Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ενότητα 2: Μετασχηματισμός Laplace

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Βιοϊατρικής Τεχνολογίας ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 2

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

2.1 Ορισμός και θεώρημα ύπαρξης

Ορισμός 2.1 - 1 (ορισμός μετασχηματισμού). *Έστω $f(t)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[0, +\infty]$ και $\sigma > 0$ σταθερά. Τότε ορίζεται σαν μετασχηματισμός Laplace της f και συμβολίζεται με $\mathcal{L}[f(t)]$ ή συντομότερα $\mathcal{L}(f)$, η συνάρτηση που ορίζεται από την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος του 1ου είδους*[1]

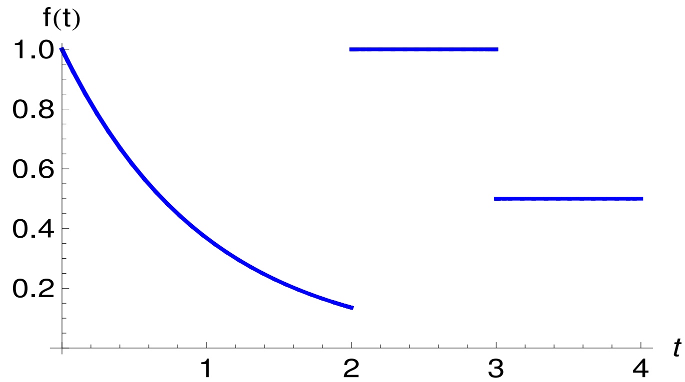
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \mu\varepsilon \quad s \geq \sigma, \tag{2.1 - 1}$$

όταν το ολοκλήρωμα υπάρχει. Η παράμετρος s είναι δυνατόν να είναι και μιγαδικός αριθμός, αν υποτεθεί ότι $Re(s) \geq 0$.

Η φυσική σημασία του μετασχηματισμού εξαρτάται από τη συνάρτησης $f(t)$. Στην $(2.1 - 1)$ η $f(t)$ λέγεται τότε ο **αντίστροφος μετασχηματισμός** της $F(s)$ και συμβολίζεται με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \tag{2.1 - 2}$$

[1] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.



Σχήμα 2.1 - 1: συνάρτηση $f(t)$ συνεχής για κάθε $t \in [0,2) \cup (2,3) \cup (3,4)$, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια στα σημεία $t = 2,\, 3$ με $\lim_{t\to 2-0} e^{-t} = e^{-1}$, $\lim_{t\to 2+0} f(t) = 1$, $\lim_{t\to 3-0} f(t) = 1$ και $\lim_{t\to 3+0} f(t) = 0.5$.

Στο εξής θα θεωρείται ότι το s είναι πραγματικός αριθμός και θα συμβολίζεται με τα κεφαλαία γράμματα F, X, I κ.λπ. οι μετασχηματισμένες κατά Laplace συναρτήσεις των f, x, i κ.λπ., αντίστοιχα.

Ορισμός 2.1 - 2. *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $[a,b]$ θα λέγεται* **κατά τμήματα συνεχής** *(Σχ. 2.1 - 1), όταν είναι ορισμένη για κάθε $t \in [a,b]$ και υποδιαιρώντας το διάστημα $[a,b]$ σε ν το πλήθος υποδιαστήματα της μορφής (a_k, b_k); $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$ το όριό της στα άκρα του διαστήματος (a_k, b_k) είναι πεπερασμένο για κάθε $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$.*

Ο ορισμός αυτός εύκολα γενικεύεται για την περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

Ορισμός 2.1 - 3. *Μια συνάρτηση $f(t)$ λέγεται* **συνάρτηση εκθετικής τάξης** *(function of exponential order), όταν υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με $t_0,\, M > 0$, έτσι ώστε*

$$|f(t)| < M\, e^{\gamma\, t} \quad \text{για κάθε} \quad t > t_0. \tag{2.1 - 3}$$

Τότε το γ ορίζει την τάξη της f.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η συνθήκη που πρέπει να ισχύει, έτσι ώστε να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 2.1 - 1 (ύπαρξης του μετασχηματισμού). *Έστω η συνάρτηση $f(t)$ που είναι ορισμένη για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν η f είναι*

i) κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$ όπου $\alpha > 0$,

ii) εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με t_0, $M > 0$, έτσι ώστε

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t \in [0, +\infty), \tag{2.1 - 4}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ υπάρχει για κάθε $s > \gamma$.

Η απαίτηση της κατά τμήματα συνεχούς συνάρτησης και η ισχύς της (2.1−4) ορίζουν τις λεγόμενεςσυνθήκες Dirichlet. Το σύνολο των συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet, δηλαδή των συναρτήσεων που υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, θα συμβολίζεται στο εξής με $D_{\mathcal{L}}$.

Δίνονται στη συνέχεια υπολογισμοί του μετασχηματισμού Laplace με τον Ορισμό 2.1 - 1.

Παράδειγμα 2.1 - 1

Έστω $f(t) = A$ όπου A σταθερά. Τότε[2]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_0^{+\infty} Ae^{-st}dt = -\frac{A}{s} \lim_{x+\infty} e^{-st}\Big|_0^x \\
&= -\frac{A}{s}\left(\lim_{x+\infty} e^{-sx} - e^0\right) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}(A) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \tag{2.1 - 5}$$

[2] Η συνάρτηση e^x ορίζεται για κάθε $x \in \Re$ και ισχύει: $\lim_{x\to-\infty} = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$.

Παράδειγμα 2.1 - 2

Όμοια, έστω $f(t) = e^{-at}$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}\,dt \\
&= -\frac{1}{s+a}\lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)t}\Big|_0^x = -\frac{1}{s+a}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)x} - e^0\right] \\
&= \frac{1}{s+a}, \quad \text{όταν} \quad s+a>0.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a} \quad \text{με} \quad s+a>0. \tag{2.1 - 6}
$$

Επομένως

$$
\mathcal{L}\left[e^{3t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{-(-3)\,t}\right] = \frac{1}{s+3} \quad \text{με} \quad s+3>0.
$$

2.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που με τη χρήση τους υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί των διαφόρων συναρτήσεων[3].

Θεώρημα 2.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω f, $g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν κ, $\lambda \in \Re$ ισχύει*

$$
\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)]. \tag{2.2 - 1}
$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται για ν-το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 2.2 - 1

Είναι γνωστό ότι αν $f(t) = \sin t$, τότε $\sin t = \left(e^{it} - e^{-it}\right)/2i$ όπου i η φανταστική μονάδα. Σύμφωνα με τον τύπο $(2.1-6)$ και τη γραμμική ιδιότητα

[3] Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύεται ότι ισχύουν επίσης και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace - Μάθημα 3.

έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin t) &= \frac{1}{2i}\,\mathcal{L}\left(e^{it}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right) = \frac{1}{2i}\,\mathcal{L}\left(e^{-(-\mathbf{i})\,t}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s+(-i)} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2+1}\,,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}\,. \tag{2.2 - 2}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}(\cos t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{it} + e^{-it}\right] = \frac{s}{s^2+1} \tag{2.2 - 3}$$

και

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at} - e^{-at}\right] = \frac{s}{s^2-a^2}\,, \tag{2.2 - 4}$$

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at} + e^{-at}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}\,, \tag{2.2 - 5}$$

όταν $s > a > 0$.

Θεώρημα 2.2 - 2. *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}\,F\left(\frac{s}{k}\right) \quad \text{με} \quad k > 0. \tag{2.2 - 6}$$

Παράδειγμα 2.2 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 - 2 και τον τύπο $(2.2-6)$ είναι

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,, \tag{2.2 - 7}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{με} \quad \omega > 0. \tag{2.2 - 8}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2+4}\,, \quad \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}\,, \quad \text{κ.λπ.}$$

Θεώρημα 2.2 - 3 (προπορείας). *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *και* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, *τότε*

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a), \quad \text{όταν} \quad s+a>0 \text{ και } a>0. \tag{2.2 - 9}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 - 3 και τους τύπους $(2.2-7)$ - $(2.2-8)$ είναι:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\cos\omega t\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}, \tag{2.2 - 10}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}. \tag{2.2 - 11}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos 2t\right] &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}, \\
\mathcal{L}\left[e^{3t}\sin 2t\right] &= \mathcal{L}\left[e^{-(\mathbf{-3})\,t}\sin 2t\right] = \frac{2}{[s+(-3)]^2+2^2} \\
&= \frac{2}{s^2-6s+13}, \\
\mathcal{L}\left[e^{t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \mathcal{L}\left[e^{t}\left(\sin 2t\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\left[e^{t}\sin 2t\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\left[e^{t}\cos 2t\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\left[e^{-(-\mathbf{t})}\sin 2t\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\left[e^{-(-\mathbf{t})}\cos 2t\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2+2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s+1}{s^2-2s+5}.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.2 - 4 (υστέρησης). *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *με* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ *και*

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{αν} \quad t>a \\ 0 & \text{αν} \quad t<a, \end{cases}$$

τότε

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as}F(s), \quad \text{όταν} \quad t > a > 0. \tag{2.2 - 12}$$

Με το θεώρημα αυτό δίνεται η δυνατότητα να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης, που ορίζεται για $t > a$ με $a > 0$. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων έχουμε στη μελέτη συστημάτων που ενεργοποιούνται τη χρονική στιγμή $t = a$ αντί της $t = a$.

Παράδειγμα 2.2 - 3

Επειδή $\mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{3\,!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 - 4 ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} (t-1)^3 & \text{αν} \quad t > 1 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 1 \end{cases} \qquad \text{είναι} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{6\,e^{-s}}{s^4}\,.$$

Άλλες εφαρμογές του Θεωρήματος 2.2 - 3 θα δοθούν στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 2.2 - 5. *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d\,F(s)}{ds} = -F'(s).$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά n φορές το Θεώρημα 2.2 - 5, τελικά προκύπτει

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n\,\frac{d^n\,F(s)}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s), \tag{2.2 - 13}$$

όταν $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

Παράδειγμα 2.2 - 4

Σύμφωνα με τον τύπο $(2.2 - 8)$ είναι: $\mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2+9}$. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(2.2 - 13)$ για $n = 1,\, 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t\,\sin 3t\right] &= (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\,, \\ \mathcal{L}\left[t^2\,\sin 3t\right] &= (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\right] = \frac{18\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3}\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2 - 5

Όμοια σύμφωνα με τον τύπο $(2.2-8)$ είναι: $\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a}$ με $s+a>0$. Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά τον τύπο $(2.2-13)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t\,e^{-at}\right] &= (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^2\,e^{-at}\right] &= (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = \frac{\overbrace{2}^{2\,!}}{(s+a)^3}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^3\,e^{-at}\right] &= (-1)^3\,\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{2\,!}{(s+a)^3}\right] = \frac{\overbrace{2\cdot 3}^{3\,!}}{(s+a)^4}\,,\\
\cdots \quad &\quad \cdots\\
\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] &= (-1)^n\,\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{(n-1)\,!}{(s+a)^n}\right] = \frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] = \frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,, \tag{2.2 - 14}$$

όταν $n=0,\,1,\,\ldots$ και $s+a>0$.

Αν στην $(2.2-14)$ είναι $a=0$, τότε

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n\,!}{s^{n+1}}\,, \quad \text{όταν} \quad n=0,\,1,\,\ldots\,. \tag{2.2 - 15}$$

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους $(2.2-14)$ και $(2.2-15)$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[t^2\,e^{3t}\right] = \frac{2\,!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3}\,, \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{3\,!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}\,.$$

Θεώρημα 2.2 - 6 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \textit{με} \quad s > a. \tag{2.2 - 16}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την $(2.2-16)$ για τη δεύτερης τάξης παράγωγο της f, υποθέτοντας ότι η f'' είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s\,\mathcal{L}\left[f'(t)\right] - f'(0) = s\left\{s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\right\} - f'(0),$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \qquad (2.2 - 17)$$

Παράδειγμα 2.2 - 6

Έστω $f(t) = t\sin t$. Τότε $f(0) = 0$, ενώ $f'(t) = \sin t + t\cos t$, οπότε $f'(0) = 0$. Άρα σύμφωνα με την $(2.2-17)$ και με τύπο $(2.2-13)$ για $n = 1$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[t\sin t] - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[t\sin t] = \frac{2s^3}{(s^2+1)^2}\,.$$

Άλλες εφαρμογές του θεωρήματος θα δοθούν στη λύση των διαφορικών εξισώσεων (Μάθημα 4).

Το παρακάτω θεώρημα και το πόρισμα να παραλειφθούν σε πρώτη ανάγνωση.

Θεώρημα 2.2 - 7 (ολοκλήρωση του μετασχηματισμού). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει το $\lim_{t->0} \frac{f(t)}{t}$, τότε*

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(x)\,dx. \qquad (2.2 - 18)$$

Πόρισμα 2.2 - 1. *Επειδή $\lim_{s\to 0} e^{-st} = 1$, από την $(2.2-18)$ προκύπτει*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(x)\,dx. \qquad (2.2 - 19)$$

Παράδειγμα 2.2 - 7

Από τον τύπο $(2.2-2)$ και τη σχέση $(2.2-18)$ προκύπτει

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s,$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right).$$

Τότε από την $(2.2 - 19)$ έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. \qquad (2.2 - 20)$$

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ με το πρόγραμμα MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
LaplaceTransform[f(t),t,s]
```

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων $f(t)$:[4]

$i)$	$t^3 - t + 2$	$v)$	$e^{-2t}\cos 3t$
$ii)$	$\sin(2t)$	$vi)$	$t\cos 2t$
$iii)$	$t\sin 2t$	$vii)$	$\sin^2 3t$ (Υπ: $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$)
$iv)$	$t^2 \sin 3t$	$viii)$	$\cos^2 2t$ (Υπ: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$).

2. Όμοια των συναρτήσεων[5]

$i)$	$t\,e^{-t}\cos t$	$v)$	$t\,e^{-t}\sin 2t$
$ii)$	$t\,e^{-t}\cos \omega t$	$vi)$	$t^2\,e^{-2t}$
$iii)$	$t^3 e^{-2t}$	$vii)$	$t\,e^{-t}\sin \omega t$.

---

[4] $(i)\ \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$, $(i)\ \frac{2}{4+s^2}$,$(iii)\ \frac{4s}{\left(4+s^2\right)^2}$ $(iv)\ \frac{18\left(-3+s^2\right)}{\left(9+s^2\right)^3}$, $(v)\ \frac{2+s}{13+4s+s^2}$ $(vi)\ \frac{-4+s^2}{\left(4+s^2\right)^2}$, $(vii)\ \frac{18}{36s+s^3}$, $(viii)\ \frac{8+s^2}{16s+s^3}$.

[5] $(i)\ \frac{2s+s^2}{\left(2+2s+s^2\right)^2}$, $(ii)\ \frac{1-\omega^2-2s+s^2}{\left(1+\omega^2-2s+s^2\right)^2}$, $(iii)\ \frac{6}{(2+s)^4}$, $(iv)\ \frac{4(1+s)}{\left(5+2s+s^2\right)^2}$ $(v)\ \frac{2}{(2+s)^3}$, $(vi)\ \frac{2\omega(1+s)}{\left(1+\omega^2+2s+s^2\right)^2}$.

2.3 Μετασχηματισμός συναρτήσεων ειδικής μορφής

Περιοδικές συναρτήσεις

Θεώρημα 2.3 - 1. *Έστω $f \in D_{\mathcal{L}}$ όπου f μία κατά τμήματα συνεχής περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο T και $f(t) = 0$ για κάθε $t < 0$. Τότε*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt. \tag{2.3 - 1}$$

Παράδειγμα 2.3 - 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης (Σχ. 2.3 - 2 - **ημιανόρθωση** - half rectified sine wave function)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{αν} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases} \qquad \text{και } \; f(t + 2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \ge 0.$$

Λύση. Είναι $f(t) = 0$ για κάθε $t < 0$ και $T = 2\pi$. Τότε

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt = - \left. \frac{e^{-st} \left(s \sin t + \cos t \right)}{s^2 + 1} \right|_0^{\pi} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \, .$$

Άρα

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1 + e^{-\pi s}}{\left(s^2 + 1 \right) \left(1 - e^{-2\pi s} \right)} = \frac{e^{\pi s}}{\left(s^2 + 1 \right) \left(e^{\pi s} - 1 \right)}, \quad \text{όταν } \; s > 0.$$

Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα και να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων που ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι

$i) \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$

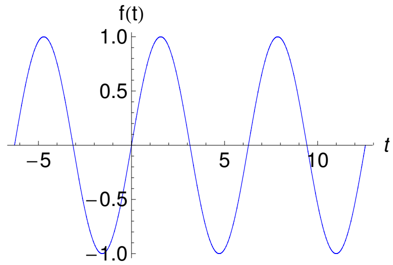
$ii) \quad f(t) = t\,; \quad 0 \le t < 1$

$iii) \quad f(t) = e^t\,; \; 0 \le t < 2$

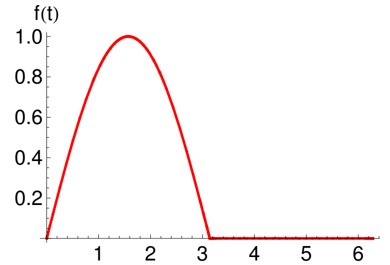
$iv) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \\ t - \pi & \text{αν} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases}$

$v) \quad f(t) = |\sin \omega t|\,; \; \omega > 0$

$vi) \quad f(t) = t^2\,; \quad 0 \le t < 1.$



(a)



(b)

Σχήμα 2.3 - 2: Παράδειγμα 2.3 - 1: (a) η συνάρτηση $\sin t$, όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$, (b) η συνάρτηση $\tilde{f}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$

Συνάρτηση γάμμα

[6] Πρόκειται για μια συνάρτηση με πολλές εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών[7]. Ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα του μεικτού είδους

$$\Gamma(a) = \int_{0_+}^{+\infty} e^{-t}\, t^{a-1}\, dt. \tag{2.3 - 2}$$

Το ολοκλήρωμα $(2.3-2)$ έχει έννοια, όταν $a > 0$ ή όταν ο a είναι μιγαδικός αριθμός με $Re(a) > 0$.

Έστω η συνάρτηση $f(t) = t^a$ όπου $t > 0$ και $a \in \Re - \{0, -1, -2, \ldots\}$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 - 1 είναι

$$\mathcal{L}\left(t^a\right) = \int_{0+}^{+\infty} t^a e^{-st}\, dt. \tag{2.3 - 3}$$

Αν $u = st$ με $u \in (0, +\infty)$ και $s > 0$, τότε $du = s\, dt$, οπότε η $(2.3-3)$ γράφεται

$$\mathcal{L}\left(t^a\right) = \frac{1}{s^{a+1}} \int_{0+}^{+\infty} u^a e^{-u}\, du. \tag{2.3 - 4}$$

Από την $(2.3-4)$ και την (1.3-1) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left(t^a\right) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\,;\;\; a \in \Re - \{0, -1, -2, \ldots\}. \tag{2.3 - 5}$$

[6] Η παράγραφος αυτή να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.
[7] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] κεφ. 8.

Παράδειγμα 2.3 - 2

Σύμφωνα με την $(2.3-5)$ είναι

$$\mathcal{L}\left(t^{1/3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3}+1)}{s^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{s^{4/3}} \approx 0.89298\, s^{-4/3}.$$

Η τιμή $\Gamma(\alpha)$ δίνεται από πίνακες, ενώ με το MATHEMATICA από την εντολή:

```
Gamma[a]
```

Μοναδιαία συνάρτηση του Heaviside

Ορισμός 2.3 - 1. *Η* **μοναδιαία βηματική συνάρτηση** *(unit step function) ή* **συνάρτηση Heaviside** *(Heaviside step function) ορίζεται από τη σχέση*

$$u(t-a) = u_a(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad t < a \\ 1 & \alpha\nu \quad t > a \end{cases} \qquad \mu\varepsilon \ \alpha \geq 0 \tag{2.3 - 6}$$

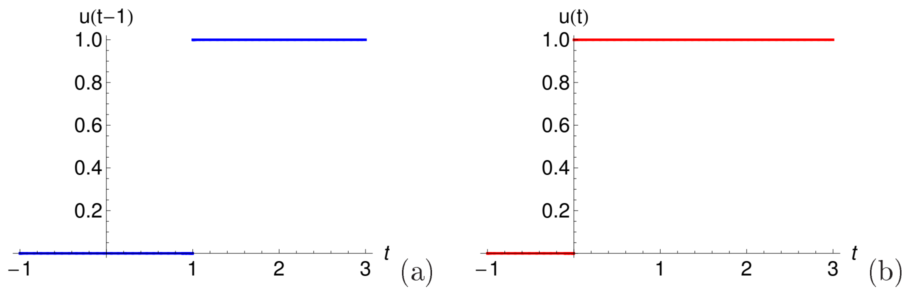
όπου το a δείχνει την τιμή του t στην οποία η συνάρτηση αλλάζει από την τιμή 0 στην τιμή 1 (Σχ. 2.3 - 3 (a) όπου $a=1$). Ειδικά, όταν $a=0$, δηλαδή η αλλαγή γίνεται όταν $t=0$, έχουμε τη συνάρτηση (Σχ. 2.3 - 3 (b))

$$u(t) = u_0(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad t < 0 \\ 1 & \alpha\nu \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.3 - 7}$$

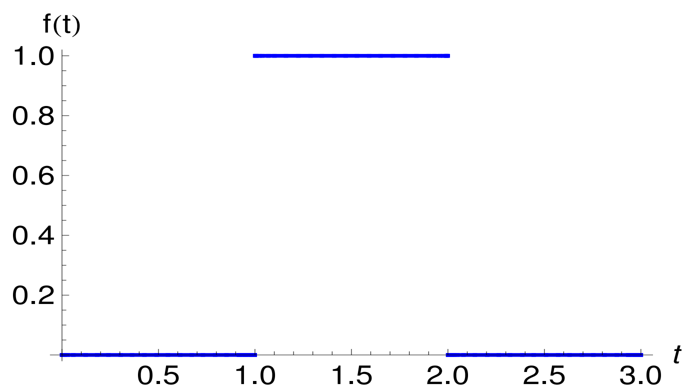
Ορισμός 2.3 - 2 (ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση φίλτρο). *Η συνάρτηση (Σχ. 2.3 - 4)*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad 0 < t < a \\ 1 & \alpha\nu \quad a < t < b \\ 0 & \alpha\nu \quad\quad t > b \end{cases} \qquad \acute{o}\pi o\upsilon \quad a, b \in \Re \quad \kappa\alpha\iota \quad b > a > 0 \tag{2.3 - 8}$$

λέγεται ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση φίλτρο.



Σχήμα 2.3 - 3: (a) η συνάρτηση $u(t-1) = u_1(t)$, όταν $t \in [-1, 3]$, (b) η $u(t) = u_0(t)$, όταν $t \in [-1, 3]$



Σχήμα 2.3 - 4: ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση φίλτρο, όταν $a = 1$, $b = 2$ και $t \in [0, 3]$ (square wave). Σύμφωνα με την $(2.3-8)$ είναι $f(t) = u(t-1) - u(t-2)$

Έχοντας υπ' όψιν τον Ορισμό 2.3 - 1 και την (2.3 − 6) ο ορθογώνιος παλμός εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων Heaviside ως εξής:

$$f(t) = u(t-a) - u(t-b). \tag{2.3 - 9}$$

Όπως άμεσα προκύπτει από τον Ορισμό 2.3 - 1 η συνάρτηση $u_a(t) = u(t-a)$ είναι συνεχής για κάθε $t \in \Re - \{a\}$, ενώ για $a = 1$ παρουσιάζει ασυνέχεια ύψους 1. Άρα είναι τμηματικά συνεχής, ενώ προφανώς είναι εκθετικής τάξης, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 - 1 θα υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης u_a για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Τότε από την (2.3 − 6) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t-a)] = \mathcal{L}\left[u_a(t)\right] &= \int_0^{+\infty} u(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{a} u(t-a)e^{-st}\,dt + \int_a^{+\infty} u(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= \int_a^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{e^{-as}}{s}\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \mathcal{L}\left[u_a(t)\right] = \frac{e^{-as}}{s}\,, \quad \text{όταν } s > 0 \text{ και } a \geq 0, \tag{2.3 - 10}$$

ενώ

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}\left[u_0(t)\right] = \frac{1}{s}\,, \quad \text{όταν } s > 0. \tag{2.3 - 11}$$

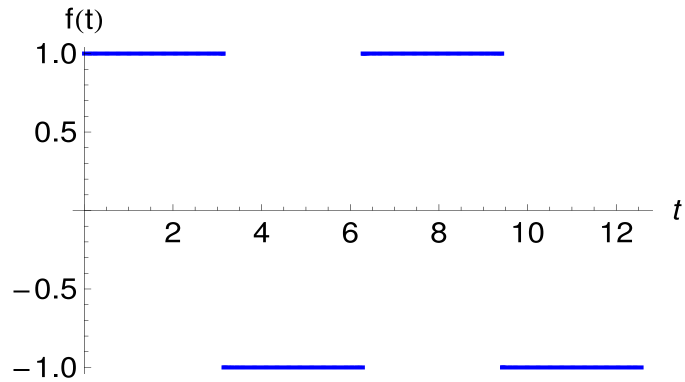
Η χρησιμότητα της μοναδιαίας συνάρτησης στο μετασχηματισμό Laplace είναι σημαντική, επειδή με αυτήν είναι δυνατό να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός πολλών σύνθετων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 2.3 - 3 (περιοδικός τετραγωνικός παλμός)

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης (Σχ. 2.3 - 5)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad 0 < t < \pi \\ -1 & \text{αν} \quad \pi < t < 2\pi \end{cases} \qquad \text{και } f(t+2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \geq 0$$

(periodic square wave).



Σχήμα 2.3 - 5: Παράδειγμα 2.3 - 3: διάγραμμα της $f(t)$ όταν $t \in [0, 4\pi]$

Λύση. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3 - 1, τη σχέση $(2.3-8)$ και το Σχ. 2.3 - 5 η $f(t)$ αναλυτικά στα επί μέρους διαστήματα περιγράφεται ως εξής:

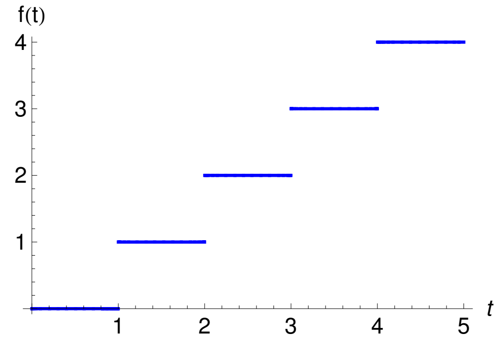
$$\begin{aligned}
(0,\pi) &: \quad u(t)-u(t-\pi), \\
(\pi,2\pi) &: \quad -[u(t-\pi)-u(t-2\pi)] = -u(t-\pi)+u(t-2\pi), \\
(2\pi,3\pi) &: \quad u(t-2\pi)-u(t-3\pi), \\
(3\pi,4\pi) &: \quad -[u(t-3\pi)-u(t-4\pi)] = -u(t-3\pi)+u(t-4\pi), \dots ,
\end{aligned}$$

οπότε

$$f(t) = u(t) - 2u(t-\pi) + 2u(t-2\pi) - 2u(t-3\pi) + 2u(t-4\pi) \dots .$$

Άρα σύμφωνα με τους τύπους $(2.3-10)$ - $(2.3-11)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{s} - 2\,\frac{e^{-\pi s}}{s} + 2\,\frac{e^{-2\pi s}}{s} - 2\,\frac{e^{-3\pi s}}{s} + \dots \\
&= \frac{1}{s}\left[1 - 2e^{-\pi s}\left(\underbrace{1 - e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} - \dots}_{\text{γεωμετρική φθίνουσα πρόοδος με λόγο } e^{-\pi s}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-\pi s}\,\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\right) = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-\pi s}}{1+e^{-\pi s}} \\
&= \frac{1}{s}\,\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}\left(e^{-\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}}\right)}{e^{-\frac{\pi s}{2}}\left(e^{-\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}}\right)} = \frac{1}{s}\,\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}}}{e^{-\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}}}
\end{aligned}$$



Σχήμα 2.3 - 6: Παράδειγμα 2.3 - 4: το διάγραμμα της $f(t)$, όταν $t \in [0,5]$

$$= \frac{1}{s}\tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \text{όταν} \quad s>0.$$

Παράδειγμα 2.3 - 4 (κλιμακωτή συνάρτηση)

Όμοια της συνάρτησης $g(t)$ με διάγραμμα στο Σχ. 2.3 - 6 (staircase function).

Λύση. Η $g(t)$ αναλυτικά περιγράφεται στο Σχ. 2.3 - 7. Τότε όμοια σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3 - 1 και τη σχέση (2.3 − 8) έχουμε

$$\begin{aligned} g(t) &= u(t)-u(t-1)+2[u(t-1)-u(t-2)]+3[u(t-2)-u(t-3)+\ldots \\ &= u(t)+u(t-1)+u(t-2)+\ldots, \end{aligned}$$

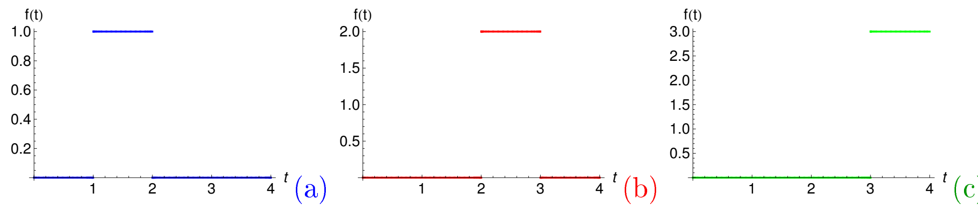
οπότε

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\ldots = \frac{1}{s\,(1-e^{-s})}, \quad \text{όταν } s>0.$$

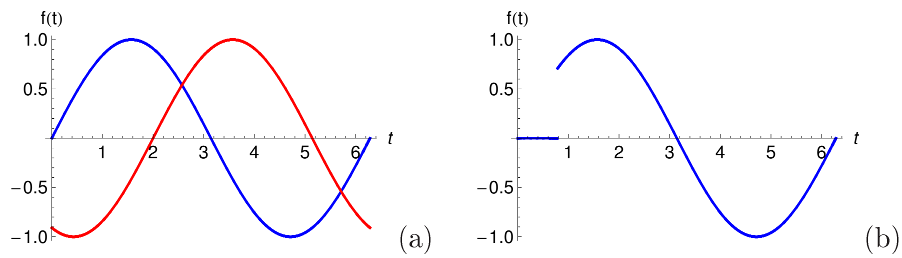
Το Θεώρημα 2.2 - 4 με χρήση της μοναδιαίας συνάρτησης γράφεται:

Θεώρημα 2.3 - 2 *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s) \quad \text{με } t>a>0. \tag{2.3 - 12}$$



Σχήμα 2.3 - 7: (a) η συνάρτηση $u_1(t) - u_2(t)$ δημιουργεί το διάγραμμα της $f(t) = 1;\ 1 < t < 2$ με $f(t) = 0;\ t \leq 1$ ή $t \geq 2$, (b) $2[u_2(t) - u_3(t)]$ της $f(t) = 2;\ 2 < t < 3$ με $f(t) = 0;\ t \leq 2$ ή $t \geq 3$ και (c) $3[u_3(t) - u_4(t)]$ της $f(t) = 3;\ 3 < t < 4$ με $f(t) = 0;\ t \leq 3$ ή $t \geq 4$ όταν $t \in [0, 4]$



Σχήμα 2.3 - 8: (a): η συνάρτηση $\sin t$ μπλε και η $\sin(t-2)$ κόκκινη καμπύλη ($a = 2$). (b): η συνάρτηση $u(t - \pi/4) \sin t$, όπου το διάγραμμα της $f(t)$ μηδενίζεται, όταν $t \leq \pi/4$

Παρατηρήσεις 2.3 - 1

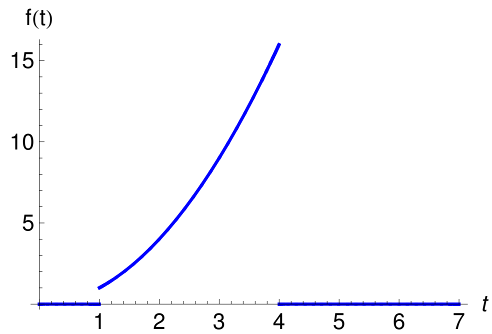
a. Το διάγραμμα της $f(t-a)$ με $a > 0$, προκύπτει από το διάγραμμα της $f(t)$ με μετατόπιση παράλληλη προς τη θετική φορά του t-άξονα κατά a μονάδες μήκους (Σχ. 2.3 - 8a).

b. Η μοναδιαία συνάρτηση $u(t-a)$, όταν πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση $f(t)$, μηδενίζει το διάγραμμα της $f(t)$, στο τμήμα της που ορίζεται για $t \leq a$ (Σχ. 2.3 - 8b).

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.3 - 1b και το Θεώρημα 2.2 - 4 προκύπτει:

Πόρισμα 2.3 - 1 *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$, τότε*

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-a)] = e^{-as}\,\mathcal{L}[g(t)] \quad \text{όπου} \quad g(t) = f(t+a), \tag{2.3 - 13}$$



Σχήμα 2.3 - 9: Παράδειγμα 2.3 - 5: το διάγραμμα της $f(t)$, όταν $t \in [0,5]$

όταν $t > a > 0$.

Παράδειγμα 2.3 - 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης (Σχ. 2.3 - 9)

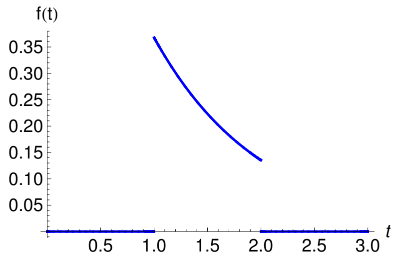
$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν} \quad 1 < t < 4 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 1 \text{ ή } t > 4 \end{cases}$$

Λύση. Σύμφωνα με τη σχέση (2.3−8) έχουμε $f(t) = t^2\,u(t-1) - t^2\,u(t-4)$, οπότε από την $(2.3-13)$ προκύπτει

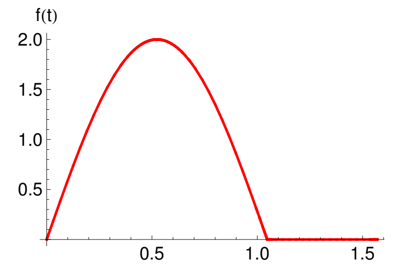
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}\left[t^2\,u(t-1)\right] - \mathcal{L}\left[t^2\,u(t-4)\right] \\ &= e^{-s}\,\mathcal{L}\left[(t+1)^2\right] - e^{-4s}\,\mathcal{L}\left[(t+4)^2\right] \\ &= e^{-s}\,\mathcal{L}\left[t^2+2t+1\right] - e^{-4s}\,\mathcal{L}\left[t^2+8t+16\right] \\ &= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right) - e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{16}{s}\right). \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να παρασταθούν με τη συνάρτηση Heaviside και στη συνέχεια να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, που ο



(a)



(b)

Σχήμα 2.3 - 10: (a) η συνάρτηση $f(t)$ και (b) η $g(t)$

περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι (k, $a > 0$):

$$i) \quad f(t) = \begin{cases} k & \text{αν} \quad 0 < t < a \\ 0 & \text{αν} \quad a < t < 2a \end{cases} \qquad iii) \quad f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad 0 < t < 2 \\ -3 & \text{αν} \quad 2 < t < 4 \\ 1 & \text{αν} \quad 4 < t < 6 \end{cases}$$

$$ii) \quad f(t) = \begin{cases} 2 & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{αν} \quad 1 < t < 2 \\ 0 & \text{αν} \quad 2 < t < 3 \end{cases} \qquad iv) \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad a < t < 2a \\ 2 & \text{αν} \quad 2a < t < 3a \\ 3 & \text{αν} \quad 3a < t < 4a. \end{cases}$$

2. Όμοια των συναρτήσεων (Σχ. 2.3 - 10)

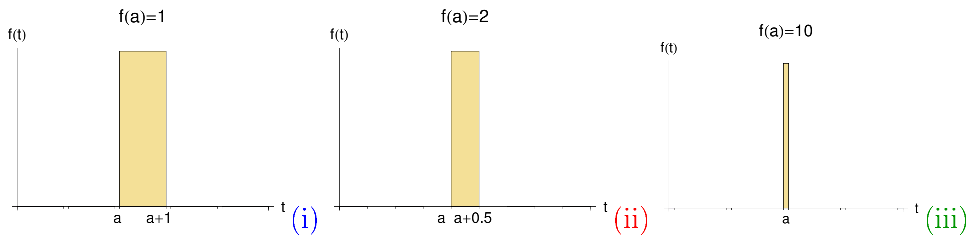
$$a) \quad f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{αν} \qquad 0 < t < 2 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 1 \quad \text{ή} \quad t > 2 \end{cases}$$

$$b) \quad f(t) = \begin{cases} 2\sin 3t & \text{αν} \qquad 0 < t < \dfrac{\pi}{3} \\ 0 & \text{αν} \quad t < 0 \quad \text{ή} \quad t > \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Συνάρτηση δέλτα του Dirac

Έστω ένας απλός ορθογώνιος παλμός πλάτους $d = \epsilon$ και ύψους $h = f(a) = 1/\epsilon$ τη χρονική στιγμή $t = a$ (Σχ. 2.3 - 11 a), που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon} & \text{αν} \qquad a \le t \le a + \epsilon \\ 0 & \text{αν} \quad t < a \quad \text{ή} \quad t > a + \epsilon, \end{cases} \qquad \text{όταν} \quad a,\, \epsilon > 0. \tag{2.3 - 14}$$



Σχήμα 2.3 - 11: Συνάρτηση δέλτα του Dirac: ο ορθογώνιος παλμός πλάτους $d = \epsilon$ και ύψους $h = f(a) = 1/\epsilon$ τη χρονική στιγμή $t = a$, όταν (i) $d = \epsilon = 1$, (ii) $\tilde{d} = 0.5$ και (iii) $\hat{d} = 0.1$

Τότε προφανώς το εμβαδόν E του παλμού θα είναι ίσο με $E = dh = 1$. Περιορίζοντας τώρα το πλάτος του παλμού σε $\tilde{d} = \epsilon/2$ (Σχ. 2.3 - 11 b), διατηρώντας το εμβαδό ίσο με τη μονάδα, θα πρέπει το ύψος του παλμού να διπλασιαστεί, δηλαδή να γίνει $\tilde{h} = 2/\epsilon$. Συνεχίζοντας τη διαδικασία ελάττωσης του πλάτους (Σχ. 2.3 - 11 c), δηλαδή θεωρώντας ότι το πλάτος ϵ τείνει σταδιακά στο μηδέν και διατηρώντας πάντοτε το εμβαδό του παλμού ίσο με 1, είναι προφανές ότι το ύψος του παλμού τείνει στο άπειρο.

Ορισμός 2.3 - 3 *Το όριο* $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t)$, *όταν η* $f_\epsilon(t)$ *δίνεται από την* $(2.3-14)$, *ορίζει τη συνάρτηση* **συνάρτηση δέλτα** *του Dirac (Dirac delta function) ή της* **μοναδιαίας κρούσης** *(unit impulse function), που συμβολίζεται με* $\delta(t-a)$.

Παρατήρησεις 2.3 - 2

Η συνάρτηση δέλτα του Dirac

i) δεν είναι συνάρτηση με τη συνηθισμένη έννοια, επειδή καμιά από τις γνωστές μορφές συναρτήσεων δεν έχει τις ιδιότητες του Ορισμού 2.3 - 3,

ii) στη θεωρία των παλμών και σε άλλες γενικότερα εφαρμογές, χρησιμοποιείται όπως οι συνήθεις συναρτήσεις[8].

[8] Βλέπε Μάθημα 4 (Διαφορικές Εξισώσεις) και βιβλιογραφία.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3 - 3 η συνάρτηση δέλτα περιγράφεται ως εξής:

$$\delta(t-a)=\begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t\neq a \\ +\infty & \text{αν} \quad t=a, \end{cases} \tag{2.3 - 15}$$

ενώ, όταν πρόκειται για τη χρονική στιγμή $t=0$, οπότε $a=0$, ως

$$\delta(t)=\begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t\neq 0 \\ +\infty & \text{αν} \quad t=0. \end{cases} \tag{2.3 - 16}$$

Από τις $(2.3-15)$ - $(2.3-16)$ προκύπτει ότι η συνάρτηση δέλτα του Dirac επαληθεύει την ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)\,dt=1. \tag{2.3 - 17}$$

Ιδιότητες 2.3 - 1

Δίνονται στη συνέχεια οι σημαντικότερες ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα $\delta(t)$:

I. Για κάθε k με $k\neq 0$ ισχύει (scaling property)

$$\delta(k\,t)=\frac{\delta(t)}{|k|}\,. \tag{2.3 - 18}$$

Επομένως

$$\delta(-t)=\delta(t). \tag{2.3 - 19}$$

δηλαδή η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι **άρτια** συνάρτηση.

II. Αν $f(t)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_{\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-a)\,dt=f(a) \tag{2.3 - 20}$$

(sifting or sampling property).

Μετασχηματισμός Laplace

Η συνάρτηση $(2.3-14)$ σύμφωνα με τη $(2.3-9)$ γράφεται

$$f_\epsilon(t) = u(t-a) - u(t-a-\epsilon), \tag{2.3 - 21}$$

οπότε έχοντας υπ' όψιν και την $(2.3-10)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f_\epsilon(t)\right] &= \frac{1}{\epsilon}\,\mathcal{L}\left[u(t-a) - u(t-a-\epsilon)\right] \\ &= \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+\epsilon)s}}{s}\right] = e^{-as}\,\left(\frac{1-e^{\epsilon\, s}}{\epsilon\, s}\right).\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta(t-a)] &= \lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{L}\left[f_\epsilon(t)\right] = e^{-as}\,\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1-e^{\epsilon\, s}}{\epsilon\, s} \\ &= (\text{κανόνας L'Hôspital}) \quad e^{-as}\cdot 1 = e^{-as},\end{aligned}$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δέλτα του Dirac είναι

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}, \tag{2.3 - 22}$$

όταν $a,\, s > 0$, ενώ, όταν $a = 0$, είναι

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \tag{2.3 - 23}$$

Παρατήρηση 2.3 - 1

Στην $(2.3-22)$, όταν $a < 0$, τότε

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = 0.$$

Παράδειγμα 2.3 - 6

Από την $(2.3-22)$ προκύπτει

$$\mathcal{L}[\delta(t-1)] = e^{-s}, \qquad \mathcal{L}[\delta(t-3)] = e^{-3s},$$

ενώ

$$\mathcal{L}[\delta(t+2)] = \mathcal{L}[\delta(t-(\overbrace{-2}^{a}))] = 0$$

σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.3 - 1, κ.λπ.

Από την $(2.3-22)$ σε συνδυασμό με την $(2.3-20)$ προκύπτει

$$\mathcal{L}[f(t)\delta(t-a)] = f(a)e^{-as}. \tag{2.3 - 24}$$

Από τον τύπο $(2.2-13)$[9] και τον $(2.3-22)$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[t^n\delta(t-a)\right] = (-1)^n\left[e^{-as}\right]^{(n)} = (-1)^n\left[(-1)^n a^n e^{-as}\right] = a^n\, e^{-as},$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left[t^n\delta(t-a)\right] = a^n\, e^{-as}, \tag{2.3 - 25}$$

όταν $a>0$ και $n=1,\,2,\,\ldots$. Ειδικά όταν $a\leq 0$, τότε

$$\mathcal{L}\left[t^n\delta(t-a)\right] = 0. \tag{2.3 - 26}$$

Παράδειγμα 2.3 - 7

Σύμφωνα με τον τύπο $(2.3-25)$ είναι

$$\mathcal{L}\left[t\delta(t-1)\right] = e^{-s} \qquad (a=1,\, n=1),$$

$$\mathcal{L}\left[t^2\delta(t-3)\right] = 3^2e^{-3s} = 9\,e^{-3s} \qquad (a=3,\, n=2),$$

ενώ σύμφωνα με τον $(2.3-26)$

$$\mathcal{L}\left[t^4\delta(t)\right] = 0 \qquad (a=0,\, n=4),$$

$$\mathcal{L}\left[t^3\delta(t+2)\right] = 0 \qquad (a=-2,\, n=3).$$

[9] Αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)$, όταν $n=1,\,2,\,\ldots$.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον τύπο $(2.2-13)$ αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}\left[\delta^{(n)}(t-a)\right] = s^n\, e^{-as}, \qquad (2.3\text{ - }27)$$

όταν $a \geq 0$ και $n = 1,\, 2,\, \ldots$. Ειδικά, όταν $a < 0$, είναι

$$\mathcal{L}\left[\delta^{(n)}(t-a)\right] = 0. \qquad (2.3\text{ - }28)$$

Παράδειγμα 2.3 - 8

Σύμφωνα με την $(2.3-27)$ είναι

$$\mathcal{L}\left[\delta^{(7)}(t-1)\right] = s^7\, e^{-s}, \qquad \mathcal{L}\left[\delta^{(5)}(t)\right] = s^5,$$

ενώ σύμφωνα με την $(2.3-28)$

$$\mathcal{L}\left[t^2\,\delta(t+3)\right] = \mathcal{L}\left[t^2\,\delta(t-(\overbrace{-3}^{a}))\right] = 0.$$

Άλλες εφαρμογές της συνάρτησης Dirac θα δοθούν στο Μάθημα 4 (Διαφορικές Εξισώσεις).

[10]

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Bronson, R. (1978), Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική, ISBN 978–000–761–014–3.

[4] Αθανασιάδη, Α. (1993), Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–219–7.

[5] Churchill R., Brown J. (2005), Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–7309–41–3.

[6] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[7] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Spiegel M., Schaum's Outlines – Laplace Transforms (1965), McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 978–007–060–231–1.

[9] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων