Ενότητα 4

Δεσμευμένη Πιθανότητα - Ανεξαρτησία

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού πειράματος και $A \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο με $P(A) > 0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα, δεδομένου του A, είναι μία συνάρτηση $P(B|A)$, $B \subseteq \Omega$, που ορίζεται από τη σχέση

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad B \subseteq \Omega. \tag{1}$$

Όταν $P(A) = 0$, η $P(B|A)$ δεν ορίζεται. Για συγκεκριμένο ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$, η $P(B|A)$ καλείται δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου B δεδομένου του (ενδεχομένου) A.

Άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι ότι η $P(B|A)$, $B \subseteq \Omega$, για δεδομένο $A \subseteq \Omega$, ικανοποιεί τα τρία αξιώματα της πιθανότητας και ως γνήσια πιθανότητα ικανοποιεί και όλες τις ιδιότητες της (απόλυτης) πιθανότητας $P(A)$, $A \subseteq \Omega$.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω $A_\kappa \subseteq \Omega$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω με $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$, ισχύει

$$P(B) = \sum_{\kappa=1}^{\upsilon} P(A_\kappa) P(B|A_\kappa).$$

Τύπος του Bayes

Έστω $A_\kappa \subseteq \Omega$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω με $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots,$ και $B \subseteq \Omega$ ενδεχόμενο με $P(B) > 0$. Τότε

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{\kappa=1}^{\upsilon} P(A_\kappa)P(B|A_\kappa)}, \quad r = 1, 2, \ldots, \upsilon.$$

Παράδειγμα 1

Οι ηλεκτρικοί λαμπήρες προωθούνται στην αγορά συσκευασμένοι σε χαρτοκιβώτια των 25 λαμπήρων.
Ας υποθέσουμε ότι από ένα χαρτοκιβώτιο που περιέχει τρεις ελαπτωματικούς λαμπτήρες εξάγουμε δύο λαμπτήρες.
Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων A και B εξαγωγής ελαπτωματικού λαμπτήρα στην πρώτη και δεύτερη εξαγωγή, αντίστοιχα.

Λύση

(α) Αν οι εξαγωγές γίνονται με επανάθεση, τότε

$$P(A) = \frac{3}{25}, \quad P(B) = \frac{3}{25}.$$

(β) Αν οι εξαγωγές γίνονται χωρίς επανάθεση, τότε

$$P(A) = \frac{3}{25}, \quad P(A') = \frac{22}{25}$$

και η πιθανότητα του ενδεχομένου B υπολογίζεται με τη χρησιμοποιήση του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας ως

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') = \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} + \frac{22}{25} \cdot \frac{3}{24} = \frac{3}{25}.$$

Αξίζει ιδιαίτερης επισήμανσης το γεγονός ότι, σε αντίθεση με τη διαίσθηση μας, η πιθανότητα εξαγωγής ελαττωματικού λαμπτήρα είναι η ίδια είτε οι εξαγωγές γίνονται με επανάθεση είτε χωρίς επανάθεση.

Παράδειγμα 2

Στα διαγωνίσματα ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής μετά από κάθε ερώτηση δίνονται ν εναλλακτικές απαντήσεις, από τις οποίες μόνο μία είναι ορθή.
Ο εξεταζόμενος σημειώνει για κάθε ερώτηση την ορθή απάντηση αν την γνωρίζει, ή εκλέγει κατά τύχη και σημειώνει μία από τις ν απαντήσεις.
Έστω ότι ένας εξεταζόμενος, σύμφωνα με τις γνώσεις του, έχει πιθανότητα p να γνωρίζει την απάντηση μιας συγκεκριμένης ερώτησης. Δεδομένου ότι απάντησε ορθά στη συγκεκριμένη αυτή ερώτηση, ποιά είναι η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση ;

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο ο εξεταζόμενος να γνωρίζει την απάντηση της συγκεκριμένης ερώτησης και B το ενδεχόμενο να απαντήσει ορθά σ' αυτή. Τότε, σύμφωνα με τον τύπο του Bayes, έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')}$$

και επειδή

$$P(A) = p, \;\; P(A') = 1 - p, \;\; P(B|A) = 1, \;\; P(B|A') = 1/\upsilon,$$

συνάγουμε για τη ζητουμένη πιθανότητα την έκφραση

$$P(A|B) = \frac{p}{p + (1-p)(1/\upsilon)} = \frac{\upsilon p}{1 + (\upsilon - 1)p}.$$

Στην περίπτωση που $\upsilon = 3$ και $p = 9/10$, $P(A|B) = 27/28$.

Η διερεύνηση, σε γενικές γραμμές, της δεσμευμένης πιθανότητας και η σύγκρισή της με την απόλυτη πιθανότητα αποκαλύπτει την ανάγκη εισαγωγής και μελέτης της έννοιας της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων.

Σχετικά, ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο Ω και δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$.
Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας συνάγουμε ότι

(α) αν A και B είναι ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα, $AB = \emptyset$, τότε $P(B|A) = 0$, επειδή, δεδομένης της πραγματοποίησης του A, αποκλείεται η πραγματοποίηση του B, ενώ

(β) αν το ενδεχόμενο A είναι υποενδεχόμενο του B, $A \subseteq B$, τότε $P(B|A) = 1$, επειδή η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση και του B.

Αυτές είναι οι δύο ακραίες περιπτώσεις, όπου η γνώση της πραγματοποίησης του A μας παρέχει σαφή πληροφορία καθορίζοντας την πιθανότητα πραγματοποίησης του B.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, τόσο από θεωρητική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών, παρουσιάζει η περίπτωση όπου A και B ενδεχόμενα τέτοια ώστε

$$P(B|A) = P(B),$$

στην οποία η γνώση της πραγματοποίησης του A δεν έχει καμία επίδραση στην πραγματοποίηση του B.

Το ενδεχόμενο B καλείται τότε *στοχαστικώς ανεξάρτητο* του A.

Ορισμός

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A, B \subseteq \Omega$. Τα ενδεχόμενα A και B καλούνται (στοχαστικώς) ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$P(AB) = P(A)P(B).$$