e^{r^2}\,dr\right]\,d\theta \\ &= \int_0^{2\,\pi}\frac{1}{2}\,\left[e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1}\,d\theta = \frac{1}{2}\,(e-1)\int_0^{2\,\pi}d\theta = \pi\,(e-1)\,. \end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_D xy\,dx\,dy$, όταν ο τόπος D είναι

i) το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ και $C(0,1)$,

ii) το τρίγωνο με κορυφές $O(0,0)$, $A(2,0)$ και $B(2,2)$,

iii) ο κυκλικός τομέας με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και άκρα τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ του κύκλου $x^2+y^2=4$.

2. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_D xy\,dx\,dy$, όταν D ο τόπος που ορίζεται από τον άξονα των x και το άνω μέρος του κύκλου $(x-1)^2+y^2=4$.

3. Μία λεπτή πλάκα ορίζεται από την παραβολή $y=2x-x^2$ και τον άξονα των x. Να προσδιοριστεί η ολική μάζα της και οι συντεταγμένες $(\overline{x},\overline{y})$ του κέντρου βάρους της μάζας, όταν η πυκνότητα σε κάθε σημείο της (x,y) είναι $(1-y)/(1+x)$.

6.3 Εφαρμογές των διπλών ολοκληρωμάτων

6.3.1 Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων σχημάτων

Το εμβαδόν A ενός επιπέδου σχήματος D δίνεται από τον τύπο

$$A=\int\int_D dx\,dy. \tag{6.3.1 - 1}$$

Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) Το D να ορίζεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις $a\le x\le b$ και $\phi(x)\le y\le\psi(x)$. Τότε

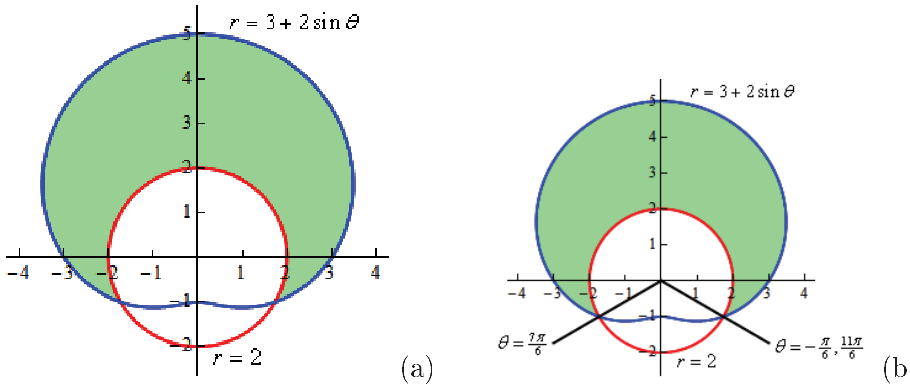
$$A=\int_a^b\left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy\right]dx. \tag{6.3.1 - 2}$$

ii) Σε πολικές συντεταγμένες από τις σχέσεις $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ και $r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$. Τότε

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,dr\right]d\theta. \tag{6.3.1 - 3}$$

Παράδειγμα 6.3.1 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής A που βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής με εξίσωση $r = 3 + 2\sin\theta$ και στο εξωτερικό του κύκλου κέντρου $(0, 9)$ και ακτίνας $r = 2$ (Σχ. 6.3.1 - 1a).



Σχήμα 6.3.1 - 1: Παράδειγμα 6.3.1 - 1: (α) η περιοχή D και (b) τα κοινά σημεία.

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα κοινά σημεία των δύο περιοχών (Σχ. 6.3.1 - 1b) θέτοντας:

$$3 + 2\sin\theta = 2, \quad \text{οπότε} \quad \sin\theta = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

[7] Άρα $\theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$, οπότε σύμφωνα με την $(6.3.1 - 3)$ είναι

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} dr\right] d\theta = \int_{-\pi/6}^{7\pi/6}\left[\int_{2}^{3+2\sin\theta} r\,dr\right] d\theta$$

$$= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_2^{3+2\sin\theta} d\theta$$

[7] Υπενθυμίζεται ότι

$$\sin x = \sin a \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi + a \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - a, \quad \text{όταν} \quad k \in Z.$$

$$= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{5}{2} + 6\,\cos\theta + \overbrace{2\,\sin^2\theta}^{1-\cos 2\theta} \right) d\theta$$

$$= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{7}{2} + 6\,\cos\theta - \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \left[\frac{7}{2}\theta - 6\,\cos\theta - \frac{1}{2}\,\cos 2\theta \right]_{-\pi/6}^{7\pi/6}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} \approx 24.187.$$

■

6.3.2 Εμβαδόν επιφάνειας

Το **εμβαδόν** A της επιφάνειας S, που ορίζεται από τη συνάρτηση $z = f(x, y)$ της οποίας η προβολή στο επίπεδο xy είναι ο τόπος D, δίνεται από τον τύπο

$$A = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \qquad (6.3.2 - 1)$$

Παράδειγμα 6.3.2 - 1

Αν $f(x, y) = 1 - y^2$ και $D = \{-1 \leq x \leq 1, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5\}$, τότε

$$I = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{1 + 4y^2}\, dy \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{y}{2}\sqrt{1 + 4y^2} + \frac{\sinh^{-1} 2y}{4} \right]_{y=-0.5}^{y=0.5} dy = \int_{-1}^{1} 1.147794\, dx = 2.295587\,.$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$I = \int \sqrt{1 + 4y^2}\, dy = \int (y)' \sqrt{1 + 4y^2}\, dy = y\,\sqrt{1 + 4y^2} - \int y\, \left[\left(1 + 4y^2\right)^{1/2} \right]'\, dy$$

$$\begin{aligned}
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int y\left[\frac{1}{2}\,\frac{8y}{\sqrt{1+4y^2}}\right]dy = y\sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2+1-1}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2+1}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy - \int \frac{-1}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int \sqrt{1+4y^2}\,dy + \overbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy}^{\frac{1}{2}\sinh^{-1}2y} \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - I + \frac{1}{2}\sinh^{-1}2y
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int \sqrt{1+4y^2}\,dy = \frac{1}{2}\,y\sqrt{1+4y^2} + \frac{1}{4}\sinh^{-1}2y.$$

6.3.3 Υπολογισμός μάζας

Αν $\rho(x,y)$ με $\rho(x,y)>0$ για κάθε $(x,y)\in D$ παριστάνει την **πυκνότητα** της μάζας, που κατανέμεται με συνεχή τρόπο στο D, τότε η **συνολική μάζα** M του D δίνεται από τον τύπο

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy. \tag{6.3.3 - 1}$$

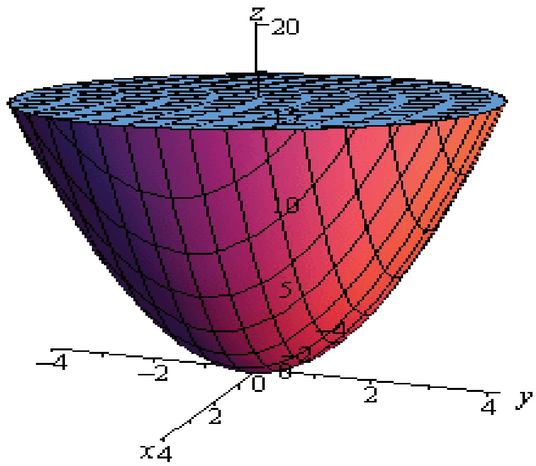
Επιπλέον το **κέντρο βάρους** (x_0, y_0) δίνεται από τις σχέσεις

$$x_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}\,, \quad y_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}$$

όπου οι

$$M_x = \iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy \quad \text{και} \quad M_y = \iint\limits_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

είναι οι **ροπές 1ης τάξης** του D.



Σχήμα 6.3.4 - 1: Παράδειγμα 6.3.4 - 1

6.3.4 Υπολογισμός όγκων

Ο **όγκος** V του στερεού που ορίζεται από την επιφάνεια S με εξίσωση $z = f(x, y)$, όταν $f(x, y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in D$, το επίπεδο $0xy$ και από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο ∂D του D και γενέτειρες παράλληλες προς τον z-άξονα δίνεται από τον τύπο

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \tag{6.3.4 - 1}$$

Αν $f(x, y) \geq g(x, y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in D$, τότε ο όγκος V του στερεού που φράσσεται από την επιφάνεια $z = g(x, y)$ και $w = f(x, y)$, από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο ∂D του D και γενέτειρες παράλληλες προς τον z-άξονα δίνεται από τον τύπο

$$V = \iint_D f(x, y) - g(x, y)\, dx\, dy. \tag{6.3.4 - 2}$$

Παράδειγμα 6.3.4 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το στερεό με εξίσωση $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 16$ (Σχ. 6.3.4 - 1).

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(6.3.4-2)$ ο ζητούμενος όγκος, έστω V, θα προκύψει από τη διαφορά του όγκου του επιπέδου και του στερεού, δηλαδή

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D 16\,dx\,dy - \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_D \left[16-\left(x^2+y^2\right)\right]\,dx\,dy = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Από τη μορφή της ολοκληρωτέας συνάρτησης $f(x,y)$ προκύπτει τότε ότι ο τόπος είναι ένας κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r=4$. Άρα μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$f(x,y) = 16 - r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta = 16 - r^2 = F(r,\theta)$$

όπου $r\in[0,4]$ και $\theta\in[0,2\pi]$. Άρα σύμφωνα με τις $(6.2.3-8)$ και $(6.3.4-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D \left[16-\left(x^2+y^2\right)\right]\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^4 r\left(16-r^2\right)\,dr\right]\,d\theta \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\left[[\,8r^2-\frac{1}{4}\,r^4\right]_{r=0}^{r=4}\,d\theta = 64\int\limits_0^{2\pi} d\theta = 128\,\pi. \end{aligned}$$

■

[8]

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο TEI Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Αθήνας, Αθανάσιος Μπράτσος, 2014. Αθανάσιος Μπράτσος. «Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ. Ενότητα 6: Διπλά Ολοκληρώματα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων