Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 4: Διανυσματικές Συναρτήσεις

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Πολιτικών Μηχ.ΤΕ και Μηχ. Τοπογραφίας & Γεωπληροφορικής ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 11

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Για την κατανόηση των εννοιών του μαθήματος ο αναγνώστης πρέπει να γνωρίζει το Μάθημα 1.

11.1 Εισαγωγικές έννοιες

11.1.1 Ορισμός διανυσματικής συνάρτησης

Για ευκολία υπενθυμίζεται ο ορισμός της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής, που πολλές φορές στη συνέχεια θα λέγεται επίσης και **βαθμωτή** συνάρτηση.

Ορισμός 11.1.1 - 1 (συνάρτησης). *Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\Re$. Τότε λέγεται συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T, μία μονοσήμαντη απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$D \ni x \longrightarrow y = f(x) \in T \qquad (11.1.1 - 1)$$

ή συντομότερα συνάρτηση $f|D$ με πεδίο τιμών T ή και συνάρτηση $f(x)$, $x \in D$ με τιμές στο T.

Η σχέση $y = f(x)$, που ισχύει για κάθε $x \in D$, ορίζει τον τύπο της συνάρτησης, το γράμμα x την ανεξάρτητη μεταβλητή στο D, ενώ το y την εξαρτημένη μεταβλητή στο T. Τότε ο τύπος της συνάρτησης εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι μεταβλητές y και x. Επομένως η συνάρτηση με τον τύπο $y = f(x) = x^2$, που έχει πεδίο ορισμού $D = \Re$, θα απεικονίζει τα στοιχεία 1, 3, 5, … στα 1^2, 3^2, 5^2, … , κ.λπ.

Γενικεύοντας τον παραπάνω παράδειγμα θεωρούμε ότι είναι δυνατόν να οριστεί επίσης μια μονοσήμαντη απεικόνιση (συνάρτηση) των στοιχείων 1, …,3, …, 5, … στα

$$\left(1^2, 1^3\right), \ldots, \left(3^2, 3^3\right), \ldots, \left(5^2, 5^3\right), \ldots \qquad (11.1.1 - 2)$$

του χώρου $\Re \times \Re = \Re^2$, αντίστοιχα στα

$$\left(1^2, 1^3, 1\right), \ldots, \left(3^2, 3^3, 3\right), \ldots, \left(5^2, 5^3, 5\right), \ldots \qquad (11.1.1 - 3)$$

του $\Re \times \Re \times \Re = \Re^3$. Τότε ο τύπος της συνάρτησης για τα στοιχεία $(11.1.1 - 2)$ πρέπει να είναι της μορφής (x^2, x^3), ενώ για τα $(11.1.1 - 2)$ της μορφής (x^2, x^3, x), όταν $x \in \Re$. Έχοντας τώρα υπ' όψιν τις σχέσεις $(1.4 - 1)$ και $(1.4 - 2)$ του Μαθήματος 1 τα παραπάνω στοιχεία είναι δυνατόν να θεωρηθούν σαν οι **συνιστώσες** των διανυσμάτων

$$\left\langle 1^2, 1^3\right\rangle, \ldots, \left\langle 3^2, 3^3\right\rangle, \ldots, \left\langle 5^2, 5^3\right\rangle, \ldots,$$

αντίστοιχα

$$\left\langle 1^2, 1^3, 1\right\rangle, \ldots, \left\langle 3^2, 3^3, 3\right\rangle, \ldots, \left\langle 5^2, 5^3, 5\right\rangle, \ldots,$$

δηλαδή

$$1^2\,\mathbf{i} + 1^3\,\mathbf{j}, \ldots, \quad \text{αντίστοιχα} \quad 1^2\,\mathbf{i} + 1^3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \ldots .$$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης, που περιγράφει τις παραπάνω περιπτώσεις, πρέπει να έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= \mathbf{F}\left(x^2, x^3\right) = x^2\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(x) &= \mathbf{F}\left(x^2, x^3, x\right) = x^2\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}, \end{aligned} \qquad (11.1.1 - 4)$$

όταν $x \in \Re$. Οι συναρτήσεις αυτές προς διάκριση των συναρτήσεων $(11.1.1 - 1)$, λέγονται στην περίπτωση αυτή διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, ενώ για τη μεταβλητή των χρησιμοποιείται συνήθως στο συμβολισμό της μεταβλητής το γράμμα t - που συνήθως παριστάνει το χρόνο - αντί του x.

Δίνεται στη συνέχεια ο ορισμός της διανυσματικής συνάρτησης.

Ορισμός 11.1.1 - 2 (διανυσματική συνάρτηση). *Έστω $D \subseteq \Re$ και $T \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $T \subseteq \Re^3$ δύο τυχαία μη κενά σύνολα. Τότε ορίζεται σαν διανυσματική συνάρτηση (vector function ή vector-valued function) μιας μεταβλητής με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T, μία* **μονοσήμαντη απεικόνιση**, *έστω $\mathbf{F}$, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$\begin{aligned} D \ni t \longrightarrow \mathbf{F}(t) &= \mathbf{y} = \langle f_1(t), f_2(t) \rangle \in T \subseteq \Re^2, \\ &\textit{αντίστοιχα} \\ &\mathbf{y} = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \in T \subseteq \Re^3 \end{aligned} \tag{11.1.1 - 5}$$

όπου κάθε $f_i(t)$ με $i = 1, 2$, αντίστοιχα $i = 1, 2, 3$ είναι μία συνάρτηση με μεταβλητή t, που λέγεται **συνιστώσα** *(argument)*[1] *της $\mathbf{F}$.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 11.1.1 - 2, αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου των 2-διαστάσεων, αντίστοιχα $Oxyz$ του χώρου των 3-διαστάσεων, τότε η $\mathbf{F}$ εκφράζεται στις περιπτώσεις αυτές συναρτήσει των συνιστωσών ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{11.1.1 - 6}$$

όταν $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων $0x$, $0y$ και $0z$ αντίστοιχα.

---

[1] Πολλές φορές, όταν απαιτείται, χρησιμοποιείται και η παράσταση των συνιστωσών με πίνακα διάνυσμα, δηλαδή

$$\begin{aligned} D \ni t \longrightarrow \mathbf{F}(t) &= \mathbf{y} = [f_1(t), f_2(t)]^\top \in T \subseteq \Re^2, \\ &\text{αντίστοιχα} \\ &\mathbf{y} = [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]^\top \in T \subseteq \Re^3 \end{aligned}$$

(βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 3).

Σημείωση 11.1.1 - 1

Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού D της $\mathbf{F}$ δεν διαφέρει από εκείνον της συνάρτησης $f(x)$, εφόσον τελικά συνεπάγεται τον υπολογισμό των πεδίων ορισμού κάθε μιας συνιστώσας[2] και στη συνέχεια των κοινών τους σημείων.

Παράδειγμα 11.1.1 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση (Σχ. 11.1.1 - 1)

$$\mathbf{F}(t) = \overbrace{\sqrt{t}\,\cos t}^{f_1(t)}\,\mathbf{i} + \overbrace{\sin t}^{f_2(t)}\,\mathbf{j} = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j}.$$

Τότε το πεδίο ορισμού της

$$f_1(t) = \sqrt{t}\,\cos t \quad \text{είναι το} \quad D_1 = [0, +\infty),$$

ενώ της

$$f_2(t) = \sin t \quad \text{το} \quad D_2 = \Re.$$

Άρα το πεδίο ορισμού D της $\mathbf{F}$ είναι

$$D = D_1 \cap D_2 = [0, +\infty).$$

Παράδειγμα 11.1.1 - 2

Έστω η διανυσματική συνάρτηση (Σχ. 11.1.1 - 2)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= \overbrace{\sin t}^{f_1(t)}\,\mathbf{i} + \overbrace{\cos t}^{f_2(t)}\,\mathbf{j} + \overbrace{\frac{1}{t}}^{f_3(t)}\,\mathbf{k} \\ &= f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Τότε το πεδίο ορισμού των

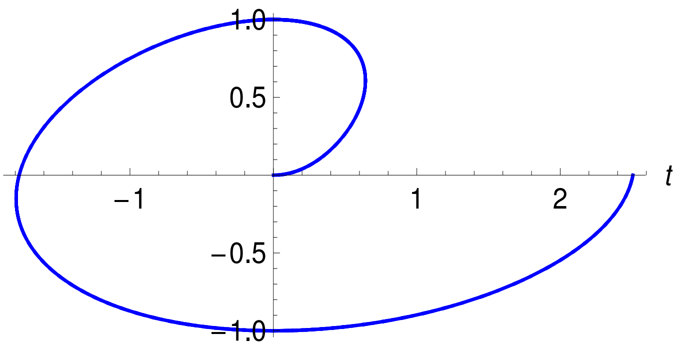
$$f_1(t) = \sin t, \quad f_2(t) = \cos t \quad \text{είναι το} \quad D_1 = \Re,$$

ενώ της

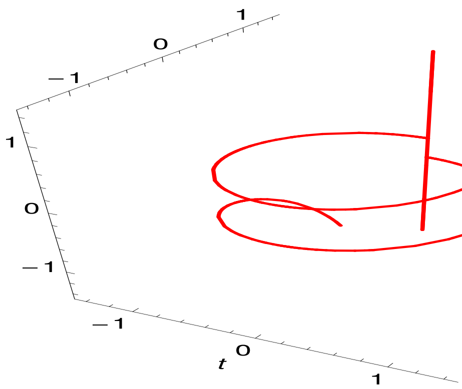
$$f_3(t) = \frac{1}{t} \quad \text{το} \quad D_2 = \Re - \{0\}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού D της $\mathbf{F}$ είναι $D = D_1 \cap D_2 = \Re - \{0\}$.

[2] Που είναι η ήδη γνωστή στον αναγνώστη συνάρτηση μια πραγματικής μεταβλητής.



Σχήμα 11.1.1 - 1: Παράδειγμα 11.1.1 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{F}(t) = \sqrt{t}\,\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ με πεδίο ορισμού $D = [0, +\infty)$, όταν $t \in [0, 2\pi]$



Σχήμα 11.1.1 - 2: Παράδειγμα 11.1.1 - 3: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{F}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \frac{1}{t}\,\mathbf{k}$ με πεδίο ορισμού $D = \Re - \{0\}$, όταν $t \in [-2\pi, 2\pi]$. Η ευθεία αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$

Οριακή τιμή

Υπολογίζεται όμοια από την οριακή τιμή των συνιστωσών συναρτήσεων ως εξής:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) = \lim_{t \to t_0} f_1(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to t_0} f_2(t)\,\mathbf{j} \quad \text{αντίστοιχα}$$

$$(11.1.1 - 7)$$

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) = \lim_{t \to t_0} f_1(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to t_0} f_2(t)\,\mathbf{j} + \lim_{t \to t_0} f_3(t)\,\mathbf{k},$$

όταν $t_0 \in D \subseteq \Re$.

Παράδειγμα 11.1.1 - 3

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \left(3 - 2t^2\right)\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + (\cos t - 1)\,\mathbf{k}.$$

Τότε, αν $t_0 = 0$, σύμφωνα με την $(11.1.1 - 7)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \mathbf{F}(t) &= \lim_{t \to 0} \left(3 - 2t^2\right)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to 0} e^t\,\mathbf{j} + \lim_{t \to 0} (\cos t - 1)\,\mathbf{k} \\ &= 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + (1 - 1)\,\mathbf{k} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Συνέχεια

Η συνέχεια σε ένα σημείο $t_0 \in D$ ορίζεται από τη συνθήκη

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}\left(t_0\right), \qquad (11.1.1 - 8)$$

όταν ο υπολογισμός του $\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t)$ γίνεται από την $(11.1.1 - 7)$.

Παράδειγμα 11.1.1 - 4

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \ln\left(9 - t^2\right)\,\mathbf{i} + \frac{1}{2 - t}\,\mathbf{j} + \sqrt{1 + t}\,\mathbf{k}.$$

Προφανώς κάθε συνιστώσα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε η $\mathbf{F}(t)$ θα είναι συνεχής στο κοινό πεδίο ορισμού των, έστω D, όπου προφανώς θα ισχύει η $(11.1.1 - 8)$. Τότε, επειδή η

$$f_1(t) = \ln\left(9 - t^2\right) \quad \text{έχει πεδίο ορισμού το} \quad D_1 = (-3, 3),$$

η

$$f_2(t) = \frac{1}{2 - t} \quad \text{το} \quad D_2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

και η

$$f_3(t) = \sqrt{1 + t} \quad \text{το} \quad D_3 = [-1, +\infty),$$

πρέπει

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = [-1, 2) \cup (2, 3).$$

11.1.2 Παραμετρική παράσταση καμπυλών

Ο γνωστός μέχρι τώρα προσδιορισμός της αναλυτικής εξίσωσης μιας καμπύλης, έστω C, στο χώρο $\Re^2$, αντίστοιχα $\Re^3$ με καρτεσιανές συντεταγμένες, δηλαδή σε σύστημα συντεταγμένων Oxy του χώρου των 2-διαστάσεων, αντίστοιχα $Oxyz$ του χώρου των 3-διαστάσεων, πολλές φορές δημιουργεί δυσκολίες στον υπολογισμό διαφόρων φυσικών μεγεθών. Για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες αυτές αναζητείται ένας άλλος τρόπος περιγραφής της εξίσωσης της C.

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι:

Ορισμός 11.1.2 - 1. *Ένα υλικό σημείο κινούμενο στο χώρο και έχοντας ένα βαθμό ελευθερίας διαγράφει γενικά μία καμπύλη γραμμή, ενώ όταν έχει δύο βαθμούς ελευθερίας μια επιφάνεια.*

Έστω τώρα ότι ζητείται ο προσδιορισμός της εξίσωσης μιας καμπύλης C του $\Re^3$. Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ τυχόν σημείο της καμπύλης C, τότε στο σημείο αυτό αντιστοιχεί ακριβώς ένα **διάνυσμα θέσης**, έστω $\mathbf{r}_0$, όπου

$$\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k} \qquad (11.1.2 - 1)$$

και αντίστροφα στο $\mathbf{r}_0$ αντιστοιχεί το σημείο $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$. Όμοια σε ένα άλλο σημείο $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ της C θα αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k} \qquad (11.1.2 - 2)$$

και γενικά στο τυχόν σημείο $M\,(x, y, z)$, το

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \qquad (11.1.2 - 3)$$

Έχοντας υπ' όψιν και τον Ορισμό 11.1.1 - 2 τα διανύσματα $\mathbf{r}_0$ στην $(11.1.2{-}1)$, $\mathbf{r}_1$ στην $(11.1.2-2)$ και γενικά $\mathbf{r}$ στην $(11.1.2-3)$ είναι δυνατόν να θεωρηθούν σαν οι τιμές μιας κατάλληλης **διανυσματικής συνάρτησης**, έστω (Σχ. 11.1.2 - 1)

$$\mathbf{r}(t), \quad \text{όταν} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

με την έννοια ότι: αν

- $t = t_0$, τότε η $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}\,(t_0)$ θα ισούται με την $(11.1.2 - 1)$,
- $t = t_1$, η $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}\,(t_1)$ με την $(11.1.2 - 2)$, και γενικά
- $t = t$, η $\mathbf{r}\,(t)$ με την $(11.1.2 - 3)$.

Η αναλυτική έκφραση της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$ είναι

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \qquad \text{όταν} \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \Re. \qquad (11.1.2 - 4)$$

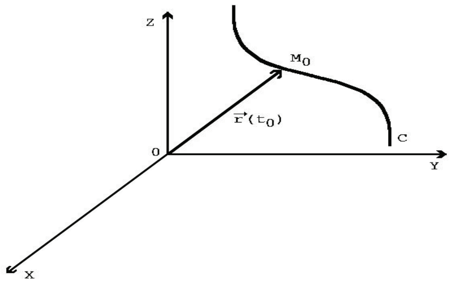
Η $(11.1.2 - 4)$ θα λέγεται τότε ότι ορίζει την **παραμετρική εξίσωση** της καμπύλης C με παράμετρο t.

Με όμοιον τρόπο ορίζεται η παραμετρική εξίσωση μιας επίπεδης καμπύλης C ως εξής:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}\,, \qquad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta]. \qquad (11.1.2 - 5)$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις των καμπυλών έχουν μεγάλη εφαρμογή στη Φυσική, κυρίως όταν η παράμετρος t συμβολίζει το χρόνο.

Δίνονται στη συνέχεια ορισμένες παραμετρικές παραστάσεις χρήσιμων καμπυλών.



Σχήμα 11.1.2 - 1: παραμετρική παράσταση καμπυλών

Ευθεία

Αν M είναι ένα τυχόν σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ και $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$, τότε, επειδή $\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή είναι[3] (Σχ. 11.1.2 - 2)

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{r}_2 + (1-t)\,\mathbf{r}_1, \quad \text{όταν} \quad t \in \Re. \qquad (11.1.2 - 6)$$

Η $(11.1.2-6)$ ορίζει την **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** που διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2. Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

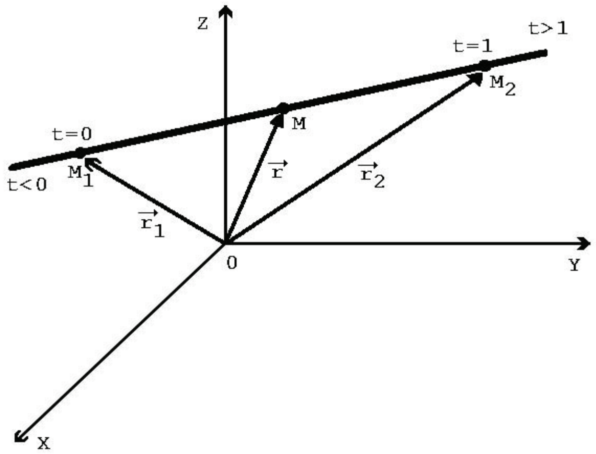
η $(11.1.2-6)$ τελικά γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= [tx_2 + (1-t)x_1]\,\mathbf{i} + [ty_2 + (1-t)y_1]\,\mathbf{j} \\ &\quad + [tz_2 + (1-t)z_1]\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in \Re. \end{aligned} \qquad (11.1.2 - 7)$$

Σημείωση 11.1.2 - 1

Η $(11.1.2-7)$, ειδικά όταν $\mathbf{t} \in [\mathbf{0},\, \mathbf{1}]$, ορίζει την παραμετρική εξίσωση των σημείων του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2.

[3] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 1.



Σχήμα 11.1.2 - 2: Παράδειγμα 11.1.2 - 1: παραμετρική παράσταση του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2

Παράδειγμα 11.1.2 - 1

Να υπολογιστεί η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2, όταν $M_1 = (1, 2, 0)$ και $M_2(2, 4, 3)$ (όμοια Σχ. 11.1.2 - 2).

Λύση. Σύμφωνα με την $(11.1.2 - 7)$ και την Παρατήρηση 11.1.2 - 1 είναι

$$\mathbf{r}(t) = (1 + t)\ \mathbf{i} + 2(1 + t)\,\mathbf{j} + 3t\ \mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 1].$$

■

Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας είναι

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Θέτοντας

$$x \ = \ R\cos t \quad \text{και} \quad y = R\sin t$$

έχουμε την παρακάτω **παραμετρική εξίσωση** των σημείων της περιφέρειας

$$\mathbf{r}(t) = R\,\cos t\,\mathbf{i} + R\,\sin t\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \tag{11.1.2 - 8}$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α, β), τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας είναι

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

οπότε στην περίπτωση αυτή έχουμε σαν παραμετρική εξίσωση την

$$\mathbf{r}(t) = (\alpha + R\,\cos t)\,\mathbf{i} + (\beta + R\,\sin t)\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \tag{11.1.2 - 9}$$

Έλλειψη

Όμοια για την έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

έχουμε σαν **παραμετρική εξίσωση** την

$$\mathbf{r}(t) = \alpha\,\cos\,t\mathbf{i} + \beta\,\sin t\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \tag{11.1.2 - 10}$$

Παραβολή

Αν η εξίσωση της παραβολής είναι

$$y = \alpha x^2,$$

τότε μία παραμετρική εξίσωσή της προκύπτει θέτοντας $x = t$, οπότε $y = \alpha\,t^2$ και κατά συνέπεια

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \alpha\,t^2\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in \Re. \tag{11.1.2 - 11}$$

Σημειώσεις 11.1.2 - 1

i) Αν είναι γνωστή η εξίσωση της καμπύλης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε οι συντεταγμένες της παραμετρικής εξίσωσης που θα προσδιοριστεί, πρέπει να επαληθεύουν την αρχική εξίσωση της καμπύλης.

ii) Από την παραμετρική εξίσωση της καμπύλης είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η αντίστοιχη εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θέτοντας

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{και} \quad z = z(t)$$

και απαλείφοντας την παράμετρο t, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

Παράδειγμα 11.1.2 - 2

Έστω η καμπύλη που δίνεται με παραμετρική εξίσωση ως εξής:

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (2 + \sin t)\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, \pi].$$

Θέτοντας

$$x = 1 + \cos t, \quad y = 2 + \sin t,$$

οπότε

$$x - 1 = \cos t, \quad y - 2 = \sin t$$

και απαλείφοντας την παράμετρο t, προκύπτει ότι η εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Επειδή $t \in [0, \pi]$ πρόκειται για το άνω μέρος της περιφέρειας, που έχει κέντρο το σημείο $(1, 2)$ και ακτίνα 1 (Σχ. 11.1.2 - 3).

11.2 Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

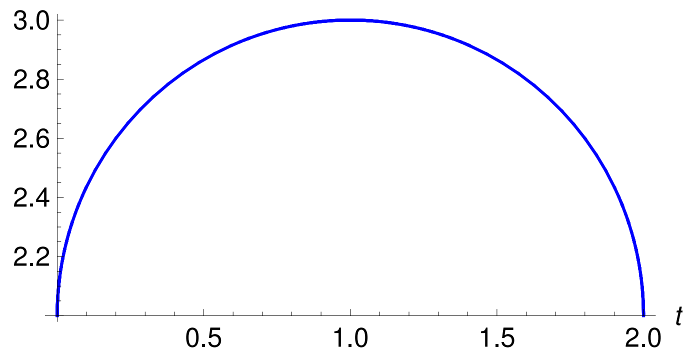
11.2.1 Ορισμός παραγώγου

Ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης του Μαθήματος 9 επεκτείνεται και στην περίπτωση των διανυσματικών συναρτήσεων ως εξής:

Ορισμός 11.2.1 - 1 (κλίσης). *Έστω η διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F} \,|\, (a, b)$ *και σημείο* $t_0 \in (a, b)$. *Τότε για κάθε* $t \in (a, b) - \{t_0\}$ *με τον τύπο*

$$\mathbf{K}_{t_0}(x) = \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)}{t - t_0} \qquad (11.2.1 - 1)$$

ορίζεται μία διανυσματική συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της $\mathbf{F}$ *στο σημείο* t_0.



Σχήμα 11.1.2 - 3: Παράδειγμα 11.1.2 - 2: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (2 + \sin t) \,|\, \Re$, όταν $t \in [0, \pi]$

Αν $t = t_0 + \Delta t$, οπότε

$$\Delta t = t - t_0 \quad \text{για κάθε} \quad t \in (a, b) - \{t_0\}\,, \tag{11.2.1 - 2}$$

τότε ο τύπος $(11.2.1 - 1)$ γράφεται

$$\mathbf{K}_{t_0} = \frac{f\,(t_0 + \Delta t) - f\,(t_0)}{\Delta t}\,. \tag{11.2.1 - 3}$$

Ορισμός 11.2.1 - 2 (παραγώγου). *Έστω η διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F} \,|\, (a, b)$ *και σημείο* $t_0 \in (a, b)$. *Τότε θα λέγεται ότι η* $\mathbf{F}$ *παραγωγίζεται στο σημείο* $t_0 \in (a, b)$ *τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή*

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{K}_{t_0}(x) = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{F}\,(t) - \mathbf{F}\,(t_0)}{t - t_0}\,. \tag{11.2.1 - 4}$$

υπάρχει.

Η $(11.2.1 - 4)$ θα λέγεται τότε η **1ης τάξης** διανυσματική παράγωγος της $\mathbf{F}$ στο t_0 και θα συμβολίζεται με $\mathbf{F}'\,(t_0)$.

Έχοντας υπ' όψιν την $(11.2.1 - 2)$, η $(11.2.1 - 4)$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'\,(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{F}\,(t) - \mathbf{F}\,(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}\,(t_0 + \Delta t) - \mathbf{F}\,(t_0)}{\Delta t}\,. \end{aligned} \tag{11.2.1 - 5}$$

Ορισμός 11.2.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση* $\mathbf{F}\,|\,(a,b)$ *Τότε θα λέγεται ότι η* $\mathbf{F}$ *παραγωγίζεται στο* (a,b) *τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος* $\mathbf{F}'(t_0)$ *για κάθε* $t_0 \in (a,b)$.

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{F}) = \frac{d\,\mathbf{F}(t)}{dt} D^1\mathbf{F}(t) = D\,\mathbf{F}(t) \qquad (11.2.1 - 6)$$

όπου όμοια το σύμβολο (τελεστής) $D = D^1 = \frac{d}{dt}$ συμβολίζει την 1ης τάξης παράγωγο της $\mathbf{F}$ με μεταβλητή t.

Παρατήρησεις 11.2.1 - 1

Από τους Ορισμούς 11.2.1 - 2 και 11.2.1 - 3 προκύπτουν τα εξής:

i) η $\mathbf{F}'(t_0)$, εφόσον υπάρχει, είναι **διάνυσμα**, ενώ

ii) η $\mathbf{F}'(t)$ είναι **διανυσματική συνάρτηση**.

Ορισμός 11.2.1 - 4. *Έστω ότι της συνάρτησης* $\mathbf{F}\,|\,(a,b)$ *υπάρχει η* $\mathbf{F}'(t)$ *για κάθε* $t \in (a,b)$. *Τότε θα λέγεται ότι υπάρχει η* **2ης τάξης** *παράγωγος της* $\mathbf{F}$ *στο* (a,b) *τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της* $\mathbf{F}'(t)$ *για κάθε* $t \in (a,b)$.

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$\mathbf{F}''(t) = \mathbf{F}^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\mathbf{F}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{F}(t)}{dt^2} = D^2\mathbf{F}(t) \qquad (11.2.1 - 7)$$

όπου όμοια το $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ συμβολίζει τον τελεστή της 2ης τάξης παραγώγου της $\mathbf{F}$ με μεταβλητή t.

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι:

3ης τάξης:

$$\mathbf{F}'''(t) = \mathbf{F}^{(3)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\mathbf{F}(t)}{dt^2}\right) = \frac{d^3\mathbf{F}(t)}{dt^3} = D^3\mathbf{F}(t) \qquad (11.2.1 - 8)$$

όπου το $D^3 = \frac{d^3}{dt^3}$ συμβολίζει τον τελεστή της 3ης τάξης παραγώγου, και γενικά η

ν - **τάξης**:

$$\mathbf{F}^{(\nu)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{\nu-1}\mathbf{F}(t)}{dt^{\nu-1}}\right) = \frac{d^{\nu}\mathbf{F}(t)}{dt^{\nu}} = D^{\nu}\mathbf{F}(t) \qquad (11.2.1 - 9)$$

όπου όμοια ο τελεστής $D^{\nu} = \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}$ συμβολίζει την ν-τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή t.

Ειδικά ορίζεται ότι

$$\mathbf{F}^{(0)}(t) = \mathbf{F}(t). \qquad (11.2.1 - 10)$$

Αν τώρα Oxy, αντίστοιχα $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, τότε για κάθε $t \in (a,b)$ σύμφωνα με την $(11.1.1 - 6)$ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}. \qquad (11.2.1 - 11) \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 11.2.1 - 1. *Η* $\mathbf{F}$ *θα έχει* 1*ης τάξης παράγωγο στο* (a,b) *τότε και μόνο, όταν υπάρχουν στο* (a,b) *οι* 1*ης τάξης παράγωγοι των συναρτήσεων* $f_1(t)$, $f_2(t)$ *και* $f_3(t)$.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(t) &= f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}'(t) &= f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j} + f_3'(t)\,\mathbf{k} \qquad (11.2.1 - 12) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in (a,b)$.

11.2.2 Κανόνες παραγώγισης

Έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ και $\mathbf{W}$ με κοινό πεδίο ορισμού D και παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε, αν φ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού όμοια το (a,b), αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

$i)$ Αν $\mathbf{F} = \mathbf{c}$ σταθερά, τότε $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$

$ii)$ $(\mathbf{F} + \mathbf{G})' = \mathbf{F}' + \mathbf{G}'$

$iii)$ $(k\,\mathbf{F})' = k\mathbf{F}'$ όταν k σταθερά

$iv)$ $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}'$

$v)$ $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \mathbf{G}'$

$vi)$ $(\varphi \mathbf{F})' = \varphi' \mathbf{F} + \varphi \mathbf{F}'$ όταν φ βαθμωτή συνάρτηση

$vii)$ $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W})' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W}' + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}' \times \mathbf{W} + \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W}$

$viii)$ $[\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W})]' = \mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W}') + \mathbf{F} \times (\mathbf{G}' \times \mathbf{W}) + \mathbf{F}' \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W})$.

Οι ιδιότητες (ii)-(iv) γενικεύονται για ν-το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 11.2.2 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin^2 t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 11.2.1 - 1 και τους γνωστούς τύπους παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(t) &= (\cos t)'\,\mathbf{i} + \left(\sin^2 t\right)'\,\mathbf{j} + t'\,\mathbf{k} = -\sin t\,\mathbf{i} + \overbrace{2\,\sin t \cos t}^{\sin 2t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{F}''(t) &= -(\sin t)'\,\mathbf{i} + (\sin 2t)'\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = -\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\cos 2t\,\mathbf{j}, \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 11.2.2 - 2

Όμοια, έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\mathbf{F}(t) = t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \mathbf{G}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}.$$

Τότε σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης (iv) είναι

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' &= \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}' \\ &= (\mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}) \cdot \left(t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}\right) + (t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}) \cdot \left(3\,t^2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\right) \\ &= \left(1 \cdot t^3 + 0 \cdot t\right) + \left(t \cdot 3\,t^2 + 2 \cdot 1\right) = 4\,t^3 + 2. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Των παρακάτω διανυσματικών συναρτήσεων να υπολογιστούν οι 1ης και οι 2ης τάξης παράγωγοι

$i)$ $\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$

$ii)$ $t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$

$iii)$ $e^{-3t}\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{j}$

$iv)$ $e^{-t}\left(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}\right)$

$v)$ $\ln\left(1+t^2\right)\mathbf{i} + \sin t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$vi)$ $\tan t^2\mathbf{i} + e^{-t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$

2. Δείξτε ότι η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \boldsymbol{\beta} e^{\lambda t} + \boldsymbol{\alpha} e^{-\lambda t},$$

όταν $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ σταθερά διανύσματα, επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$\mathbf{F}''(t) - \lambda^2\,\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}.$$

3. Αν

$$\mathbf{F}(t) = t^2\,\mathbf{i} - \cos 2t\,\mathbf{j} + \sin 2t\,\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{G}(t) = t\,\mathbf{i} + \sin 2t\,\mathbf{j} - \cos 2t\,\mathbf{k},$$

να υπολογιστούν οι παράγωγοι

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})', \quad (\mathbf{F}\times\mathbf{G})'' \quad \text{και} \quad (\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})'.$$

[4]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων