Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 2: Αναλυτική Γεωμετρία

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Πολιτικών Μηχ.ΤΕ και Μηχ. Τοπογραφίας & Γεωπληροφορικής ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 2

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότερες έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας, που θεωρούνται απαραίτητες για τα επόμενα.

2.1 Ευθεία

2.1.1 Συντελεστής διεύθυνσης

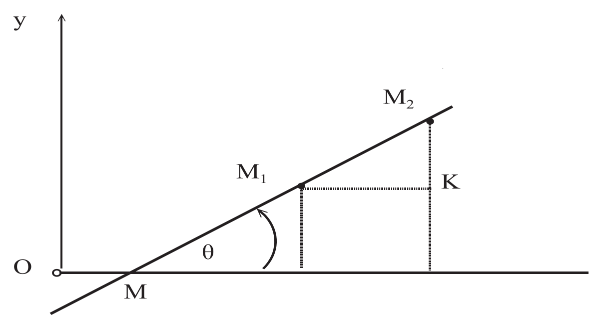
Ορισμός 2.1 - 1. *Έστω το ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy και μία ευθεία ε. Αν θ είναι η γωνία που διαγράφει ο άξονας Ox, όταν περιστραφεί γύρο από το σημείο M κατά τη δεξιόστροφη φορά, έως ότου συμπέσει με την ε, τότε η εφαπτομένη της γωνίας θ ορίζει το* **συντελεστή διεύθυνσης** *της ε και συμβολίζεται συνήθως με λ, δηλαδή $\lambda = \tan\theta$ (Σχ. 2.1 - 1).*

Πρόταση 2.1 - 1. *Αν $M_1\left(x_1, y_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2\right)$ είναι δύο τυχόντα σημεία μίας μη παράλληλης προς τους άξονες ευθείας, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης ισούται με*

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \tag{2.1 - 1}$$

Απόδειξη. Από το ορθογώνιο τρίγωνο KM_1M_2 έχουμε

$$\tan\theta = \frac{(KM_2)}{(M_1K)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Σχήμα 2.1 - 1: συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1 - 2 *Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M\,(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ δίνεται από την εξίσωση*

$$y - y_0 = \lambda\,(x - x_0)\,. \qquad (2.1 - 2)$$

Παρατήρηση 2.1 - 1

Αν η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox, τότε $\lambda = 0$, ενώ όταν είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox, τότε $\lambda \to +\infty$.

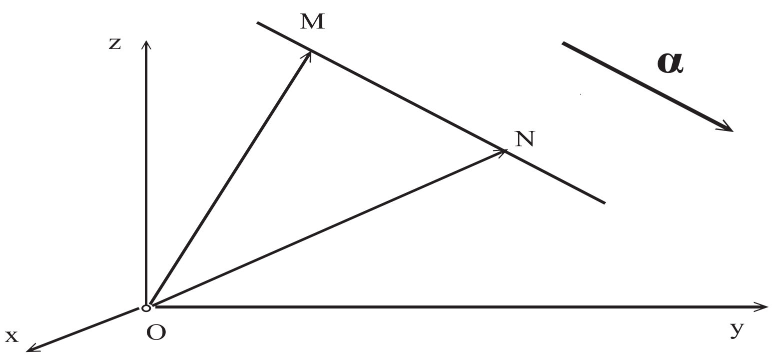
Σύμφωνα με τα παραπάνω εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 2.1 - 3. *Αν ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}\,(a_1, a_2)$ είναι παράλληλο προς μία ευθεία ε, που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda = \alpha_2/\alpha_1$.*

Πρόταση 2.1 - 4. *Έστω ε_1 και ε_2 δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη, έτσι ώστε οι ευθείες αυτές να είναι*

i) *παράλληλες είναι η $\lambda_1 = \lambda_2$,*

ii) *κάθετες είναι η $\lambda_1\,\lambda_2 = -1$.*



Σχήμα 2.1 - 2: ευθεία από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα

Ορισμός 2.1 - 2. *Ορίζεται σαν* **συντελεστής διεύθυνσης** *ενός διανύσματος ο συντελεστής διεύθυνσης του αντίστοιχου φορέα του.*

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες μορφές της εξίσωσης μίας ευθείας στο επίπεδο, αντίστοιχα στο χώρο. Σημειώνεται ότι στο εξής οι όροι διανυσματική, αντίστοιχα παραμετρική εξίσωση, όταν χρησιμοποιούνται, είναι ισοδύναμοι.

2.1.2 Ευθεία από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα

Διανυσματική εξίσωση

Έστω ότι ζητείται η εξίσωση μίας ευθείας, που διέρχεται από ένα σημείο, έστω M και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα, έστω $\boldsymbol{\alpha}$ (Σχ. 2.1 - 2). Αν $\mathbf{r}_1$ η διανυσματική ακτίνα του σημείου M και N ένα άλλο τυχόν σημείο της ευθείας με διανυσματική ακτίνα $\mathbf{r}$, τότε, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{MN}$ και $\boldsymbol{\alpha}$ είναι παράλληλα, θα πρέπει σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 - 1 να υπάρχει πραγματικός αριθμός t (παράμετρος), έτσι ώστε $\mathbf{MN} = t\boldsymbol{\alpha}$. Αλλά $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{MN}$, οπότε

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\boldsymbol{\alpha}. \qquad (2.1 - 3)$$

Αναλυτική εξίσωση στο χώρο

Έστω $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $M\,(x_1, y_1, z_1)$. Τότε από την (2.1−3) εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες προκύπτει

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\alpha_2} = \frac{z - z_1}{\alpha_3}\,. \tag{2.1 - 4}$$

Αναλυτική εξίσωση στο επίπεδο

Όμοια είναι

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\alpha_2} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.1 - 5}$$

2.1.3 Ευθεία από δύο σημεία

Διανυσματική εξίσωση

Έστω M_1, M_2 δύο τυχόντα σημεία της ευθείας με διανυσματικές ακτίνες $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1\rangle$, $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2, z_2\rangle$ αντίστοιχα και M τυχόν άλλο σημείο της με διανυσματική ακτίνα, έστω $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$. Τότε η περίπτωση αυτή ανάγεται στην 2.1.2 θέτοντας $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, οπότε

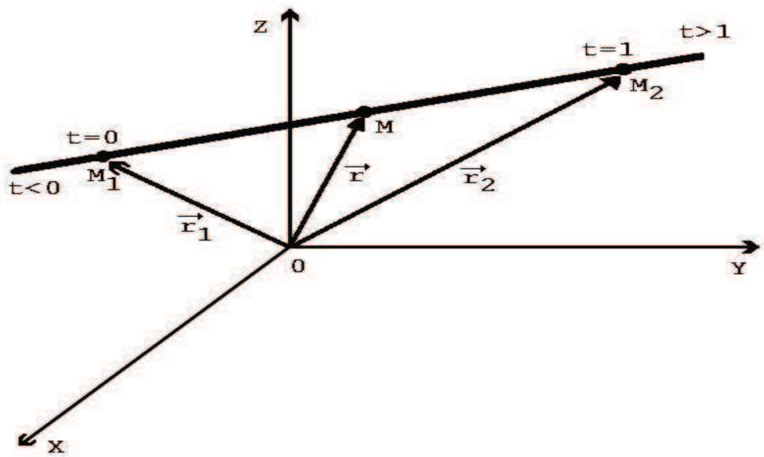
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,. \tag{2.1 - 6}$$

Η $(2.1-6)$ χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, τελικά γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ &= [tx_2 + (1-t)x_1]\,\mathbf{i} + [ty_2 + (1-t)y_1]\,\mathbf{j} \\ &\quad + [tz_2 + (1-t)z_1]\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in \Re. \end{aligned} \tag{2.1 - 7}$$

Σημείωση 2.1 - 1

Όταν $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, η (2.1−7) ορίζει την **παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 (Σχ. 2.1 - 3).



Σχήμα 2.1 - 3: ευθεία από δύο σημεία - παραμετρική παράσταση

Αναλυτική εξίσωση στο χώρο

Έστω $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$. Τότε από την $(2.1 - 7)$ προκύπτει

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,. \qquad (2.1 - 8)$$

Αναλυτική εξίσωση στο επίπεδο

Όμοια

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad ή \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.1 - 9)$$

2.1.4 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας στο επίπεδο

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1 - 5. *Η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης της ευθείας στο επίπεδο είναι*

$$Ax + By + \Gamma = 0 \qquad (2.1 - 10)$$

και αντίστροφα.

Διερεύνηση της εξίσωσης $Ax + By + \Gamma = 0$

Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $A \neq 0$ και $B = 0$, τότε από την $(2.1 - 10)$ προκύπτει ότι $x = -\Gamma/A$, που παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $(-\Gamma/A,\, y)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy. Αν και $\Gamma = 0$, τότε η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα Oy.

ii) Αν $A = 0$ και $B \neq 0$, τότε από την $(2.1 - 10)$ προκύπτει ότι $y = -\Gamma/B$, που παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x,\, -\Gamma/B)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox. Αν και $\Gamma = 0$, τότε η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα Ox.

iii) Αν $\Gamma = 0$, τότε η $(2.1 - 10)$ παριστάνει ευθεία, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv) Αν $A,\, B,\, \Gamma \neq 0$, η $(2.1 - 10)$ γράφεται

$$-\frac{x}{\Gamma/A} - \frac{y}{\Gamma/B} = 1,$$

δηλαδή

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.1\text{ - }11)$$

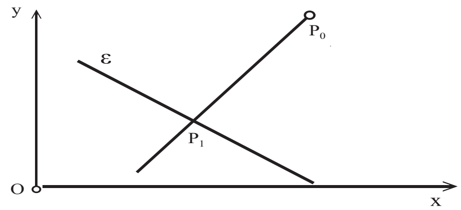
όπου τα $a = -\Gamma/A$ και $b = -\Gamma/B$ λέγονται και **συντεταγμένες επί την αρχή** της $(2.1 - 10)$.

Πρόταση 2.1 - 6. *Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 με αντίστοιχες εξισώσεις*

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0\ \text{ και }\ A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0.$$

Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι, ώστε οι ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο, είναι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.1\text{ - }12)$$



Σχήμα 2.1 - 4: απόσταση σημείου από ευθεία

2.1.5 Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω ευθεία ε με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ και τυχόν σημείο της $P_0\,(x_0,y_0)$. Τότε η απόσταση του P_0 από την ε δίνεται από τον τύπο (Σχ. 2.1 - 4)

$$d\,(P_0,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}\,. \tag{2.1 - 13}$$

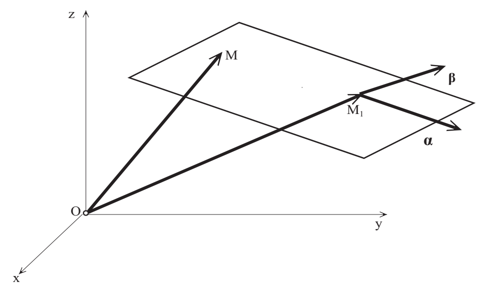
Με το MATHEMATICA η γραφική παράσταση μίας ευθείας γίνεται με την εντολή

```
Show[Graphics[Line[{{x_1,y_1},{x_2,y_2}}]]]
```

2.2 Επίπεδο

2.2.1 Επίπεδο από σημείο και παράλληλο προς δύο διανύσματα

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $M\,(x_1,y_1,z_1)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\,(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ (Σχ. 2.2 - 1).



Σχήμα 2.2 - 1: επίπεδο από σημείο παράλληλο προς δύο διανύσματα

Διανυσματική εξίσωση

Επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι παράλληλα, αποδεικνύεται ότι[1] ότι υπάρχουν παράμετροι u, v, έτσι ώστε, αν M τυχόν σημείο του επιπέδου, να ισχύει $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$, δηλαδή $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$. Άρα

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}. \tag{2.2 - 1}$$

Αναλυτική εξίσωση

Η $(2.2 - 1)$ γράφεται

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x_1 + u\alpha_1 + v\beta_1)\,\mathbf{i} + (y_1 + u\alpha_2 + v\beta_2)\,\mathbf{j} + (z_1 + u\alpha_3 + v\beta_3)\,\mathbf{k}.$$

Τότε εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες έχουμε

$$x = x_1 + u\alpha_1 + v\beta_1\,, \quad y = y_1 + u\alpha_2 + v\beta_2\,, \quad z = z_1 + u\alpha_3 + v\beta_3$$

[1]Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 1.

που τελικά δίνει σαν αναλυτική εξίσωση την

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2 - 2)$$

2.2.2 Επίπεδο από δύο σημεία και παράλληλο προς διάνυσμα

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\left\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \right\rangle$.

Διανυσματική εξίσωση

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην 2.2.1 θέτοντας $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, όταν $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_1 και M_2 αντίστοιχα. Άρα

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right) + v\boldsymbol{\alpha}. \qquad (2.2 - 3)$$

Αναλυτική εξίσωση

Όμοια από την (2.2—3) για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x, y, z)$ του επιπέδου Π έχουμε

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u\left(x_2 - x_1\right) + v\alpha_1, \\ y &= y_1 + u\left(y_2 - y_1\right) + v\alpha_2, \\ z &= z_1 + u\left(z_2 - z_1\right) + v\alpha_3 \end{aligned}$$

που τελικά δίνει σαν αναλυτική εξίσωση την

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2 - 4)$$

2.2.3 Επίπεδο από τρία σημεία

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ και $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Διανυσματική εξίσωση

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην 2.2.1 θέτοντας $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{M_1M_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, όταν $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ και $\mathbf{r}_3$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_1, M_2 και M_3 αντίστοιχα. Άρα

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1). \qquad (2.2 - 5)$$

Αναλυτική εξίσωση

Όμοια για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου M του επιπέδου Π έχουμε

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1), \\ y &= y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1), \\ z &= z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

που τελικά δίνει σαν αναλυτική εξίσωση την

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2 - 6)$$

2.2.4 Γενική μορφή εξίσωσης επιπέδου

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.2 - 1. *Η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης του επιπέδου είναι*

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0. \qquad (2.2 - 7)$$

και αντίστροφα.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) έχει συντεταγμένες επί την αρχή 3 και -5,

ii) έχει τετμημένη επί την αρχή 4 και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a} = (1, -3)$,

iii) διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x - y = 7$, $x + 2y = 5$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 5y + 3 = 0$,

iv) διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$ και σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με την ευθεία $x - 7y + 5 = 0$.

2. Να υπολογιστεί η γωνία των ευθειών $2x - y = 4$ και $3x + y = 1$.

3. Έστω το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 2)$, $(3, 4)$ και $(-2, -3)$. Να υπολογιστούν

i) οι εξισώσεις των διαγωνίων, των υψών και των διχοτόμων του,

ii) οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους.

4. Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου λ, έτσι ώστε η ευθεία $\lambda x + y + 1 = 0$ να διέρχεται από το κοινό σημείο τομής των ευθειών $2x - y + 1 = 0$ και $x - y + 5 = 0$.

5. Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$ και τέμνει κάθετα την τομή των επιπέδων $3x - 5y + 2 = 0$ και $2x + 3z + 1 = 0$.

6. Έστω τα επίπεδα $2x + 3y + 4z - 6 = 0$ και $4x + 6y + 8z + 24 = 0$. Ζητείται

i) να δειχθεί ότι είναι παράλληλα,

ii) να υπολογιστεί η εξίσωση του επιπέδου που τέμνει τα επίπεδα αυτά κάθετα.

2.3 Κωνικές τομές

2.3.1 Κύκλος

Ορισμός 2.3 - 1. *Ορίζεται σαν* **περιφέρεια κύκλου** *ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από ένα σημείο του* *επιπέδου, έστω O, που λέγεται κέντρο. Η απόσταση αυτή ορίζει τότε την ακτίνα του κύκλου, έστω R.*

Έστω τώρα ότι το O συμπίπτει με την αρχή των συντεταγμένων ενός ορθογωνίου συστήματος Oxy. Τότε, αν $M(x, y)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, έχουμε

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{2.3 - 1}$$

ενώ όταν το κέντρο είναι στο σημείο $K(\alpha, \beta)$, τότε είναι

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \tag{2.3 - 2}$$

Οι $(2.3 - 1)$ και $(2.3 - 2)$ δίνουν σαν γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης των σημείων της περιφέρειας του κύκλου την

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \mathit{\Gamma} = 0 \tag{2.3 - 3}$$

με κέντρο $K\left(-A/2, -B/2\right)$ και ακτίνα $R = \left(A^2 + B^2 - 4\mathit{\Gamma}\right)^{1/2}$.

Αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής $(2.3 - 3)$ παριστάνει περιφέρεια κύκλου. Πράγματι η $(2.3 - 3)$ γράφεται

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}\,. \tag{2.3 - 4}$$

Τότε η $(2.3 - 4)$:

- αν $A^2 + B^2 - 4\mathit{\Gamma} \geq 0$, παριστάνει εξίσωση κύκλου με κέντρο $(-A/2, -B/2)$ και ακτίνα $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}/2$. Ειδικά όταν ισχύει η ισότητα, η ακτίνα του κύκλου είναι μηδέν (σημείο).

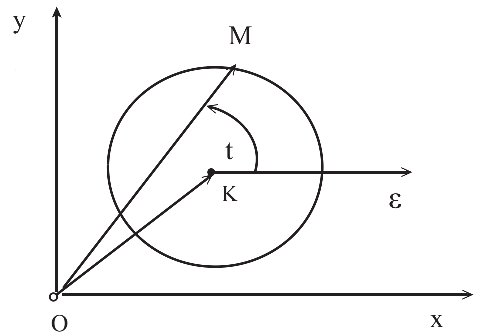
- Αν $A^2 + B^2 - 4\mathit{\Gamma} \leq 0$, τότε δεν υπάρχουν σημεία που να την επαληθεύουν και άρα όμοια και την $(2.3 - 3)$.

Επομένως έχει αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3 - 1. *Η $x^2 + y^2 + Ax + By + \mathit{\Gamma} = 0$ παριστάνει εξίσωση περιφέρειας κύκλου τότε και μόνον, όταν $A^2 + B^2 - 4\mathit{\Gamma} \geq 0$.*

Η εξίσωση της εφαπτομένης της περιφέρειας σε ένα σημείο της, έστω $M\left(x_0, y_0\right)$, αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση

$$\left(x - x_0\right)\left(x - \alpha\right) + \left(y - y_0\right)\left(y - \beta\right) = R^2. \tag{2.3 - 5}$$



Σχήμα 2.3 - 1: παραμετρική παράσταση κύκλου

Διανυσματική εξίσωση

Έστω ότι το O συμπίπτει με την αρχή ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Τότε, αν $M(x,y)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, η διανυσματική εξίσωση είναι της μορφής

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \tag{2.3 - 6}$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= R\cos t, \\ y = y(t) &= R\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi), \end{aligned} \tag{2.3 - 7}$$

ενώ στην περίπτωση που το κέντρο του είναι το σημείο $K(\alpha,\beta)$ έχουμε (Σχ. 2.3 - 1)

$$\begin{aligned} x = x(t) &= \alpha + R\cos t \\ y = y(t) &= \beta + R\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi), \end{aligned} \tag{2.3 - 8}$$

όπου t παράμετρος.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η ακτίνα και το κέντρο των παρακάτω περιφερειών

i) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 = 0$,

ii) $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$.

2. Να υπολογιστεί η εξίσωση της περιφέρειας κύκλου, όταν

i) έχει κέντρο το σημείο $(1, -2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $x - 2y + 5 = 0$,

ii) διέρχεται από τα σημεία $(3, -2)$, $(1, 2)$ και $(-1, -2)$,

iii) διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο στην ευθεία $3x - 2y - 2 = 0$,

iv) είναι εγγεγραμμένη στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, -2)$, $(2, 3)$ και $(4, 1)$.

2.3.2 Έλλειψη

Ορισμός 2.3 - 2. *Ορίζεται σαν* **έλλειψη** *(ellipse) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος σημείου της, έστω M, από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2, που λέγονται εστίες (focus), είναι σταθερό (Σχ. 2.3 - 2).*

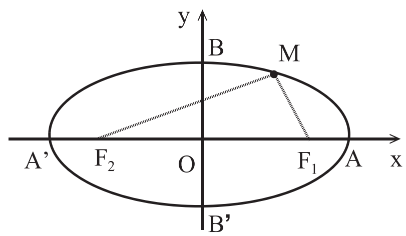
Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3 - 2 είναι $F_1M + F_2M = 2a$ σταθερά. Τότε για να προσδιοριστεί η εξίσωση των σημείων της έλλειψης, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο η αρχή O διχοτομεί την απόσταση F_1F_2, σαν άξονα των x την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία F_1 και F_2 και σαν άξονα των y την κάθετη στην F_1F_2 που διέρχεται από το O. Έστω $F_1F_2 = 2c$.

Η βασική ιδιότητα των σημείων της έλλειψης εκφράζεται για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x, y)$ με τη σχέση

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a.$$

Η σχέση αυτή με τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά ότι τα σημεία της έλλειψης επαληθεύουν την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad b^2 = a^2 - c^2. \tag{2.3 - 9}$$



Σχήμα 2.3 - 2: έλλειψη

Ιδιότητες

i) Η $(2.3-9)$ δεν μεταβάλλεται, όταν τεθεί στη θέση του (x, y) το $(-x, y)$ ή το $(x, -y)$ ή το $(-x, -y)$, δηλαδή η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς τους άξονες Ox, Oy και την αρχή των αξόνων O.

ii) Από την $(2.3-9)$ προκύπτει ότι $y^2/b^2 = 1 - x^2/a^2 \geq 0$, δηλαδή $-a \leq x \leq a$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $-b \leq y \leq b$. Άρα η έλλειψη περιλαμβάνεται στο ορθογώνιο με πλευρές $x = \pm a$ και $y = \pm b$.

Βασικά στοιχεία

- Η ευθεία που ενώνει τις εστίες της έλλειψης, λέγεται κύριος άξονάς της. Ο κύριος άξονας τέμνει την έλλειψη στα σημεία $A(a, 0)$ και $A'(-a, 0)$, που ορίζουν τις κύριες κορυφές της. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AA' ορίζει το μεγάλο άξονα (major axis) της έλλειψης και έχει μήκος $2a$. Ο άξονας των συντεταγμένων Ox έχει τη διεύθυνση AA', ενώ το σημείο O είναι στο μέσον του AA'. Ο άξονας Oy τέμνει την έλλειψη στα σημεία $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$, που λέγονται και δευτερεύουσες κορυφές της έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα BB' ορίζει το μικρό άξονα (minor axis) της έλλειψης. Τότε τα $OA = a$ και $OB = b$ ορίζουν το μεγάλο αντίστοιχα το μικρό ημιάξονα της έλλειψης.

- **Εκκεντρότητα** (eccentricity) της έλλειψης ορίζεται ο λόγος $e = c/a$ και προφανώς είναι $e < 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $M\,(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1\,. \tag{2.3 - 10}$$

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια είναι της μορφής $(2.3 - 6)$ όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a\cos t, \\ y = y(t) &= b\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi), \end{aligned} \tag{2.3 - 11}$$

όπου t παράμετρος.

Η εντολή που σχηματίζει μία περιφέρεια με το MATHEMATICA είναι

```
Show[Graphics[Circle[{x_0,y_0},r]]]
```

όπου (x_0, y_0) το κέντρο και r η ακτίνα, ενώ για την έλλειψη

```
Show[Graphics[Circle[{x_0,y_0},{a,b}]]]
```

όπου a ο μεγάλος και b ο μικρός ημιάξονάς της.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις

i) η εστιακή απόσταση είναι ίση με και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 3/5$,

ii) ο μικρός άξονας είναι ίσος με 8 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 11/12$.

2. Να υπολογιστούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων από το σημείο $(2, -1)$ στην έλλειψη $x^2 + 9y^2 = 9$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί η γωνία των εφαπτόμενων και το μήκος της χορδής της έλλειψης, που διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων.

3. Έστω η έλλειψη $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Τότε οι ευθείες με εξισώσεις $x = \pm a^2/c$ ορίζουν τις **διευθετούσες** (directrices) της. Δείξτε ότι

i) οι διευθετούσες είναι κάθετες στον μεγάλο άξονα της έλλειψης,

ii) ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της έλλειψης από την εστία και τη διευθετούσα είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της έλλειψης.

2.3.3 Υπερβολή

Ορισμός 2.3 - 3. *Ορίζεται σαν* **υπερβολή** *(hyperbola) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων τυχόντος σημείου της, έστω M, από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2, που λέγονται εστίες, είναι σταθερό (Σχ. 2.3 - 3).*

Έστω ότι $F_2M - F_1M = 2a$ σταθερά. Όμοια, όπως στην έλλειψη, θεωρώντας ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο το O διχοτομεί την απόσταση F_1F_2, σαν άξονα των x την ευθεία που διέρχεται από τις εστίες, σύμφωνα και με τη βασική ιδιότητα των σημείων της υπερβολής έχουμε για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x, y)$ τη σχέση

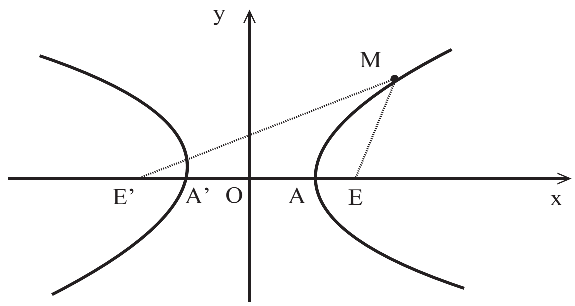
$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Τότε με τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά, ότι τα σημεία της έλλειψης επαληθεύουν την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad b^2 = c^2 - a^2. \qquad (2.3 - 12)$$

Ιδιότητες

i) Η $(2.3 - 12)$ δεν μεταβάλλεται, όταν θέσουμε στη θέση του το $(-x, y)$ ή το $(x, -y)$ ή το $(-x, -y)$, δηλαδή η υπερβολή είναι συμμετρική (congruent) ως προς τον άξονα Ox, Oy και την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 2.3 - 3: υπερβολή

ii) Από την $(2.3-12)$ προκύπτει ότι $y^2/b^2 = x^2/a^2 - 1 \geq 0$, δηλαδή $|x| \geq a$. Άρα η υπερβολή βρίσκεται στο δεξιό της ευθείας με εξίσωση $x = a$ και αριστερά της ευθείας με εξίσωση $x = -a$. Είναι προφανές ότι μεταξύ των ευθειών $x = a$ και $x = -a$ δεν υπάρχουν σημεία της υπερβολής.

Βασικά στοιχεία

- Ο άξονας Ox λέγεται πρωτεύων άξονας (major axis). Ο πρωτεύων άξονας τέμνει την υπερβολή στα σημεία A και A'. Τότε η (AA') ορίζει το μήκος του πρωτεύοντα άξονα. Ο άξονας Oy λέγεται δευτερεύων άξονας (minor axis), ενώ το O ορίζει το κέντρο της υπερβολής. Αν επί του άξονα Oy θεωρήσουμε τα σημεία $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$, τότε η (BB') ορίζει το μήκος του δευτερεύοντα άξονα.

- **Εκκεντρότητα** της υπερβολής ορίζεται ο λόγος $e = \gamma/a$, όπου προφανώς $e > 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο της $M\,(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1\,. \tag{2.3 - 13}$$

Συζυγείς υπερβολές

Έστω η υπερβολή με πρωτεύοντα άξονα τον Ox και εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.3 - 14}$$

Αν στην $(2.3 - 14)$ θεωρηθεί σαν πρωτεύοντας άξονας ο Oy έχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{2.3 - 15}$$

Οι υπερβολές $(2.3-14)$ και $(2.3-15)$, που ο πρωτεύων άξονας της μιας είναι δευτερεύων άξονας της άλλης, λέγονται **συζυγείς** (conjugate hyperbolae).

Ασύμπτωτες υπερβολής

Από την $(2.3 - 12)$ προκύπτει

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Άρα, όταν το x τείνει στο άπειρο κατά απόλυτη τιμή, το y τείνει επίσης στο άπειρο, ενώ ο λόγος y/x είναι πεπερασμένος αριθμός και συγκεκριμένα ισούται με

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{b}{a}\,x\,. \tag{2.3 - 16}$$

Η $(2.3 - 16)$ παριστάνει τότε δύο ευθείες προς τις οποίες, σύμφωνα με τα παραπάνω, τείνει η υπερβολή όταν το $x \to \pm\infty$. Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμπτωτες** (asymptotes)της υπερβολής.

Ισοσκελής υπερβολή

Ορισμός 2.3 - 4. *Αν σε μία υπερβολή το μήκος του πρωτεύοντα και του δευτερεύοντα άξονα είναι ίσα, τότε η υπερβολή λέγεται ισοσκελής και η εξίσωσή της γράφεται*

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{2.3 - 17}$$

Στην περίπτωση αυτή οι ασύμπτωτες είναι οι διχοτόμοι των γωνιών, που σχηματίζουν οι άξονες.

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a\cosh t, \\ y = y(t) &= b\sinh t, \end{aligned} \tag{2.3 - 18}$$

όπου $t \in \Re$ παράμετρος.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της υπερβολής στις παρακάτω περιπτώσεις

i) η εστιακή απόσταση είναι ίση με και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 5/4$,

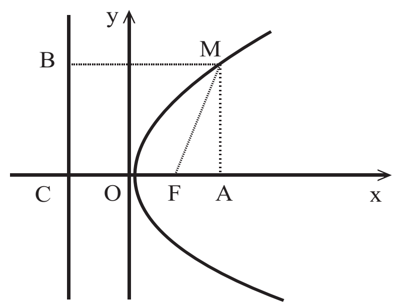
ii) οι εξισώσεις των ασύμπτωτων είναι $y = \pm 4x/3$ και η εστιακή απόσταση είναι ίση με 20.

2. Να υπολογιστεί η γωνία των ασύμπτωτων της υπερβολής που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 1.5$.

3. Έστω η υπερβολή $9x^2 - 4y^2 = 36$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτές της και την ευθεία $9x + 2y - 24 = 0$.

4. Να δειχθεί ότι κάθε εφαπτομένη υπερβολής σχηματίζει με τις ασύμπτωτές της τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

5. Έστω η υπερβολή $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Τότε οι ευθείες $x = \pm a^2/c$ λέγονται **διευθετούσες** της υπερβολής. Δείξτε ότι:



Σχήμα 2.3 - 4: παραβολή

i) οι διευθετούσες είναι κάθετες στον μεγάλο άξονα της υπερβολής,

ii) οι διευθετούσες δεν τέμνουν την υπερβολή,

iii) ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της υπερβολής από την εστία και τη διευθετούσα είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της υπερβολής.

2.3.4 Παραβολή

Ορισμός 2.3 - 5. *Ορίζεται σαν* **παραβολή** *(parabola) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από σταθερό σημείο, που λέγεται εστία (focus) και σταθερή ευθεία d, που λέγεται διευθετούσα (directrix), είναι σταθερή (Σχ. 2.3 - 4).*

Για να προσδιοριστεί η αναλυτική εξίσωση των σημείων της παραβολής, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο το O είναι επί της κάθετης ευθείας, που φέρεται από την εστία, έστω F, στη διευθετούσα d και στο μέσο της, ενώ σαν άξονας των x ορίζεται η κάθετη αυτή ευθεία.

Τότε, σύμφωνα με τη βασική ιδιότητα των σημείων της παραβολής, για το τυχόν σημείο $M(x,y)$ είναι $MB = MF$, οπότε, αν $p = CF$, έχουμε

$$x + \frac{1}{2}p = MF. \tag{1}$$

Αλλά

$$(MF)^2 = y^2 + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) προκύπτει τελικά, ότι τα σημεία της παραβολής επαληθεύουν την εξίσωση

$$y^2 = 2px. \tag{2.3 - 19}$$

Ιδιότητες

i) Η $(2.3 - 19)$ δεν μεταβάλλεται, όταν θέσουμε στη θέση του (x,y) το $(x,-y)$, δηλαδή η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox.

ii) Από την $(2.3 - 19)$ προκύπτει ότι $y^2 = 2px \geq 0$, δηλαδή $x \geq 0$. Άρα η παραβολή βρίσκεται στο δεξιό του άξονα Oy.

Βασικά στοιχεία

Ο άξονας Ox τέμνει τη παραβολή στο σημείο O, που λέγεται κορυφή, ενώ το p λέγεται ημιπαράμετρός της.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $M(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$-yy_0 = p\,(x + x_0)\,. \tag{2.3 - 20}$$

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y^2(t) &= 2\,p\,t, \end{aligned} \tag{2.3 - 21}$$

όπου $t \in \Re$ παράμετρος.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της παραβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) έχει εστία στο σημείο και διευθετούσα $y + 3 = 0$,

ii) διέρχεται από το σημείο $(5, 7)$, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y και έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$.

2. Να υπολογιστούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2x$, που διέρχονται από το σημείο $(-4, -1)$.

3. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$. Να προσδιοριστεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη, έτσι ώστε η ευθεία $y = \kappa x + \lambda$ να εφάπτεται της παραβολής.

2.3.5 Γενικό πρόβλημα κωνικών τομών

Η έλλειψη, η υπερβολή και η παραβολή λέγονται και **κωνικές τομές** (conic sections), επειδή είναι δυνατόν να προκύψουν από την τομή ενός κυκλικού κώνου εκ περιστροφής, έστω K, με ένα επίπεδο (Σχ. 2.3 - 5). Ειδικότερα έχουμε:

i) αν το επίπεδο, έστω Π, δεν είναι παράλληλο προς καμιά από τις γενέτειρες του κώνου, τότε η τομή του επιπέδου με τον κώνο θα δώσει μία έλλειψη (Σχ. 2.3 - 5 b), ενώ στην ειδική περίπτωση που είναι κάθετο στον άξονα του κώνου, η τομή είναι **κύκλος** (Σχ. 2.3 - 5 a),

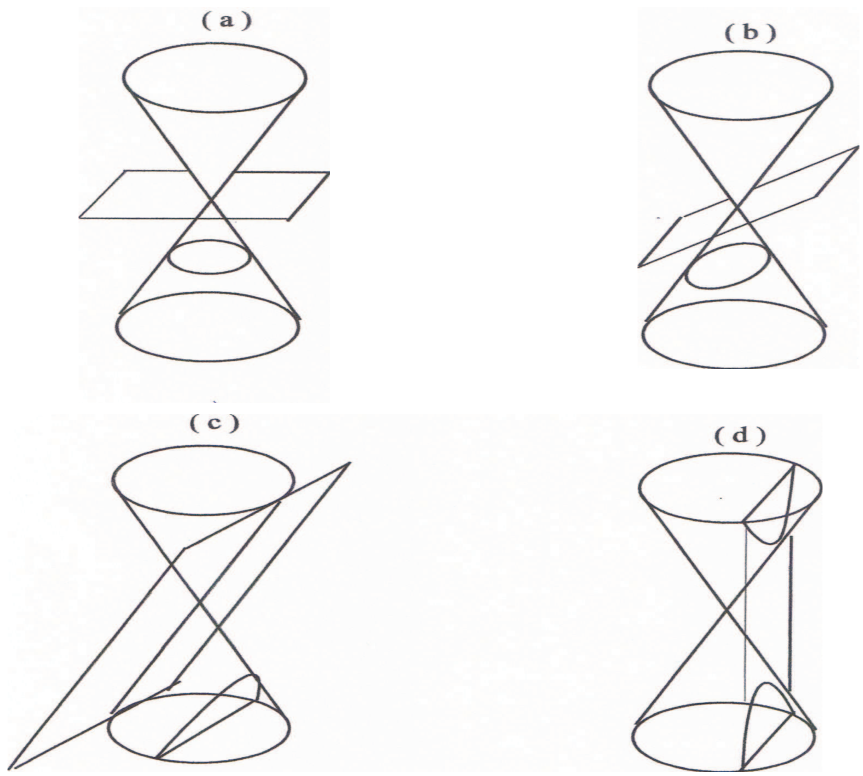
ii) αν το επίπεδο είναι παράλληλο προς δύο γενέτειρες, η τομή είναι **υπερβολή** (Σχ. 2.3 - 5 c) και,

iii) αν είναι παράλληλο προς ένα εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας του κώνου, η τομή είναι **παραβολή** (Σχ. 2.3 - 5 d).

Ειδικά όταν το επίπεδο διέρχεται από το σημείο O, η τομή συμπίπτει με μία ή δύο γενέτειρες του κώνου ή περιορίζεται στο σημείο O.

Πρόταση 2.3 - 2. *Η γενική εξίσωση των κωνικών τομών, όταν το σύστημα των συντεταγμένων δεν έχει μετατοπιστεί παράλληλα ή στραφεί, είναι της μορφής*

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad \textit{όταν} \quad |A| + |B| \neq 0 \qquad (2.3 - 22)$$



Σχήμα 2.3 - 5: γενικό πρόβλημα κωνικών τομών

και αντίστροφα.

Απόδειξη. [2] Επειδή το ευθύ προκύπτει άμεσα μετά τις πράξεις στις $(2.3-9)$, $(2.3-12)$ και $(2.3-19)$, αρκεί να δειχθεί το αντίστροφο. Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. $AB \neq 0$. Τότε η $(2.3-22)$ γράφεται

$$A\left(x^2+\frac{C}{A}x\right)+B\left(y^2+\frac{D}{B}y\right)+E=0$$

και τελικά μετά τις πράξεις

$$\begin{aligned}&\frac{1}{B}\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2+\frac{1}{A}\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2\\&=\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4A^2B^2}=k\end{aligned} \qquad (2.3\text{ - }23)$$

όπου k σταθερά. Τότε:

1-I. Αν $k \neq 0$, η $(2.3-23)$ γράφεται

$$\frac{1}{kB}\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2+\frac{1}{kA}\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2=1. \qquad (2.3\text{ - }24)$$

1-Ia. Αν $AB>0$, από την $(2.3-24)$ έχουμε

1-Ia.i. αν k ομόσημο προς τα A και B, η $(2.3-24)$ και κατά συνέπεια η $(2.3-22)$ παριστάνει **έλλειψη**, ενώ στην ειδική περίπτωση όπου $A=B>0$ **κύκλο**.

1-Ia.ii. Αν k ετερόσημο προς τα A και B, η $(2.3-24)$ είναι αδύνατη.

1-Ib. Αν $AB<0$, η $(2.3-24)$ και κατά συνέπεια η $(2.3-22)$ παριστάνει **υπερβολή**.

1-II. Αν $k=0$, η $(2.3-24)$ γράφεται

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2+B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2=0. \qquad (2.3\text{ - }25)$$

[2] Η απόδειξη να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

1-IIa. Αν $AB > 0$, η $(2.3-25)$ επαληθεύεται για

$$x = -\frac{C}{2A} \quad \text{και} \quad y = -\frac{D}{2B}\,.$$

1-IIb. Αν $AB < 0$, το πρώτο μέλος της $(2.3-25)$ αναλύεται σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων όρων ως προς x και y, οπότε η $(2.3-25)$ παριστάνει **δύο ευθείες**.

2. Αν $AB = 0$. Τότε:

2-I. Αν $A = 0$ και $B \neq 0$, η $(2.3-22)$ γράφεται

$$B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = -Cx - E + \frac{D^2}{4B}, \tag{2.3 - 26}$$

οπότε

2-Ia. Αν $C \neq 0$, η $(2.3-26)$ τελικά γράφεται

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = -\frac{C}{B}\left(x+\frac{D^2-4BE}{4BC}\right), \tag{2.3 - 27}$$

δηλαδή παριστάνει **παραβολή**.

2-Ib. Αν $C = 0$, η $(2.3-27)$ γράφεται

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{D^2-4BE}{4B}\,, \tag{2.3 - 28}$$

οπότε

2-Ib.i. αν $D^2-4BE > 0$, η $(2.3-28)$ και κατά συνέπεια η $(2.3-22)$ παριστάνει δύο **ευθείες παράλληλες** προς τον άξονα Ox,

2-Ib.ii. αν $D^2-4BE = 0$, η $(2.3-28)$ παριστάνει μια **ευθεία παράλληλη** στον άξονα Ox, και

2-Ib.iii. αν $D^2-4BE < 0$, η $(2.3-28)$ είναι αδύνατη.

2-II. Αν $A \neq 0$ και $B = 0$, τότε η $(2.3-22)$ γράφεται

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 = -Dy - E + \frac{C^2}{4A}\,. \tag{2.3 - 29}$$

Όμοια τότε η $(2.3-29)$, αν

- $D \neq 0$ παριστάνει **παραβολή**, ενώ όταν
- $D = 0$, παριστάνει δύο ή μία ευθείες παράλληλες προς τον άξονα Oy ή τελικά είναι αδύνατη.

■

Η γενικότερη μορφή των κωνικών τομών, όταν το σύστημα συντεταγμένων έχει μετατοπιστεί ή έχει στραφεί ή και τα δύο, αποδεικνύεται ότι είναι

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K = 0. \tag{2.3 - 30}$$

Η $(2.3 - 30)$ χαρακτηρίζει τότε τη γενική εξίσωση των καμπυλών δευτέρου βαθμού. Αντίστροφα αποδεικνύεται ότι κάθε εξίσωση της μορφής $(2.3 - 30)$, δεν δύναται να παριστάνει πέραν των κωνικών τομών, τίποτε άλλο εκτός από φανταστικές ευθείες και ελλείψεις.

Το πρόβλημα που προκύπτει τώρα, είναι ο τρόπος προσδιορισμού του είδους της κωνικής τομής από την $(2.3 - 30)$. Αρχικά εξετάζεται το πρόσημο της παράστασης $\Delta = B^2 - 4AC$. Συγκεκριμένα, αν:

i) $\Delta > 0$ η καμπύλη είναι υπερβολή, ενώ, αν $\Delta < 0$ έλλειψη. Τότε θέτουμε στην $(2.3 - 30)$ τους τύπους $(1.1 - 3)$ του Μαθήματος 1 και προσδιορίζουμε τα a, b. Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τις τιμές των a και b στην $(2.3 - 30)$ προκύπτει μία εξίσωση της μορφής

$$A\left(x'\right)^2 + Bx'y' + C\left(y'\right)^2 + D = 0, \tag{2.3 - 31}$$

οπότε από τον τύπο

$$\tan\theta = \frac{B}{A - C} \tag{2.3 - 32}$$

προσδιορίζεται η γωνία στροφής των αξόνων.

ii) $\Delta = 0$ η καμπύλη είναι παραβολή. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται μόνον ο τύπος $(2.3 - 32)$.

Παράδειγμα 2.3 - 1

Να προσδιοριστεί το είδος της καμπύλης

$$xy - 2y - 4x = 0. \tag{1}$$

Λύση. Είναι $B^2 - 4AC = 1 > 0$, οπότε πρόκειται για υπερβολή. Θέτοντας στην (1) τους τύπους $(1.1 - 3)$ του Μαθήματος 1 έχουμε

$$x'y' + (b-4)x' + (a-2)y' + ab - 2b - 4a = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι $b - 4 = 0$ και $a - 2 = 0$. Άρα $b = 4$ και $a = 2$, οπότε οι αρχικοί άξονες έχουν μετατοπιστεί στο σημείο $(2, 4)$. Τότε η (1) γράφεται

$$x'y' = 8, \tag{2}$$

οπότε η υπερβολή έχει ασύμπτωτες τους άξονες $O'x'$ και $O'y'$. Από την $(2.3-32)$ προκύπτει τότε ότι $\tan 2\theta \to +\infty$, δηλαδή $\theta = \pi/4$. Θέτοντας την τιμή αυτή στους τύπους $(1.1 - 5)$ του Μαθήματος 1 προκύπτει

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' - y''\right) \text{ και } y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + y''\right), \tag{3}$$

όπου $O'x''y''$ οι άξονες συντεταγμένων μετά τη στροφή. Τότε η (2) σύμφωνα με την (3) γράφεται

$$\left(x''\right)^2 - \left(y''\right)^2 = 16$$

δηλαδή πρόκειται για ισοσκελή υπερβολή.

Παράδειγμα 2.3 - 2

Όμοια το είδος της καμπύλης

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 10y + 5 = 0. \tag{4}$$

Λύση. Είναι $B^2 - 4AC = 0$, οπότε πρόκειται για παραβολή. Τότε από την $(2.3 - 32)$ προκύπτει ότι $\tan 2\theta \to +\infty$, οπότε $\theta = \pi/4$. Όμοια θέτοντας την τιμή αυτή στους τύπους $(1.1 - 5)$ του Μαθήματος 1 προκύπτει

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' - y'\right) \text{ και } y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right)$$

όπου $Ox'y'$ οι άξονες συντεταγμένων μετά τη στροφή. Άρα η (4) γράφεται

$$\left(x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{\sqrt{2}}\left(y' - \frac{11}{28\sqrt{2}}\right),$$

δηλαδή πρόκειται για παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(3/2\sqrt{2},\, 11/28\sqrt{2}\right)$ και παράλληλη στον άξονα Oy'.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστεί το είδος των παρακάτω κωνικών τομών

i) $y^2 + 3x - 4y + 9 = 0$,

ii) $y^2 + 4xy + 4x^2 + 2y + 4x - 36 = 0$,

iii) $8y^2 + 4xy + 5x^2 + 16y + 4x - 28 = 0$,

iv) $2x^2 + 3xy - 2x^2 + 5x + 10y = 0$.

2. Δίνεται η καμπύλη $4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0$. Ζητείται να προσδιοριστεί η θέση της ευθείας $y = \lambda x$ ως προς την καμπύλη για τις διάφορες τιμές του λ.

[3]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος Θ. (2004), Γραμμική Άλγεβρα, ακδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–904–3

[4] Σχοινάς Χρ. (2009), Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας, Εκδόσεις Γκιούρδας, ISBN 960–387–748–4.

[5] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[6] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[7] Lipschutz S., Lipson M.L., Θεωρία και προβλήματα στη Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–805–093–6.

[8] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

[9] Strang G., (2005), Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–730–970–7.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων