Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ενότητα 3: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Βιοϊατρικής Τεχνολογίας ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 3

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

3.1 Ορισμός και βασικά θεωρήματα

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα 2 Θεώρημα 2.1 το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace:

Θεώρημα 3.1 - 1. *Έστω η συνάρτηση $f(t)$ που είναι ορισμένη για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν η f είναι*

i) κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$ όπου $\alpha > 0$,

ii) εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με t_0, $M > 0$, έτσι ώστε

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t \in [0, +\infty), \tag{3.1 - 1}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ υπάρχει για κάθε $s > \gamma$.

Από το Θεώρημα 3.1 - 1 προκύπτουν:

Παρατηρήσεις 3.1 - 1

i) αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής ή τμηματικά συνεχής στο $[0, +\infty)$ και εκθετικής τάξης, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$.

ii) Έστω ότι $f(t)$, $g(t)$ δύο συνατήσεις ορισμένες στο $[0, +\infty)$. Τότε, αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ και αν η συνάρτηση $g(t)$ διαφέρει από τη $f(t)$ σε πεπερασμένο μόνο πλήθος σημείων του $[0, +\infty)$, τότε υπάρχει και ο μετασχηματισμός Laplace της $g(t)$ και ισχύει $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1 - 1

Έστω ότι $f(t) = e^{-2t}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+3}$ και

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t = 1 \\ e^{-2t} & \text{αν} \quad t \in [0, +\infty) - \{1\}, \end{cases} \qquad \text{με} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s+3},$$

δηλαδή $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, ενώ προφανώς $f(t) \neq g(t)$.

Από την Παρατήρηση 3.1 - 1 (ii) προκύπτει ότι, αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f(t)$ της $\mathcal{L}^{-1}F(s)$, τότε η $f(t)$ δεν είναι πάντοτε μονοσήμαντα ορισμένη.

Το μονοσήμαντο του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{L}^{-1}$ εξασφαλίζεται με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 - 2. *Έστω ότι η $f(t)$ είναι μια πραγματική, συνεχής ή τμηματικά συνεχής, εκθετικής τάξης συνάρτηση για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν για το μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ ορίζει μονοσήμαντα την $f(t)$.*

Στο εξής θα θεωρείται ότι οι συναρτήσεις πληρούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Θεώρημα 3.1 - 2, οπότε η αντίστροφη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace θα είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Οι ιδιότητητες του μετασχηματισμού Laplace ισχύουν ανάλογα και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Οι σημαντικότερες από αυτές δίνονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.1 - 3 (γραμμική ιδιότητα). *Αν* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ *και* $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, *τότε αν* $k,\, \lambda \in \Re$ *ισχύει*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[kF(s) + \lambda G(s)] &= k\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \lambda \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \\ &= kf(t) + \lambda g(t). \end{aligned} \tag{3.1 - 2}$$

Παράδειγμα 3.1 - 2

Έστω $f(t) = e^{-3t}$ και $g(t) = e^{t}$. Τότε

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\right] = \frac{1}{s+3} = F(s) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left[e^{t}\right] = \frac{1}{s-1} = G(s),$$

οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 - 3 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[2\,F(s) + 5\,G(s)] = 2\,\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + 5\,\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 2\,e^{-3t} + 5\,e^{t}.$$

Θεώρημα 3.1 - 4. *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \quad \mu\varepsilon \quad k > 0. \tag{3.1 - 3}$$

Παράδειγμα 3.1 - 3

Έστω

$$f(t) = \cos 4t, \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2 + 16} = F(s).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 - 4, όταν $k = 2$, έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F(\mathbf{2}s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{2}s}{(\mathbf{2}s)^2 + 16}\right] = \frac{1}{\mathbf{2}} \cos\left(4\frac{t}{\mathbf{2}}\right) = \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Θεώρημα 3.1 - 5 (προπορείας). *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] = e^{-at} f(t), \quad \text{όταν} \quad s + a > 0 \ \text{και} \ a > 0. \tag{3.1 - 4}$$

Παράδειγμα 3.1 - 4

Έστω $f(t) = \sin 2t$, οπότε $F(s) = \frac{2}{s^2+4}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 - 5 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+\underbrace{(-1)}_{a=-1})^2+4}\right] = e^{-(-1)\,t}\sin 2t = e^{t}\sin 2t.$$

Θεώρημα 3.1 - 6 (υστέρησης). *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right] = \begin{cases} f(t-a) & \text{αν} \quad t > a \\ 0 & \text{αν} \quad t < a, \end{cases} \qquad \text{όταν} \quad a > 0. \qquad (3.1 - 5)$$

Παράδειγμα 3.1 - 5

Έστω $f(t) = \cos t$, οπότε $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 - 6 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s\,\overbrace{\pi/3}^{a=\pi/3}}F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s\,e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right] = \begin{cases} \cos(t-\pi/3) & \text{αν} \quad t > \pi/3 \\ 0 & \text{αν} \quad t < \pi/3. \end{cases}$$

Το Θεώρημα 3.1 - 6 με χρήση της συνάρτησης Heaviside γράφεται:

Θεώρημα 3.1 - 7. *Αν* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t-a)u(t-a), \quad \text{όταν } t > a > 0. \qquad (3.1 - 6)$$

Παράδειγμα 3.1 - 6

Έστω

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + 4\frac{e^{-3s}}{s^2+4}\,.$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 - 7 είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] &= 1 = u(t),\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] &= t = f(t), \quad \text{οπότε}\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2}\right] &= f(t - \overbrace{a}^{a=1})\, u(t-a) = (t-1)u(t-1) \quad \text{και}\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] &= \sin 2t = \tilde{f}(t), \quad \text{οπότε}\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4\,e^{-3s}}{s^2+4}\right] &= 2\,\tilde{f}(t - \overbrace{a}^{a=3})\, u(t-a) = 2\,\sin(t-3)u(t-3).
\end{aligned}$$

Άρα

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = u(t) - (t-1)u(t-1) + 2\sin(t-3)u(t-3).$$

Θεώρημα 3.1 - 8. *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right] = (-1)^n\, t^n f(t). \tag{3.1 - 7}$$

Παράδειγμα 3.1 - 7

Όμοια έστω $f(t) = \cos t$, οπότε $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 - 8 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(2)}(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^{(2)} = (-1)^2\, t^2 \cos t = t^2 \cos t.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός των Θεωρημάτων $2.2-6$ και $2.2-7$ του Μαθήματος 2 παραλείπεται.

Άσκηση

Με το Θεώρημα 3.1 - 7 να υπολογιστεί η συνάρτηση $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, όταν η $F(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$i)\quad \frac{e^{-4s}}{s^3} \qquad\qquad iii)\quad \frac{(s+1)\,e^{-\pi s}}{s^2+s+1}$$

$$ii)\quad \frac{s\,e^{-4\pi s/5}}{s^2+25} \qquad\qquad iv)\quad \frac{(1+e^{as})\left(1+e^{bs}\right)}{s^2}\,.$$

3.2 Μέθοδοι υπολογισμού

Δίνονται τώρα οι σημαντικότερες μέθοδοι προσδιορισμού της αντίστροφης συνάρτησης για μορφές της $F(s)$, που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Με αναφορά στον Πίνακα 3.2 - 1

Παράδειγμα 3.2 - 1

Έστω
$$F(s) = \frac{1}{s^3}$$
που για ευκολία γράφεται και
$$F(s) = \frac{1}{s^{2+1}} = \frac{1}{2\,!}\,\frac{2\,!}{s^{2+1}}\,.$$
Τότε η $F(s)$ σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 3.2 - 1 και τη γραμμική ιδιότητα 3.1 - 3 δίνει σαν αντίστροφη συνάρτηση την
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{t^2}{2}\,.$$

Παράδειγμα 3.2 - 2

Έστω
$$F(s) = \frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{s^2+2^2}\,.$$
Όμοια με τον τύπο 4 του Πίνακα 3.2 - 1 είναι
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sin 2t.$$

Πίνακας 3.2 - 1: των κυριότερων μετασχηματισμών Laplace

α/α	$f(t)$	$F(s)$	α/α	$f(t)$	$F(s)$
1	A	$\dfrac{A}{s}$	11	$e^{bt}\sinh at$	$\dfrac{a}{(s-b)^2-a^2}$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	12	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
3	$t^n;\ n=1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{n\,!}{s^{n+1}}$	13	$t^2\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega\left(3s^2-\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}$
4	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	14	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
5	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	15	$t^2\cos\omega t$	$\dfrac{2s\left(s^2-3\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}$
6	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	16	$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
7	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	17	$\delta(t-a)$	e^{-as}
8	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	18	$\delta'(t)$	s
9	$e^{bt}\cosh at$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	19	$\delta''(t)$	s^2
10	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	20	$\dfrac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{s}\right)$

Παράδειγμα 3.2 - 3

Έστω

$$F(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 37}$$

που γράφεται και

$$F(s) = \frac{5}{6}\,\frac{6}{(s + \underbrace{1}_{a=1})^2 + (\underbrace{6}_{\omega=6})^2}\,.$$

Τότε ο τύπος 5 του Πίνακα 3.2 - 1 δίνει σαν αντίστροφη συνάρτηση, την

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{5}{6}\,e^{-t}\sin 6t.$$

Σημειώσεις 3.2 - 1

i) Όταν στον παρονομαστή υπάρχει σαν παράγοντας τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές ($\Delta < 0$) ή ειδική περίπτωση φανταστικές, τότε ο παρανομαστής μετασχηματίζεται σε άθροισμα τετραγώνων σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,. \qquad (3.2 - 1)$$

ii) Η περίπτωση (i) εφαρμόζεται μόνον όταν ο αριθμητής είναι βαθμού μικρότερου του παρονομαστή.

Παράδειγμα 3.2 - 4

Έστω

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 5}\,.$$

Επειδή η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι $\Delta = 4^2 - 20 = -6 < 0$ σύμφωνα με τη Σημείωση 3.2 - 1 (i) ο παρονομαστής γράφεται:

$$s^2 + 4s + 5 = (s + 2)^2 + 1^2.$$

Αρχικά δημιουργείται στον αριθμητή το $s + 2$ ως εξής:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{2s + 1}{(s + 2)^2 + 1^2} = \frac{2s + \mathbf{4} - \mathbf{4} + 1}{(s + 2)^2 + 1^2} \\ &= \frac{2s + 4\overbrace{-4 + 1}^{-3}}{(s + 2)^2 + 1^2} = 2\,\frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1^2} - 3\,\frac{1}{(s + 2)^2 + 1^2}\,. \end{aligned}$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι συνδυασμός των τύπων 5 και 7 του Πίνακα 3.2 - 1, δηλαδή

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\,e^{-2t}\cos 2t - 3\,e^{-2t}\sin t = e^{-2t}\,(2\cos 2t - 3\sin t)\,.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων $F(s)$:[1]

$i)\quad \dfrac{2}{s^4}$

$ii)\quad \dfrac{1}{(s+3)^2}$

$iii)\quad \dfrac{2(s+2)}{s^2+4}$

$iv)\quad \dfrac{s-1}{s^2-9}$

$v)\quad \dfrac{1}{s^2+8s+17}$

$vi)\quad \dfrac{s}{s^2-2s+1}$

$vii)\quad \dfrac{6}{(s+1)^4}$

$viii)\quad \dfrac{1}{9s^2+4}$

$ix)\quad \dfrac{s-1}{4s^2+9}$

$x)\quad \dfrac{1}{s^2+4s+4}$

$xi)\quad \dfrac{4s+1}{s^2+2s+1}$

$xii)\quad \dfrac{s}{s^2+s+1}\,.$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα

Έστω ότι η συνάρτηση $F(s)$ είναι ρητή, δηλαδή είναι της μορφής $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, όπου $P(s)$ και $Q(s)$ είναι ακέραια πολυώνυμα του s. Τότε, αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(s)$ είναι:

I) μικρότερος από το βαθμό του πολυωνύμου $Q(s)$, η συνάρτηση $F(s)$ αναλύεται κατά τα γνωστά σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

[1] $(i)\,\frac{t^3}{3}$, $(ii)\,t\,e^{-3t}$, $(iii)\,2(\cos 2t + \sin 2t)$, $(iv)\,\frac{2e^{-3t}}{3} + \frac{e^{3t}}{3}$, $(v)\,e^{-4t}\sin t$, $(vi)\,e^{t}(1+t)$, $(vii)\,t^3e^{-t}$, $(viii)\,\frac{1}{6}\sin\left(\frac{2t}{3}\right)$, $(ix)\,\frac{1}{4}\cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$, $(x)\,t\,e^{-2t}$, $(xi)\;(4-3\,t)\,e^{-t}$, $(xii)\; -\frac{1}{3}e^{-t/2}\left[-3\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$.

Παράδειγμα 3.2 - 5

Έστω
$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$
με ρίζες του παρονομαστή τις -1 και -2. Τότε
$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}\,.$$
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $(s+1)(s+2)$, έχουμε
$$s-1 = (A+B)s + (A+2B).$$
Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του s, προκύπτει το σύστημα
$$\left.\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 1 \\ A & + & 2B & = & -1, \end{array}\right\} \quad \text{οπότε} \quad A = 3 \text{ και } B = -2.$$
Τότε
$$F(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}\,.$$
Άρα
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 3e^{-2t} - 2e^{-t}.$$

Παράδειγμα 3.2 - 6

Όμοια, έστω
$$F(s) = \frac{1}{s\,(s^2+9)}\,.$$
Θέτοντας
$$\frac{1}{s\,(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$
και σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, τελικά προκύπτει
$$F(s) = \frac{1}{9}\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}\,,$$
οπότε
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t.$$

Παράδειγμα 3.2 - 7

Όμοια
$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)^2}\,.$$
Ο παρονομαστής έχει πρωτοβάθμιο όρο υψωμένο σε δύναμη, οπότε στην περίπτωση αυτή η ανάλυση σε απλά κλάσματα έχει την παρακάτω μορφή[2]
$$\frac{1}{(s-1)(s+2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{\overbrace{B}^{\text{αντί } Bs+C}}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2}\,,$$
οπότε τελικά προκύπτει
$$F(s) = \frac{1}{9}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{9}\,\frac{1}{s+2}\,.$$
Άρα
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{9}\,e^{-2t}\left(-1-3t+e^{3t}\right).$$

Παράδειγμα 3.2 - 8

Όμοια
$$F(s) = \frac{1}{s^3\,(s^2+4)}\,.$$
Έχουμε σύμφωνα με την ανάλυση του Παραδείγματος 3.2 - 7 ότι
$$\frac{1}{s^3\,(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}\,,$$
οπότε
$$F(s) = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^3} + \frac{1}{16}\,\frac{s}{s^2+4}\,.$$
Άρα
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{16}\left(-1+2t^2+\cos 2t\right).$$

II) Μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του $Q(s)$, τότε γίνεται πρώτα η διαίρεση των πολυωνύμων, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται τελικά στην προηγούμενη[3].

[2] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 7.

[3] Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace θα γίνει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις με χρήση της συνάρτησης του Dirac. Άλλες περιπτώσεις δεν θα εξεταστούν.

Παράδειγμα 3.2 - 9

Έστω
$$F(s)=\frac{s^4}{(s-1)(s+2)}\,.$$
Μετά τη διαίρεση και την ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει
$$F(s)=s^2-s+3+\frac{1}{3}\,\frac{1}{s-1}-\frac{16}{3}\,\frac{1}{s+2}\,.$$
Τότε σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία και τους τύπους 17, 18 και 19 του Πίνακα 3.2 - 1 προκύπτει
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\delta''(t)-\delta'(t)+3\,\delta(t)+\frac{1}{3}\,e^{t}-\frac{16}{3}\,e^{-2t}.$$

Άλλα παραδείγματα και εφαρμογές θα δοθούν στο Μάθημα 4 (Διαφορικές εξισώσεις).

Άσκηση

Να υπολογιστεί η συνάρτηση $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, όταν η $F(s)$ είναι ίση με[4]

$i)$	$\dfrac{1}{s\,(s^2-4)}$	$v)$	$\dfrac{1}{s^3+8}$
$ii)$	$\dfrac{1}{s^3-s}$	$vi)$	$\dfrac{s}{s^4-1}$
$iii)$	$\dfrac{1}{s\,(s^2-4s+4)}$	$vii)$	$\dfrac{s^5}{s^2+4}$
$iv)$	$\dfrac{1}{s\,(s^2+\pi^2)}$	$viii)$	$\dfrac{s^4}{(s+2)\,(s^2+1)}\,.$

[4] $(i)\ -\frac{1}{4}+\frac{e^{-2t}}{8}+\frac{e^{2t}}{8}\,,\ (ii)\ -1+\frac{e^{-t}}{2}+\frac{e^{t}}{2}\,,\ (iii)\ \frac{1}{4}-\frac{e^{2t}}{4}+\frac{1}{2}\,t\,e^{2t}\,,\ (iv)\ \frac{1}{\pi^2}-\frac{\cos\pi t}{\pi^2}\,,$ $(v)\ \frac{e^{-2t}}{12}-\frac{1}{12}\,e^{t}\,\cos\left(\sqrt{3}t\right)+\frac{e^{t}\,\sin\left(\sqrt{3}t\right)}{4\sqrt{3}}\ \ (vi)\ \frac{e^{-t}}{4}+\frac{e^{t}}{4}-\frac{\cos t}{2}\,,\ (vii)\ 16\cos 2t-4\delta'(t)+\delta^{(3)}(t),$ $(viii)\ \frac{16e^{-2t}}{5}-\frac{\cos t}{5}-2\delta(t)+\frac{5\,\sin t}{5}+\delta'(t).$

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Bronson, R. (1978), Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική, ISBN 978–000–761–014–3.

[4] Αθανασιάδη, Α. (1993), Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–219–7.

[5] Churchill R., Brown J. (2005), Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–7309–41–3.

[6] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[7] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Spiegel M., Schaum's Outlines – Laplace Transforms (1965), McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 978–007–060–231–1.

[9] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων