Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ενότητα 4: Διαφορικές εξισώσεις

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Βιοϊατρικής Τεχνολογίας ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 4

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Από την Άλγεβρα είναι γνωστή η έννοια της αλγεβρικής εξίσωσης ή και του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων. Στις εξισώσεις ή και τα συστήματα αυτά οι άγνωστοι, έστω x, y κ.λπ. υπολογίζονται τότε στο σύνολο των πραγματικών ή γενικότερα των μιγαδικών αριθμών.

Υπάρχουν όμως προβλήματα καθαρά μαθηματικά, αλλά και γενικότερα των εφαρμοσμένων επιστημών, που οδηγούν σε εξισώσεις, όπου οι παρουσιαζόμενες άγνωστες συναρτήσεις της μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών, εμφανίζονται με τις παραγώγους τους διαφόρων τάξεων. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται τότε **διαφορικές εξισώσεις**. Οι διαφορικές εξισώσεις που οι άγνωστες συναρτήσεις εξαρτώνται από μία μεταβλητή, λέγονται **συνήθεις διαφορικές εξισώσεις** (ODE's), ενώ εκείνες που εξαρτώνται από περισσότερες της μιας μεταβλητές, λέγονται **διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους** (PDE's). Επομένως

- η $y' + xy + \sin 2x = 0$, όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ εξαρτάται από μια μεταβλητή την x και εμφανίζεται με την πρώτη παράγωγό της είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης,

- η $x^2 y''' + xy' + \left(x^2 - y^2\right) y + e^x = 0$, όπου $y = y(x)$, είναι όμοια μία συνήθης διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης, ενώ

- η $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, όπου η άγνωστη συνάρτηση $u = u(x,t)$ εξαρτάται από τις μεταβλητές x και t, είναι μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και t.

Στο μάθημα αυτό θα εξεταστούν μόνον οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και από την κατηγορία αυτή μόνον αυτές που έχουν άμεσο ενδιαφέρον στις τεχνολογικές εφαρμογές[1].

4.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

Ορισμός 4.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης ν- τάξης είναι*

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu)}\right) = 0, \tag{4.1 - 1}$$

όπου $y = y(x)\,|\,(a,b) \subseteq \Re$ μία άγνωστη προσδιοριστέα συνάρτηση και η $y^{(k)}(x)\,|\,(a,b)$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, \nu$ συμβολίζει την k-τάξης παράγωγο της y.

Αν υπάρχει συνάρτηση $y(x)$, που να επαληθεύει την $(4.1-1)$, τότε αυτή θα λέγεται **γενική λύση** ή και **ολοκληρωτική καμπύλη** της $(4.1-1)$.

Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της $(4.1-1)$ έχει γενικά τη μορφή

$$y(x) = \varphi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right) \tag{4.1 - 2}$$

όπου c_1, c_2, …, c_ν αυθαίρετες σταθερές, δηλαδή η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $(4.1-1)$ περιέχει τόσες αυθαίρετες σταθερές όσες και η τάξη της.

Στη γενική λύση $(4.1-2)$ οι ν το πλήθος σταθερές c_1, c_2, …, c_ν προσδιορίζονται, όταν δοθούν στο $x_0 \in (a,b)$ οι παρακάτω ν - **αρχικές συνθήκες**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = {y_0}', \quad \ldots, \quad y^{(\nu-1)}(x_0) = {y_0}^{(\nu-1)}. \tag{4.1 - 3}$$

Τότε, επειδή $y(x) = \varphi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right)$, από την $(4.1-2)$ παραγωγίζοντας την $y(x)$ στο σημείο x_0 διαδοχικά μέχρι και την $\nu - 1$ τάξη και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες $(4.1-3)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}
y_0 &= \varphi\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right)\\
y_0' &= {\varphi_x}'\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right)\\
&\ldots\\
y_0^{(\nu-1)} &= {\varphi_x}^{(\nu-1)}\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right).
\end{aligned} \tag{4.1 - 4}$$

[1] Ο αναγνώστης για εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 12.

Το σύστημα $(4.1-4)$ έχει ν το πλήθος εξισώσεις με ν αγνώστους τις σταθερές $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_\nu$. Η αντικατάσταση των τιμών των σταθερών που προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος $(4.1-4)$ στην $y(x)$ ορίζει τότε τη **μερική λύση** της $(4.1-1)$.

Ορισμός 4.1 - 2 (πρόβλημα αρχικής τιμής). *Η διαφορική εξίσωση* $(4.1-1)$ *με τις αρχικές συνθήκες* $(4.1-3)$, *δηλαδή η*

$$\begin{aligned} y^{(\nu)} &= f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}\right) \quad \textit{με τις} \\ y^{(i)}\left(x_0\right) &= y_0^{(i)} \quad \textit{για κάθε } i=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1, \end{aligned} \tag{4.1 - 5}$$

ορίζει ένα πρόβλημα αρχικής τιμής (initial value problem ή IVP) ν *- τάξης.*

Παράδειγμα 4.1 - 1

Έστω διαφορική εξίσωσης

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad \text{όπου} \quad y = y(x).$$

Λόγω της ύπαρξης της $y''(x)$ η διαφορική εξίσωση είναι τάξης $\nu = 2$, οπότε η γενική της λύση σύμφωνα με την $(4.1-2)$ θα είναι της μορφής $y(x) = \varphi\left(x, y, c_1, c_2\right)$, όταν $c_1,\ c_2$ αυθαίρετες σταθερές. Αποδεικνύεται ότι η γενική της λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Έστω τώρα ότι ζητείται η μερική λύση, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

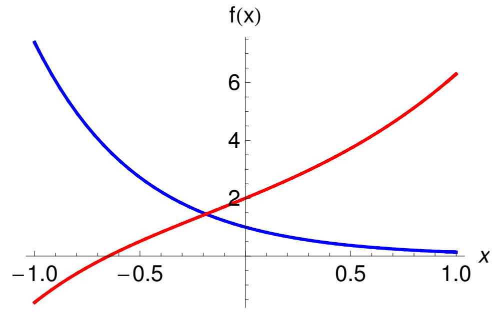
i) $y(0) = 1,\ y'(0) = -2$, αντίστοιχα

ii) $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.

Λύση. Σύμφωνα και με την $(4.1-3)$ έχουμε

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \quad \text{οπότε} \quad y'(x) = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}.$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή οι αρχικές συνθήκες δίνονται στο σημείο $x_0 = 0$, θέτοντας $x = 0$ στις $y(x)$ και $y'(x)$ προκύπτει σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες (i) και (ii) το σύστημα:



Σχήμα 4.1 - 1: Παράδειγμα 4.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $x \in [-1, 1]$ στην περίπτωση (i) μπλε και (ii) κόκκινη καμπύλη

i)

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & + & c_2 & = & 1 \\ c_1 & - & 2c_2 & = & -2, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad c_1 = 0 \;\text{ και }\; c_2 = 1,$$

δηλαδή η μερική λύση είναι η $y = e^{-2x}$ (Σχ. 4.1 - 1) - μπλε καμπύλη και αντίστοιχα

ii)

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & + & c_2 & = & 21 \\ c_1 & - & 2c_2 & = & 3, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad c_1 = \frac{7}{3} \;\text{ και }\; c_2 = -\frac{1}{3},$$

με μερική λύση $y = \frac{7}{3}\, e^{x} - \frac{1}{3}\, e^{-2x}$ (Σχ. 4.1 - 1) - κόκκινη καμπύλη.

■

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές παρουσιάζει μια ειδική κατηγορία διαφορικών εξισώσεων, που είναι γνωστή σαν γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ορίζονται στη συνέχεια.

Ορισμός 4.1 - 3 (μη ομογενής γραμμική). *Μία διαφορική εξίσωση που γράφεται στη μορφή*

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x) y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x) y' + f_0(x) y = r(x) \tag{4.1 - 6}$$

όπου η $r(x)$ *και οι συντελεστές* $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\ldots$, $f_{\nu-1}(x)$ *είναι γνωστές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς για κάθε* $x \in (a, b)$, *λέγεται μη ομογενής γραμμική (nonhomogeneous linear) διαφορική εξίσωση* ν *-τάξης.*

Στις εφαρμογές η συνάρτηση $r(x)$ ορίζει τότε την είσοδο (source term).

Ορισμός 4.1 - 4 (μη γραμμική). *Λέγεται μη γραμμική (nonlinear) διαφορική εξίσωση, κάθε διαφορική εξίσωση, που δεν είναι δυνατόν να γραφεί στη μορφή* $(4.1-6)$.

Ορισμός 4.1 - 5 (ομογενής γραμμική). *Ορίζεται σαν ομογενής γραμμική (homogeneous linear) διαφορική εξίσωση ν - τάξης, κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής* $(4.1-6)$ *με* $r(x)=0$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)}+f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)}+\ldots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0. \tag{4.1 - 7}$$

Αποδεικνύεται το παρακάτω σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 4.1 - 1 *Αν* y_h *είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης* $(4.1-7)$ *και* y_p *μία μερική (particular) λύση της μη ομογενούς* $(4.1-6)$, *τότε η γενική λύση της* $(4.1-6)$ *είναι*

$$y=y_h+y_p. \tag{4.1 - 8}$$

Σημείωση 4.1 - 1

Η μερική λύση y_p, σε αντίθεση με τη λύση y_h της ομογενούς, δεν περιέχει σταθερές.

Ορισμός 4.1 - 6. *Ορίζεται σαν μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(4.1-6)$ *όπου οι συναρτήσεις* $f_k(x)$ *είναι σταθερές για κάθε* $k=0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)}+a_{\nu-1}y^{(\nu-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=r(x), \tag{4.1 - 9}$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k=0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1$.

Ορισμός 4.1 - 7. *Ορίζεται σαν ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(4.1-9)$ *όπου* $r(x)=0$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)}+a_{\nu-1}y^{(\nu-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0, \tag{4.1 - 10}$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k=0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1$.

Στην περίπτωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(4.1-10)$ η λύση της προσδιορίζεται θέτοντας

$$y=e^{\lambda x} \quad \text{με} \quad \lambda \text{ σταθερά.} \tag{4.1 - 11}$$

Τότε $y'(x)=\lambda\,e^{\lambda x}$, $y''(x)=\lambda^2\,e^{\lambda x}$, $\ldots$, $y^{(\nu)}(x)=\lambda^{\nu}\,e^{\lambda x}$, οπότε, επειδή προφανώς $e^{\lambda x}\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$, αντικαθιστώντας στην $(4.1-10)$ προκύπτει τελικά ότι

$$\lambda^{\nu}+a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0. \tag{4.1 - 12}$$

Η $(4.1-12)$ είναι η **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic ή auxiliary equation) της $(4.1-10)$ και από τη λύση της προκύπτουν οι ν - το πλήθος ρίζες $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_{\nu}$, που ορίζουν τις τιμές του λ στην $(4.1-11)$. Επομένως η γενική λύση της $(4.1-10)$, σύμφωνα με την $(4.1-2)$, όταν οι ρίζες είναι απλές, αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής

$$y_h(x)=c_1\,e^{\lambda_1 x}+c_2\,e^{\lambda_2 x}+\ldots+c_{\nu}\,e^{\lambda_{\nu} x}, \tag{4.1 - 13}$$

ενώ όταν μια ρίζα, έστω η λ, έχει πολλαπλότητα ρ με $\rho\leq\nu$, τότε

$$y_h(x)=(c_1+\ldots+c_{\rho})\;e^{\lambda x}+c_{\rho+1}\,e^{\lambda_{\rho+1}x}+\ldots+c_{\nu}\,e^{\lambda_{\nu}x}. \tag{4.1 - 14}$$

Εφαρμογές της παραπάνω θεωρίας στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης και 2ης τάξης θα δοθούν στις επόμενες παραγράφους.

4.2 Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Ορισμός 4.2 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι*

$$F\,(x,y,y')=0 \tag{4.2 - 1}$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y=y(x)$ *ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής* $(a,b)\subseteq\Re$ *και υπάρχει η* $y'(x)$ *για κάθε* $x\in(a,b)$.

Τότε η λύση $y(x)$, εφόσον είναι δυνατόν να προσδιοριστεί, θα ορίζει τη λύση της $(4.2-1)$.

Ορισμός 4.2 - 2. *Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής* $(4.2-1)$ *θα λέγεται ότι γράφεται σε λυμένη (explicit) μορφή, όταν*

$$y' = f(x, y). \tag{4.2 - 2}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση η $(4.2-1)$ θα λέγεται ότι ορίζεται με πεπλεγμένη (implicit) μορφή.

Σαν ειδική περίπτωση του Ορισμού 4.1 - 2 δίνεται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 4.2 - 3. *Μία λυμένη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, που επαληθεύει μία αρχική τιμή, δηλαδή η*

$$y' = f(x, y) \quad \mu\varepsilon \quad y_0 = y\left(x_0\right) \tag{4.2 - 3}$$

θα λέγεται ότι ορίζει ένα **πρόβλημα αρχικής τιμής** *(initial value problem) 1ης τάξης.*

Εξετάζεται στη συνέχεια μια ειδική κατηγορία των διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης, που είναι απαραίτητη για τα επόμενα.

Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Ορισμός 4.2 - 4. *Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής*

$$g(y)\, y' = f(x) \quad \mu\varepsilon\ x \in (a, b) \subseteq \Re \ \ \kappa\alpha\iota\ \ y = y(x) \in (\gamma, \delta) \subseteq \Re \tag{4.2 - 4}$$

λέγεται ότι ορίζει μια διαφορική εξίσωση με **χωριζόμενες μεταβλητές**.

Επειδή είναι ήδη γνωστό από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης ότι $y' = y'(x) = dy(x)/dx$ και του διαφορικού ότι $dy(x) = y'(x)\,dx$, το κλάσμα $dy(x)/dx$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί σαν πηλίκο των διαφορικών $dy(x)$ και dx. Επομένως σύμφωνα και με την παραπάνω παρατήρηση, η $(4.2-4)$ γράφεται

$g(y)dy = f(x)dx$, οπότε ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της προκύπτει τελικά ότι

$$\int \mathbf{g(y)dy} = \int \mathbf{f(x)dx + c} \tag{4.2 - 5}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Αν υποτεθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς, τότε τα ολοκληρώματα της $(4.2-5)$ υπάρχουν, οπότε από τον υπολογισμό τους προκύπτει η γενική λύση της $(4.2-4)$.

Παρατήρησεις 4.2 - 1

Από την $(4.2-5)$ προκύπτουν τα εξής:

i) επειδή στη σταθερά c συμπεριλαμβάνονται και οι σταθερές που προκύπτουν από την ολοκλήρωση του αριστερού και του δεξιού μέλους, δεν απαιτείται στον $(4.2-5)$ η πρόσθεση άλλων σταθερών.

ii) Μετά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, πρέπει η $(4.2-5)$ να λυθεί ως προς y. Αν αυτό δεν είναι δυνατόν, τότε λέγεται ότι η λύση της $(4.2-4)$ δίνεται με **πεπλεγμένη μορφή**.

iii) Αν κάποιο από τα ολοκληρώματα στην $(4.2-5)$ δεν υπολογίζεται, τότε αναζητούνται προσεγγιστικές λύσεις[2] της $(4.2-5)$.

iv) Έστω ότι για την αναγωγή της $(4.2-4)$ στη μορφή $(4.2-5)$ απαιτείται η διαίρεση με το y, οπότε πρέπει να υποτεθεί $y \neq 0$. Τότε, αν στη γενική λύση η τιμή $y=0$ δεν συμπεριλαμβάνεται, θα λέγεται ότι η $y=0$ είναι μια **ιδιάζουσα** ή **προφανής λύση** (trivial solution) της $(4.2-4)$.

Παράδειγμα 4.2 - 1

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y\,y' + 4x = 0 \tag{1}$$

που διαδοχικά γράφεται

$$y\,\frac{dy}{dx} + 4x = 0 \quad ή \quad y\,dy = -4x\,dx,$$

[2] Βλέπε βιβλιογραφία: προσεγγιστική λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 10.

οπότε ολοκληρώνοντας $\frac{y^2}{2} = -4\,\frac{x^2}{2} + c$, όταν c μια αυθαίρετη σταθερά. Άρα έχουμε την παρακάτω γενική λύση της (1)

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = c. \tag{2}$$

Η (2) για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c παριστάνει μία οικογένεια ελλείψεων.

Παράδειγμα 4.2 - 2

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\left(x^2 + 1\right) y' - y^2 = 0 \quad \text{όπου } y_0 = y(0) = 1. \tag{3}$$

Σημείωση 4.2 - 1

Όταν υπάρχουν τιμές της μεταβλητής που μηδενίζουν το συντελεστή της y', οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται μια εξίσωση με άγνωστο το y, τότε οι τιμές αυτές εξετάζονται χωριστά.

Λύση. Είναι $1 + x^2 \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$. Υποθέτοντας ότι $y \neq 0$ η (3) γράφεται

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1 + x^2}\,, \quad \text{οπότε ολοκληρώνοντας} \quad -\,\frac{1}{y} = \tan^{-1} x + c,$$

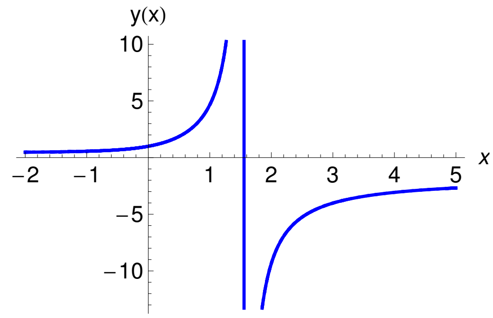
όταν c αυθαίρετη σταθερά. Επομένως η γενική λύση της (3) είναι

$$y = -\,\frac{1}{\tan^{-1} x + c}\,. \tag{4}$$

Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 4.2 - 1 (iv), επειδή για την εύρεση της γενικής λύσης έχει υποτεθεί $y \neq 0$, εξετάζεται αν η $y = 0$ συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση (4). Επειδή αυτό δεν συμβαίνει, η $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (3).

Υπολογισμός μερικής λύσης . Σύμφωνα με την (3) η αρχική συνθήκη είναι $y(0) = 1$. Τότε από την (4) έχουμε

$$1 = -\,\frac{1}{\underbrace{\tan^{-1} 0}_{0} + c}\,, \quad \text{δηλαδή} \quad c = -1.$$



Σχήμα 4.2 - 1: Παράδειγμα 4.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $x \in [-2, 5]$

Άρα η μερική λύση της (3) είναι (Σχ. 4.2 - 1)

$$y = \frac{1}{1 - \tan^{-1} x} \tag{5}$$

με $1 - \tan^{-1} x \neq 0$, δηλαδή $x \not\approx 1.5574$ - κάθετη ασύμπτωτη στο Σχ. 4.2 - 1.

■

Η εύρεση της γενικής λύσης του Παραδείγματος 4.2 - 2 με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
DSolve[(x^2+1)y'[x]-(y[x])^2==0,y[x],x]
```

ενώ της μερικής λύσης και του Σχ. 4.2 - 1 με τις εντολές:

```
DSolve[{(x^2+1)y'[x]-(y[x])^2==0,y[0]==1},y[x],x]
Plot[1/(1-ArcTan[x]), {x,-2,5},PlotStyle -> Thick,
ColorFunction -> Function[Blue], AxesLabel -> {x, "y(x)"},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

Παρατήρηση 4.2 - 1

Πολλές φορές για να απλουστεύσουμε την έκφραση της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης, η αυθαίρετη σταθερά c αντικαθίσταται από την επίσης αυθαίρετη σταθερά $\ln c$ με $c > 0$. Η αντικατάσταση αυτή δεν περιορίζει τη γενικότητα της λύσης, επειδή $\ln c \in \Re$.

Παράδειγμα 4.2 - 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1 - \cos x)y' = y \sin x. \tag{6}$$

Λύση. Σύμφωνα και με την Παρατήρηση 4.2 - 1 πρέπει $1 - \cos x \neq 1$, δηλαδή $x \neq k\pi$ με $k \in Z$, διαφορετικά η (6) είναι ταυτότητα. Έστω $y \neq 0$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y \sin x}{1 - \cos x} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos x} \quad \text{δηλαδή} \\ \frac{dy}{y} &= \frac{(1 - \cos x)' \, dx}{1 - \cos x}. \end{aligned}$$

Άρα ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1 - \cos x)' \, dx}{1 - \cos x} + c, \quad \text{δηλαδή} \quad \ln|y| = \ln|1 - \cos x| + c,$$

οπότε σύμφωνα και με την Παρατήρηση 4.2 - 1

$$\ln|y| = \ln|1 - \cos x| + \ln c = \ln|c\,(1 - \cos x)| \quad \text{με} \quad c > 0,$$

δηλαδή $|y| = |c\,(1 - \cos x)|$ ή ισοδύναμα $y = \pm\, c\,(1 - \cos x)$ με $c > 0$, που γράφεται γενικότερα και

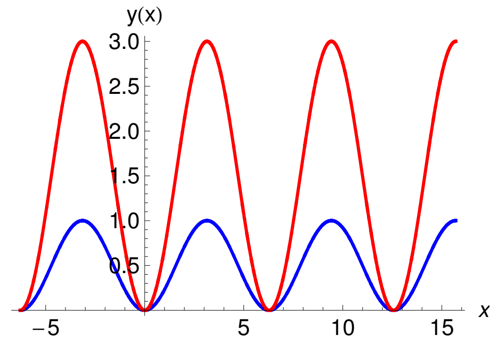
$$y = c\,(1 - \cos x) \quad \text{με} \quad c \neq 0.$$

Επειδή $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$, η γενική λύση της (6) τελικά γράφεται

$$y = c \, \sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{7}$$

Η γραφική παράσταση της (7) για τις τιμές $c = 1, 3$ δίνεται στο Σχ. 4.2 - 2.

Επειδή για την εύρεση της γενικής λύσης (7) έχει υποτεθεί $y \neq 0$ και η τιμή $y = 0$, εφόσον στην (7) είναι $c \neq 0$, δεν συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση, η $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (6). ∎



Σχήμα 4.2 - 2: Παράδειγμα 4.2 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = c\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ με $x \in [-2\pi, 5\pi]$, όταν $c = 1$ μπλε και $c = 3$ κόκκινη καμπύλη

Παράδειγμα 4.2 - 4

Όμοια η
$$x \ln x \, y' - y = 0, \quad \text{όταν} \quad y(e) = 1. \tag{8}$$

Λύση. Λόγω του παράγοντα $\ln x$ πρέπει $x > 0$. Έστω $y \neq 0$. Τότε από την (8) υποθέτοντας ότι και $\ln x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$, διαφορετικά πρέπει $y = 0$, άτοπο, έχουμε
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\,\ln x} = \frac{d\ln x}{\ln x}\,.$$
Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.2 - 1 και το Παράδειγμα 4.2 - 3 προκύπτει

$$\ln|y| = \ln|\ln x| + \ln c = \ln|c\,\ln x| \quad \text{με} \quad c > 0.$$

Άρα $y = \pm\, c\, \ln x$, δηλαδή η γενική λύση της (8) τελικά γράφεται

$$y = c\,\ln x, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0 \quad \text{και} \quad x > 0 \text{ με } x \neq 1. \tag{9}$$

Επειδή $y(e) = 1$, από την (9) προκύπτει $c = 1$, οπότε η μερική λύση της (8) είναι $y = \ln x$. Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (8).

Εφαρμογή 4.2 - 1 (ορθογώνιες τροχιές)

Έστω ότι μία οικογένεια καμπύλων του επιπέδου xy επαληθεύει την εξίσωση

$$F(x, y, c) = 0 \qquad (4.2 - 6)$$

όπου $y = y(x)$ και c μία παράμετρος. Ζητείται να προσδιοριστεί μια άλλη οικογένεια καμπύλων, έστω η $G\,(x, y, c) = 0$, που να τέμνει κάθετα κάθε καμπύλη της $(4.2-6)$. Η G ορίζει τότε τις **ορθογώνιες τροχιές** της $(4.2-6)$. Παραγωγίζοντας την $(4.2-6)$ και απαλείφοντας την παράμετρο c μεταξύ της $(4.2-6)$ και της εξίσωσης που προκύπτει μετά την παραγώγισή της, έχουμε μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Άρα οι ορθογώνιες τροχιές της $(4.2-6)$ θα είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}. \qquad (4.2 - 7)$$

Παράδειγμα 4.2 - 5

Αν η οικογένεια καμπύλων είναι η $x^2 + y^2 = c$, τότε $2x + yy' = 0$, δηλαδή $y' = -x/y$. Άρα η ζητούμενη οικογένεια καμπύλων θα προκύψει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,,$$

δηλαδή είναι η $y = kx$ όπου k σταθερά. Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθείες, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$i)\quad x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}y' = 0 \qquad iii)\quad xy\,(1+x^2)\,y' = 1 + y^2$

$ii)\quad xyy' - (1+y^2)^{1/2} = 0 \qquad iv)\quad \sin x\,\cos y + y'\cos x\,\tan y = 0.$

2. Να υπολογιστούν οι ορθογώνιες τροχιές των οικογενειών των καμπύλων $y = ce^{-x}$ και $x^2 - y^2 = cx$.

Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1 - 3 η γενική μορφή της **μη ομογενούς** γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι

$$\mathbf{y}' + \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) \tag{4.2 - 8}$$

όπου $y = y(x)$ και $f(x)$, $r(x)$ συνεχείς συναρτήσεις με $r(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b) \subseteq \Re$. Η αντίστοιχη **ομογενής** της $(4.2 - 8)$ σύμφωνα και με τον Ορισμό 4.1 - 5 είναι

$$\mathbf{y}' + \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \text{όταν} \quad x \in (a, b). \tag{4.2 - 9}$$

Λύση ομογενούς

Η $(4.2 - 9)$, που είναι μια διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές, υποθέτοντας ότι $y \neq 0$ γράφεται

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx, \quad \text{οπότε} \quad \ln|y| = -\int f(x)\,dx + c^*,$$

όπου c^* αυθαίρετη σταθερά. Άρα

$$\begin{aligned} |y| &= e^{-\int f(x)\,dx + c^*} = e^{-\int f(x)\,dx} \underbrace{e^{c^*}}_{c\neq 0\ \text{σταθερά}}, \quad \text{δηλαδή} \\ y &= \pm c\, e^{-\int f(x)\,dx}, \end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση y_h της ομογενούς εξίσωσης $(4.2 - 9)$ θα είναι

$$y_h(x) = c\, e^{-\int f(x)\,dx} \quad \text{με} \quad c \neq 0 \tag{4.2 - 10}$$

όπου προφανώς είναι $y > 0$, όταν $c > 0$ και $y < 0$, όταν $c < 0$. Τότε, επειδή η τιμή $y = 0$ δεν περιλαμβάνεται στη λύση $(4.2 - 10)$, θα είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(4.2 - 9)$.

Λύση μη ομογενούς - Μέθοδος του Lagrange

Για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης $y_p(x)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(4.2-8)$, δηλαδή της

$$y' + f(x)y = r(x)$$

εφαρμόζεται η μέθοδος του Lagrange. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η σταθερά c στη γενική λύση $(4.2-10)$ της ομογενούς, δηλαδή στην

$$y_h(x) = c\, e^{-\int f(x)\,dx}$$

θεωρείται σαν συνάρτηση του x. Έστω ότι είναι $c = k(x)$, οπότε η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$y_h(x) = y(x) = k(x)\, e^{-\overbrace{\int f(x)\,dx}^{q(x)}} = k(x)\, e^{-q(x)}.$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} y(x) &= k(x)\, e^{-q(x)}, \quad \text{όταν} && (4.2\text{ - }11)\\ q(x) &= \int f(x)\,dx \quad \text{και} \quad q'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της $(4.2-11)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y' = y'(x) &= k'(x)\, e^{-q(x)} + k(x)\,[-q(x)]'\, e^{-q(x)}\\ &= k'(x)\, e^{-q(x)} - k(x)\, f(x)\, e^{-q(x)}. && (4.2\text{ - }12) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις $(4.2-11)$ και $(4.2-12)$ στην $y' + f(x)y = r(x)$ τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} k'(x) &= r(x)\, e^{q(x)} \quad \text{ή} \quad \frac{d\,k(x)}{dx} = r(x)\, e^{q(x)}, \quad \text{δηλαδή}\\ d\,k(x) &= r(x)\, e^{q(x)}\, dx, \end{aligned}$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$k(x) = \int r(x)\, e^{q(x)}\, dx. \qquad (4.2 - 13)$$

Αντικαθιστώντας την $(4.2-13)$ στην $(4.2-11)$ προκύπτει ότι η μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(4.2-8)$, δηλαδή της $y'+f(x)y = r(x)$, είναι[3]

$$y_p(x) = e^{-q(x)} \int r(x)\, e^{q(x)}\, dx. \qquad (4.2 - 14)$$

Επειδή σύμφωνα με την $(4.2-11)$ είναι $q(x) = \int f(x)\, dx$, από το Θεώρημα 4.1 - 1, την $(4.2-14)$ και την $(4.2-10)$ προκύπτει ότι η γενική λύση $y(x)$ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης $(4.2-8)$, δηλαδή της $y' + f(x)y = r(x)$, είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y(x)} &= \mathbf{y_h + y_p} \qquad (4.2 - 15) \\ &= c\, e^{-\int f(x)\, dx} + e^{-\int f(x)\, dx} \int r(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx \\ &= e^{-\int f(x)\, dx} \left[\int r(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx \,+\, c\right] \\ &= e^{-q(x)} \left[\int r(x)\, e^{q(x)}\, dx \,+\, c\right] \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (a, b)$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Παράδειγμα 4.2 - 6

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2\,x\,y = e^{-x^2}, \quad \text{όταν } y(0) = 1. \qquad (1)$$

[3] Υπενθυμίζεται ότι η μερική λύση δεν περιέχει σταθερά - Σημείωση 4.1 - 1.

Λύση.

Ομογενής . Έστω $y \neq 0$. Τότε η ομογενής διαδοχικά γράφεται

$$y' = -2xy \quad ή \quad \frac{dy}{dx} = -2xy \quad ή \quad dy = -2xy\,dx,$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$\ln|y| = -x^2 + c^* \quad ή \quad y = \pm\, e^{-x^2+c^*} = c\,e^{-x^2}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0,$$

δηλαδή η λύση της ομογενούς της (1) είναι:

$$y_h(x) = c\,e^{-x^2}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0.$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (1).

Μη ομογενής . Σύμφωνα με την (1) είναι $f(x) = 2\,x$, οπότε από την (4.2−11) προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x)\,dx = \int 2\,x\,dx = x^2.$$

Επειδή $r(x) = e^{-x^2}$, από την $(4.2-14)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-q(x)} \left[\int r(x)\,e^{q(x)}\,dx\right] \\ &= e^{-x^2} \left[\int e^{-x^2}\,e^{x^2}\,dx\right] = x\,e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(4.2-15)$ η γενική λύση της (1) θα είναι

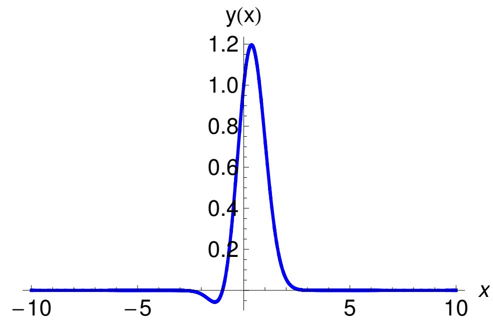
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x^2}\,(x + c) \tag{2}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (1) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 1$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (2) θέτοντας $x = 0$. Άρα $1 = y(0) = 1(0 + c)$, οπότε $c = 1$ και η μερική λύση της (1) θα είναι (Σχ. 4.2 - 3)

$$y(x) = e^{-x^2}(x + 1).$$

■



Σχήμα 4.2 - 3: Παράδειγμα 4.2 - 6: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x^2}(x+1)$, όταν $x \in [-10, 10]$

Παράδειγμα 4.2 - 7

Όμοια η

$$x\,y' - y = x^2, \quad \text{όταν } y(1) = 0. \tag{3}$$

Λύση.

Ομογενής. Αν $x = 0$, τότε προφανώς είναι και $y = 0$. Έστω $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Τότε η ομογενής διαδοχικά γράφεται

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

οπότε ολοκληρώνοντας[4]

$$\ln|y| = \ln|x| + c \quad \text{ή} \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln c = \ln|c\,x|, \quad \text{όταν} \quad c > 0,$$

Άρα $y = \pm c\,x$, δηλαδή η λύση της ομογενούς της (3) είναι:

$$y_h(x) = c\,x, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0.$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (3).

[4]Βλέπε Παράδειγμα 4.2 - 6.

Μη ομογενής . Από την (3), όταν $x \neq 0$, προκύπτει[5]

$$y' - \frac{1}{x}\, y = x. \tag{4}$$

Άρα σύμφωνα με την (4) είναι

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{οπότε} \quad q(x) = \int f(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\ln|x|.$$

Επειδή $r(x) = x$, από την $(4.2-14)$ έχουμε για τη μερική λύση της μη ομογενούς

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-q(x)} \left[\int r(x)\, e^{q(x)}\, dx\right] = e^{-(-\ln|x|)} \left[\int x\, e^{-\ln|x|}\, dx\right] \\ &= |x| \int x\, \frac{1}{|x|}\, dx = \begin{cases} x \displaystyle\int x\, \frac{1}{x}\, dx = x^2 & \text{αν} \quad x > 0, \\ -x \displaystyle\int x\, \frac{1}{-x}\, dx = x^2 & \text{αν} \quad x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

δηλαδή $y_p(x) = x^2$.

Άρα σύμφωνα με την $(4.2-15)$ η γενική λύση της (3) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = x(x + c) \tag{5}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (3) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(1) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (3) θέτοντας $x = 1$. Άρα $0 = y(1) = 1 + c$, οπότε $c = -1$ και η μερική λύση της (3) θα είναι (Σχ. 4.2 - 4)

$$y(x) = -x + x^2.$$

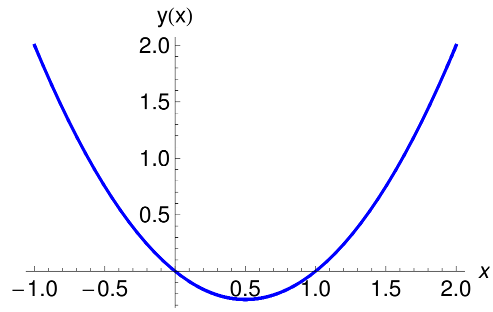
■

Παράδειγμα 4.2 - 8

Όμοια η

$$y' - y\, \cos x = \cos x, \quad \text{όταν } y(0) = 1. \tag{6}$$

[5]Πρέπει η (3) να μετασχηματιστεί στη μορφή $y' + f(x)y = r(x)$.



Σχήμα 4.2 - 4: Παράδειγμα 4.2 - 7: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -x + x^2$, όταν $x \in [-1, 2]$

Λύση.

Ομογενής . Έστω $y \neq 0$. Τότε η ομογενής διαδοχικά γράφεται

$$y' - y\cos x = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = y\,\cos x \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \cos x\,dx,$$

οπότε ολοκληρώνοντας[6]

$$\ln|y| = \sin x + c \quad \text{ή} \quad |y| = e^{\sin x + c} = e^{\sin x}\,e^{c} = c\,e^{\sin x}, \quad \text{όταν} \quad c > 0,$$

Άρα $y = \pm c\,e^{\sin x}$, δηλαδή η λύση της ομογενούς της (6) είναι:

$$y_h(x) = c\,e^{\sin x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0.$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (3).

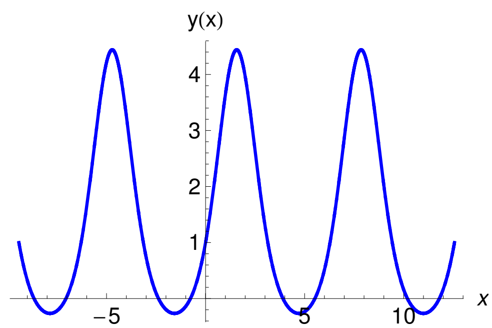
Μη ομογενής . Από την (6) προκύπτει

$$f(x) = -\cos x, \quad \text{οπότε} \quad q(x) = \int f(x)\,dx = -\int \cos x\,dx = -\sin x.$$

Επειδή $r(x) = \cos x$, από την $(4.2 - 14)$ έχουμε για τη μερική λύση της μη ομογενούς

$$y_p(x) \;=\; e^{-q(x)}\left[\int r(x)\,e^{q(x)}\,dx\right] = e^{-(-\sin x)}\left[\int \cos x\,e^{-\sin x}\,dx\right]$$

[6]Βλέπε Παράδειγμα 4.2 - 7.



Σχήμα 4.2 - 5: Παράδειγμα 4.2 - 8: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -1 + 2\,e^{\sin x}$, όταν $x \in [-3\pi, 4\pi]$

$$= \quad e^{\sin x} \int e^{-\sin x}\, d\sin x = -\, e^{\sin x} \left[\int e^{-\sin x}\, d(-\,\sin x)\right]$$

$$= \quad -e^{\sin x}\left[e^{-\sin x}\right] = -e^{0} = -1.$$

Άρα σύμφωνα με την $(4.2-15)$ η γενική λύση της (3) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -1 + c\,e^{\sin x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{7}$$

Επειδή από την (6) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 1$, η μερική λύση θα προκύψει από την (7) θέτοντας $x = 0$. Άρα $1 = y(0) = -1 + c\,e^{0}$, οπότε $c = 2$ και η μερική λύση της (6) θα είναι (Σχ. 4.2 - 5)

$$y(x) = -1 + 2\,e^{\sin x}.$$

Η μελέτη της περιοδικότητας ή μη της μερικής λύσης αφήνεται σαν άσκηση. ∎

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις[7]

$i)\quad y' + 2xy = -x^3 + x;\ y(0) = -1 \qquad iii)\quad y' + \dfrac{y}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2};\ y(0) = 0$

$ii)\quad y'\cos x - y\sin x = \sin x;\ y(0) = 0 \qquad iv)\quad xy' - y = x^2\cos x;\ y\,(\pi/2) = 0.$

[7] $(i)\, y(x) = 1/2\left(2 - x^2\right) + c\,e^{-x^2}$, μερική: $c = -1/2$, $(ii)\, y(x) = -1 + 1/\cos x$, μερική: $c = 1$, $(iii)\, y(x) = 1 + c\,\exp\left(-\tan^{-1} x\right)$, μερική: $c = -1$, $(iv)\, y(x) = c\,x + x\,\sin x$, μερική: $c = -1$.

Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Από τον Ορισμό 4.1 - 6 προκύπτει ότι η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωσης 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$\mathbf{y}' + \mathbf{a}\,\mathbf{y} = \mathbf{r}(\mathbf{x}), \tag{4.2 - 16}$$

όταν α σταθερά, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και αντίστοιχη **ομογενή** την

$$\mathbf{y}' + \mathbf{a}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{4.2 - 17}$$

Κλασική μέθοδος λύσης

Έστω $y \neq 0$. Σύμφωνα με την $(4.1-11)$ αντικαθιστώντας στην $(4.2-17)$ $y = e^{\lambda x}$ με λ σταθερά προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι

$$\lambda + a = 0 \quad \text{με ρίζα} \quad \lambda = -a. \tag{4.2 - 18}$$

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$\mathbf{y_h} = \mathbf{c}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{ax}}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{4.2 - 19}$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(4.2-17)$.

Επειδή $f(x) = a$, οπότε $q(x) = \int f(x)\,dx = ax$, σύμφωνα με την $(4.2-11)$ η μερική λύση y_p της μη ομογενούς θα είναι

$$\mathbf{y_p}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{-\mathbf{ax}} \left[\int \mathbf{e}^{\mathbf{ax}}\, \mathbf{r}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} \right]. \tag{4.2 - 20}$$

Επομένως από το Θεώρημα 4.1 - 1 προκύπτει ότι η γενική λύση της $(4.2-16)$ είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= e^{-\alpha x} \left[\int e^{ax}\, r(x)\, dx + c \right] \end{aligned} \tag{4.2 - 21}$$

για κάθε $x \in (a, b)$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Έστω ότι οι συναρτήσεις $y,\, r \in D_{\mathcal{L}}$ και ορίζονται για κάθε $x \geq 0$. Θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της μη ομογενούς εξίσωσης $(4.2-16)$ έχουμε $\mathcal{L}\left(y' + ay\right) = \mathcal{L}[r(x)]$, που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace[8] γράφεται

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + \alpha\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}[r(x)].$$

Θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0$ αρχική συνθήκη και λύνοντας αλγεβρικά ως προς $Y(s)$, τελικά έχουμε τον παρακάτω τύπο υπολογισμού της μετασχηματισμένης συνάρτησης $Y(s)$ της μερικής λύσης της $(4.2-16)$

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{\mathcal{L}[\mathbf{r(x)}]}{\mathbf{s+a}} + \frac{\mathbf{y_0}}{\mathbf{s+a}} \quad \text{με} \quad s + a > 0. \qquad (4.2\text{ - }22)$$

Τότε από από την $(4.2-22)$ προκύπτει η μερική λύση της $(4.2-16)$ ως εξής:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)].$$

Παρατήρησεις 4.2 - 2

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace:

i) εφαρμόζεται κυρίως, όταν ζητείται η μερική λύση της $(4.2-16)$, δηλαδή έχουν δοθεί και οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος ή όταν η είσοδος $r(x)$ είναι περιοδική, μοναδιαία κρούση, κ.λπ.[9],

[8] Βλέπε Μάθημα 2: Μετασχηματισμός Laplace

Θεώρημα 2.2-1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω $f,\, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $\kappa,\, \lambda \in \Re$ ισχύει*

$$\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)].$$

Θεώρημα 2.2-6 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s > a > 0.$$

[9] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 1.

ii) δεν εφαρμόζεται συνήθως, όταν η $f(x)$ δεν είναι σταθερά και γενικότερα δεν εφαρμόζεται σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου σε σχέση με την αντίστοιχη κλασική μέθοδο είναι ότι η διαφορική εξίσωση λύνεται με αλγεβρικό τρόπο και εισάγονται στη λύση άμεσα, χωρίς να χρειάζεται επί πλέον υπολογισμός, οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα 4.2 - 9

Να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = e^{-3x} \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{1}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Η αντίστοιχη ομογενής της (1) είναι $y' + 2y = 0$, οπότε σύμφωνα με την $(4.2 - 18)$ η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 2 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -2$. Άρα από την $(4.2 - 19)$ προκύπτει ότι η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c\,e^{-2x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{2}$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (1).

Είναι $f(x) = a = 2$ και $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με την $(4.2 - 20)$ η μερική λύση y_p της (1) είναι

$$y_p(x) = e^{-2x} \int e^{2x}\, e^{-3x}\, dx = e^{-2x} \overbrace{\int e^{-x}\, dx}^{-e^{-x}} = -e^{-3x}. \tag{3}$$

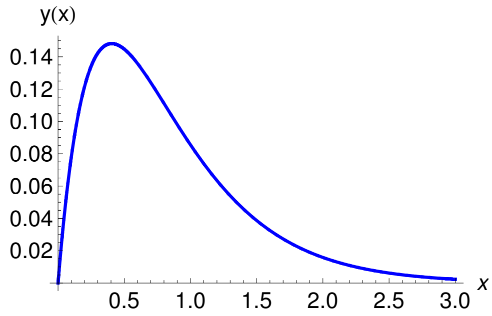
Επομένως από την $(4.2 - 21)$ και τις (2), (3) η γενική λύση της (1) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -e^{-3x} + c\,e^{-2x} \tag{4}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (1) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (4) θέτοντας $x = 0$. Άρα $0 = y(0) = -1 + c$, οπότε $c = 1$ και η μερική λύση της (1) θα είναι (Σχ. 4.2 - 6)

$$y(x) = e^{-3x}\left(-1 + e^{x}\right).$$



Σχήμα 4.2 - 6: Παράδειγμα 4.2 - 9: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-3x}\left(-1+e^{x}\right)$, όταν $x \in [0,3]$

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Έστω ότι η (1) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με το Μάθημα 3 τύπος 2 του Πίνακα 3.2-1 θα είναι

$$\mathcal{L}\left[e^{-3x}\right] = \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+3>0.$$

Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (1). Επειδή σύμφωνα με την (1) είναι $a=2$, θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = 0$ στην $(4.2-22)$ και μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα του δεξιού μέλους, προκύπτει

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+3}}{s+2} + \frac{0}{s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+2>0. \end{aligned}$$

Άρα

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2x} - e^{-3x} = e^{-3x}\left(-1+e^{x}\right),$$

δηλαδή η μερική λύση που έχει προκύψει με την κλασική μέθοδο. ■

Παράδειγμα 4.2 - 10

Να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + y = e^{-x} \quad \text{όταν} \quad y(0) = -1. \tag{5}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Η αντίστοιχη ομογενής της (5) είναι $y' + y = 0$, οπότε σύμφωνα με την $(4.2-18)$ η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 1 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1$. Άρα όμοια η λύση της ομογενούς είναι

$$y_{_h} = c\,e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{6}$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (5).

Είναι $f(x) = a = 1$ και $r(x) = e^{-x}$, οπότε σύμφωνα με την $(4.2-20)$ η μερική λύση y_p της (5) είναι

$$y_p(x) = e^{-x} \int e^{x}\, e^{-x}\, dx = e^{-x} \int dx = x\, e^{-x}. \tag{7}$$

Επομένως από την $(4.2-21)$ και τις (6), (7) προκύπτει ότι η γενική λύση της (5) θα είναι

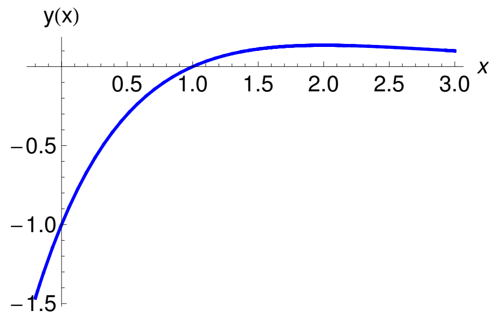
$$y(x) = y_{_h}(x) + y_p(x) = e^{-x}\,(x + c) \tag{8}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή σύμφωνα με την (5) η αρχική τιμή είναι $y(0) = -1$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (8) θέτοντας $x = 0$. Άρα $-1 = y(0) = 1(0 + c)$, οπότε $c = -1$ και η μερική λύση (Σχ. 4.2 - 7) της (5) θα είναι $y(x) = e^{-x}\,(-1 + x)$.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Έστω ότι η (5) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = e^{-x}$, οπότε σύμφωνα με το Μάθημα 3 τύπος 2 του Πίνακα 3.2-1 θα είναι $\mathcal{L}\left[e^{-x}\right] = \frac{1}{s+1}$, όταν $s+1 > 0$.



Σχήμα 4.2 - 7: Παράδειγμα 4.2 - 10: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x}\,(-1+x)$, όταν $x \in [-0.2, 3]$

Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (5). Επειδή σύμφωνα με την (5) είναι $a = 1$, θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = -1$ στην $(4.2-22)$ προκύπτει

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{s+1} + \frac{-1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}, \quad \text{όταν} \quad s+1>0.$$

Άρα

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = x\,e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}\,(-1+x)\,,$$

δηλαδή η μερική λύση που έχει προκύψει με την κλασική μέθοδο. ■

Παράδειγμα 4.2 - 11

Όμοια να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \sin 2x, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{9}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Η αντίστοιχη ομογενής της (9) είναι $y' + y = 0$, οπότε όμοια με την $(4.2-18)$ η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 1 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c\,e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{10}$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (9).

Είναι $f(x) = a = 1$ και $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με την $(4.2-20)$ η μερική λύση y_p της (9) είναι[10]

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x}\left[\int e^{x}\,\sin 2x\,dx\right] = e^{-x}\left[\frac{e^{x}}{5}\left(-2\cos 2x + \sin 2x\right)\right] \\ &= \frac{1}{5}\left(-2\cos 2x + \sin 2x\right)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Επομένως από την $(4.2-21)$ και τις (10), (11) η γενική λύση της (9) προκύπτει ότι είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{5}\left(-2\cos 2x + \sin 2x\right) \tag{12}$$

για κάθε $x \in \Re$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (9) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (12) θέτοντας $x = 0$. Άρα $0 = y(0) = c + \frac{1}{5}(-2+0)$, οπότε $c = \frac{2}{5}$ και η μερική λύση της (9) θα είναι (Σχ. 4.2 - 8)

$$y(x) = \frac{2}{5}\,e^{-x} + \frac{1}{5}\,\left(-2\cos 2x + \sin 2x\right). \tag{13}$$

Από τη λύση (13) προκύπτουν τα εξής:

i) $\lim_{x\to -\infty} y(x) = +\infty$,

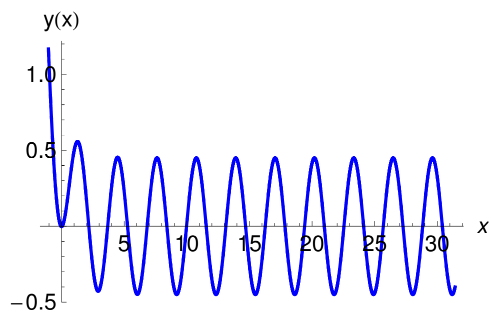
ii) όταν $x \geq \pi$ ο όρος e^{-x} πρακτικά μηδενίζεται, οπότε η λύση γράφεται[11]

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \frac{1}{5}\,\left(-2\cos 2x - \sin 2x\right) = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{5}\sin(2x+\phi) \\ &\approx 0.45\sin(2x+\phi), \quad \text{όταν} \quad \phi = \arctan(-2) \approx -1.107\,\mathrm{rad}, \end{aligned}$$

δηλαδή εκτελεί μια αμείωτη περιοδική ταλάντωση πλάτους 0.45.

[10] Παραγοντική ολοκλήρωση: γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση, οπότε εφαρμόζεται δύο φορές η παραγοντική ολοκλήρωση (βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 7).

[11] Βλέπε Μάθημα 1: Γραμμικά φάσματα.



Σχήμα 4.2 - 8: Παράδειγμα 4.2 - 11: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = \frac{2}{5}\,e^{-x} + \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)$, όταν $x \in [-\pi/3, 10\pi]$

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Έστω ότι η (9) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με το Μάθημα 3 τύπος 4 του Πίνακα 3.2-1 θα είναι $\mathcal{L}\,[\sin 2x] = \frac{2}{s^2+4}$. Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (9). Επειδή σύμφωνα με την (9) είναι $a = 1$, θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = 0$ στην $(4.2 - 22)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{2}{s^2+4}} = \frac{2}{(s+1)\,(s^2+4)} = \frac{2}{5}\,\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\,\frac{s-1}{s^2+4} \\ &= \frac{2}{5}\,\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\,\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{5}\,\frac{2}{s^2+2^2}\,, \quad \text{όταν} \quad s+1 > 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{5}\,e^{-x} + \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)\,,$$

δηλαδή η μερική λύση που έχει προκύψει με την κλασική μέθοδο. ■

Εφαρμογές από τον Ηλεκτρισμό

Εφαρμογή 4.2 - 2 (φόρτιση πυκνωτή)

Έστω πυκνωτής χωρητικότητας C που πρόκειται να φορτιστεί με τη βοήθεια πηγής σταθερής ΗΕΔ E δια μέσου ωμικής αντίστασης R. Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, δεχόμαστε ότι ο πυκνωτής είναι κενός, δηλαδή $q_0 = q(0) = 0$ (αρχική συνθήκη). Κλείνοντας το διακόπτη στο κύκλωμα υπάρχουν δύο

ΗΕΔ, που είναι η της πηγής E και αυτής που επικρατεί στους οπλισμούς του πυκνωτή. Εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε $E - q/C = iR$, που επειδή $i = dq/dt = q'(t)$, τελικά γράφεται

$$q' + \frac{1}{RC}\, q = \frac{E}{R}\,. \tag{4.2 - 23}$$

Η $(4.2-23)$ είναι μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές με αντίστοιχη ομογενή την

$$q' + \frac{1}{RC}\, q = 0. \tag{4.2 - 24}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $(4.2 - 24)$ είναι η $\lambda + 1/RC = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1/RC$. Τότε η γενική λύση της $(4.2 - 23)$ σύμφωνα με την $(4.2 - 19)$ είναι

$$q(t) = E + ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Αλλά $q_0 = 0$, οπότε $k = -CE$. Άρα η μερική λύση της $(4.2 - 23)$ είναι

$$q(t) = CE\left(1 \,-\, e^{-\frac{t}{RC}}\right). \tag{4.2 - 25}$$

Εφαρμογή 4.2 - 3 (κύκλωμα RL)

Όμοια εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε

$$\frac{d\,i}{dt} + \frac{R}{L}\, i = \frac{E}{L}\,, \tag{4.2 - 26}$$

οπότε η γενική της λύση υπολογίζεται ότι είναι

$$i = \frac{E}{R} + c\, e^{-\frac{R}{L}\, t}.$$

Αν $i(0) = i_0$, η μερική λύση της $(4.2 - 26)$ θα είναι

$$i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)\, e^{-\frac{R}{L}\, t}. \tag{4.2 - 27}$$

Ο τελευταίος όρος στην $(4.2 - 27)$ μηδενίζεται, όταν ο χρόνος t απειρίζεται, οπότε στην περίπτωση αυτή εύκολα προκύπτει ότι $i_{\max} = E/R$.

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις[12]

$i)$	$y' + y = x;\ y(0) = -1$	$v)$	$y' + 3y = e^{-x}\,\sin 2x;\ y(0) = 0$
$ii)$	$y' + 4y = e^{-3x};\ y(0) = 0$	$vi)$	$y' + y = \sin^2 x;\ y(0) = -1$
$iii)$	$y' + y = x\,e^{-x};\ y(0) = 0$	$vii)$	$y' + 4y = 1 - \sinh x;\ y(0) = 0$
$iv)$	$y' + y = \sin 2x;\ y(0) = 0$	$viii)$	$y' + y = \sin x\,\cos 2x;\ y(0) = 0.$

4.3 Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

Η γενική μορφή είναι

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0 \tag{4.3 - 1}$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, b) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε η y, εφόσον υπάρχει, θα ορίζει τη λύση της $(4.3 - 1)$.

Σημαντικό ενδιαφέρον στις εφαρμογές από το σύνολο των εξισώσεων της μορφής $(4.3-1)$ παρουσιάζει η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης, που σύμφωνα με την $(4.1 - 6)$ γράφεται

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x), \tag{4.3 - 2}$$

όταν f, g και r συνεχείς συναρτήσεις με $r(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ με αντίστοιχη ομογενή σύμφωνα με την $(4.1 - 7)$ την

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \tag{4.3 - 3}$$

Στη συνέχεια εξετάζονται αναλυτικά οι κυριότερες μορφές των $(4.3 - 2)$ και $(4.3-3)$ με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή αυτών που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

[12] $(i)\,y(x) = -1 + x + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$, $(ii)\,y(x) = e^{-3x} + c\,e^{-4x}$, μερική: $c = -1$, $(iii)\,y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$, $(iv)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{2}\left(-2\cos 2x + \sin 2x\right)$, μερική: $c = \frac{2}{5}$, $(v)\,y(x) = c\,e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{13}\left(-3\cos 3x + 2\sin 3x\right)$, μερική: $c = -\frac{1}{13}$, $(vi)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{10}\left(5 - \cos 2x - \sin 2x\right)$, μερική: $c = -\frac{14}{10}$, $(vii)\,y(x) = c\,e^{-4x} - \frac{1}{60}\left(10 - 15e^{x} + 6e^{2x}\right)$, μερική: $c = -\frac{19}{60}$, $(viii)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{20}\left(5\cos x - 3\cos 3x - 5\sin x + \sin 3x\right)$, μερική: $c = -\frac{1}{10}$.

Ομογενής γραμμική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Από τον Ορισμό 4.1 - 6 προκύπτει ότι η γενική μορφή της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + a y' + b y = 0}, \tag{4.3 - 4}$$

όταν a, b σταθερές, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Κλασική μέθοδος

Έστω $y \neq 0$, διαφορετικά η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(4.1-12)$. Σύμφωνα με την $(4.1-11)$ αντικαθιστώντας στην $(4.3-4)$ $y = e^{\lambda x}$ με λ σταθερά προκύπτει ότι η αντίστοιχη της $(4.1-12)$ χαρακτηριστική εξίσωση στην περίπτωση αυτή είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{4.3 - 5}$$

Έστω $\Delta = a^2 - 4b$ η διακρίνουσα της $(4.3-5)$. Τότε:

i) αν $\Delta > 0$, έχουμε δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες λ_1, λ_2, οπότε η γενική λύση της $(4.3-4)$ σύμφωνα με την $(4.1-13)$ θα είναι

$$\mathbf{y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}, \tag{4.3 - 6}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

ii) Αν $\Delta = 0$, έχουμε μία διπλή πραγματική ρίζα την $\lambda = -a/2$. Στην περίπτωση αυτή σύμφωνα με την $(4.1-14)$ η γενική λύση έχει τη μορφή

$$\mathbf{y_h(x) = (c_1 + x\, c_2)\, e^{\lambda x}}, \tag{4.3 - 7}$$

όταν όμοια c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

iii) Αν $\Delta < 0$, έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω τις $\lambda_1 = p + i\,\omega$ και $\lambda_2 = p - i\,\omega$ όπου $i = \sqrt{-1}$ και $\omega = \left(\sqrt{-\Delta}\right)/2$. Τότε[13]

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1^* e^{\lambda_1 x} + c_2^* e^{\lambda_2 x} = c_1^* e^{(p+i\,\omega)x} + c_2^* e^{(p-i\,\omega)x} \\ &= e^{px}\left[(c_1^* + c_2^*)\cos(\omega x) + i\,(c_1^* + c_2^*)\sin(\omega x)\right], \end{aligned}$$

[13] Ισχύει $e^{i\,\omega} = \cos\omega + i\,\sin\omega$.

δηλαδή

$$\mathbf{y_{_h}(x) = e^{px}\,[c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)]}, \tag{4.3 - 8}$$

όταν όμοια c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Η (4.3—8) χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις[14] μετασχηματίζεται τελικά στην

$$\mathbf{y_{_h}(x) = C\, e^{px} \sin(\omega x + \phi)} \tag{4.3 - 9}$$

όπου $C = \left(c_1^2 + c_2^2\right)^{1/2}$ και $\tan\phi = c_1/c_2$, όταν $c_2 \neq 0$ με $-\pi \leq \phi < \pi$.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Αν $y \in D_{\mathcal{L}}$, τότε από την $(4.3-4)$ έχουμε $\mathcal{L}\left[y'' + ay' + b\right] = 0$, που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες[15] του μετασχηματισμού Laplace γράφεται

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - {y_0}'(0) + a[s\mathcal{L}(y) - y(0)] + b\mathcal{L}(y) = 0$$

Θέτοντας $\mathcal{L}(y) = Y(s)$ και $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ (αρχικές συνθήκες), η παραπάνω σχέση, αν λυθεί ως προς $Y(s)$, τελικά δίνει

$$\mathbf{Y(s) = \frac{(s+a)y_0 + {y_0}'}{s^2 + as + b}} \tag{4.3 - 10}$$

Τότε η γενική λύση της $(4.3-4)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y_{_h}(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}. \tag{4.3 - 11}$$

[14] Βλέπε Μάθημα 1: Σειρά Fourier - Γραμμικό Φάσμα.
[15] Βλέπε Μάθημα 2: Μετασχηματισμός Laplace

Θεώρημα 4.3 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω f, $g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν κ, $\lambda \in \Re$ ισχύει*

$$\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)].$$

Θεώρημα 4.3 - 2 (παραγώγου 1ης και 2ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης και η δεύτερης τάξης παράγωγοι της f και είναι συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace των παραγώγων f', f'' και ισχύει*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f'(t)\right] &= s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0), \\ \mathcal{L}\left[f''(t)\right] &= s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0), \quad \text{όταν} \quad s > a > 0. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι η γενική λύση $(4.3-11)$ εξαρτάται από το είδος των ριζών του παρονομαστή $s^2+\alpha s+\beta$ στην $(4.3-10)$, όπως ακριβώς και με τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $F(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b$ της $(4.3-5)$. Οι Παρατηρήσεις 4.2 - 2 ισχύουν ανάλογα και στην περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 4.3 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''+5y'+6y=0, \quad \text{όταν} \quad y_0=0 \quad \text{και} \quad y_0'=1. \tag{1}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Σύμφωνα με την $(4.1-11)$ αντικαθιστώντας στην (1) $y=e^{\lambda x}$ με λ σταθερά προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωσή της είναι $\lambda^2+5\lambda+6=0$ με ρίζες $\lambda_1=-3$ και $\lambda_2=-2$. Τότε από την $(4.3-6)$ έχουμε ότι η η γενική λύση της (1) είναι

$$y_h(x)=c_1\,e^{-3x}+c_2\,e^{-2x}, \tag{2}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

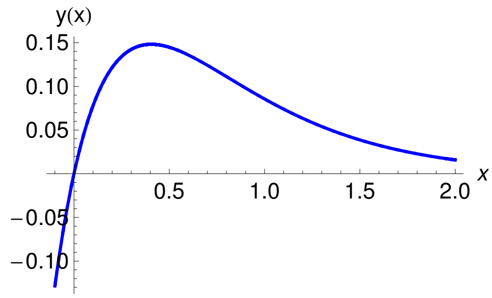
Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (2) και τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) & = & c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ y_h'(0) & = & -3c_1 & - & 2c_2 & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcr} c_1 & = & -1 \\ c_2 & = & 1\,. \end{array}$$

Άρα η μερική λύση της (1) είναι (Σχ. 4.3 - 1)

$$y(x)=y_h(x)=-e^{-3x}+e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή σαν **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**.



Σχήμα 4.3 - 1: Παράδειγμα 4.3 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$, όταν $x \in [-0.1, 2]$.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Σύμφωνα με την $(4.3 - 10)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+5)\cdot 0 + 1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{(s+3)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα. Άρα

$$y(x) = y_h(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -e^{-3x} + e^{-2x},$$

δηλαδή η μερική λύση που έχει προκύψει με την κλασική μέθοδο.

Παράδειγμα 4.3 - 2

Όμοια η εξίσωση

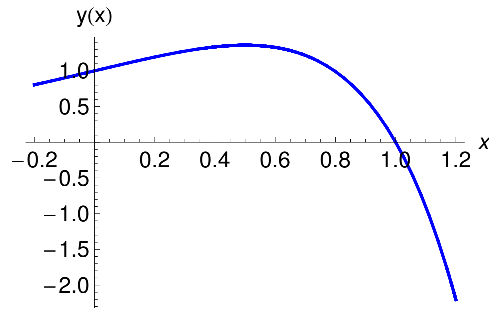
$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = 1. \tag{3}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Όμοια η χαρακτηριστική της εξίσωση της (3) είναι $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ με διπλή ρίζα την $\lambda = 2$. Τότε σύμφωνα με την $(4.3 - 7)$ η γενική της λύση είναι

$$y_h(x) = (c_1 + c_2\, x)\, e^{2x}, \tag{4}$$



Σχήμα 4.3 - 2: Παράδειγμα 4.3 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_h(x) = e^{-2x}(1-x)$, όταν $x \in [-0.2, 1.2]$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (4) και τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) & = & c_1 & + & & = & 1 \\ y_h'(0) & = & 2c_1 & + & c_2 & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcr} c_1 & = & 1 \\ c_2 & = & -1. \end{array}$$

Άρα η μερική λύση της (3) είναι (Σχ. 4.3 - 2)

$$y_h(x) = e^{-2x}(1-x).$$

Η λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, η $y_h(x) = 0$, όταν $x_0 = 1$. Τότε το x_0 είναι το σημείο στατικής ισορροπίας.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Σύμφωνα με την $(4.3 - 10)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s-4)\cdot 1 + 1}{s^2 - 4s + 4} = \frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} \\ &= \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \left(\frac{1}{s-2}\right)' \\ &= \frac{1}{s-2} - (-1)^1 \left(\frac{1}{s-2}\right)'. \end{aligned}$$

Επειδή σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace ισχύει ότι, αν $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$, τότε $\mathcal{L}[x\,f(x)] = (-1)^1\,F'(s)$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει τελικά ότι

$$y_h(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{2x}(1-x),$$

δηλαδή όμοια η μερική λύση της κλασικής μεθόδου.

Παράδειγμα 4.3 - 3

Όμοια η εξίσωση

$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = 0. \tag{5}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Η χαρακτηριστική της εξίσωση της (5) είναι $16\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = -\frac{1}{4} + i$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{4} - i$. Τότε σύμφωνα με την $(4.3 - 8)$ έχουμε τη γενική λύση

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{4}}\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right), \tag{6}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

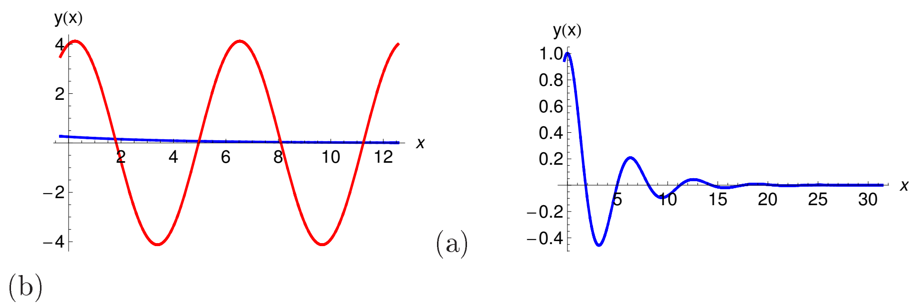
Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (6) και τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) & = & c_1 & + & & = & 1 \\ y_h'(0) & = & -\frac{1}{4}\,c_1 & + & c_2 & = & 0, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcl} c_1 & = & 1 \\ c_2 & = & \frac{1}{4}\,. \end{array}$$

Άρα η μερική λύση της (5) είναι (Σχ. 4.3 - 3)

$$y_h(x) = \frac{1}{4}\,e^{-x/4}\,(4\,\cos x + \sin x).$$

Η λύση περιγράφει μια **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**.



Σχήμα 4.3 - 3: Παράδειγμα 4.3 - 2, όταν $x \in [-\pi/10, 4\pi]$:(a) το διάγραμμα της $\frac{1}{4}\, e^{-x/4}$ μπλε (απόσβεση) και της $4\cos x + \sin x$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y_h(x) = \frac{1}{4}\, e^{-x/4}(4\cos x + \sin x)$. Η απόσβεση προκαλεί τελικά το μηδενισμό της μερικής λύσης

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Η (5) γράφεται $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{17}{16}y = 0$, οπότε σύμφωνα με την $(4.3-10)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+\frac{1}{2})\cdot 1 + 0}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{17}{16}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2 + 2\,\frac{1}{4}s + \frac{16+1}{16}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2 + 2\,\frac{1}{4}s + \frac{1}{16} + 1} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1} = \frac{s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{s+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2}\,. \end{aligned}$$

Άρα[16]

$$y_h(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-x/4}\,\cos x + \frac{1}{4}\,e^{-x/4}\,\sin x,$$

δηλαδή όμοια η μερική λύση της κλασικής μεθόδου.

[16] Μάθημα 3: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace, τύποι 5 και 7 του Πίνακα 3.2-1.

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις[17]

$i)$ $y'' + 4y' + 5y = 0;\ y_0' = y_0 = 1$

$ii)$ $y'' - y' - 12y = 0;\ y_0' = 1,\ y_0 = 0$

$iii)$ $y'' + 2y' + 10y = 0;\ y_0' = 1,\ y_0 = 0$

$iv)$ $y'' + 25y = 0;\ y_0' = y_0 = 1$

$v)$ $y'' + 2y' + 4y = 0;$ $y_0' = 1,\ y_0 = 0$

$vi)$ $y'' - 2y' + y = 0;$ $y_0' = -1,\ y_0 = 1.$

Μη ομογενής γραμμική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Από τον Ορισμό 4.1 - 6 προκύπτει ότι η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = r(x)} \qquad (4.3 - 12)$$

όταν $a,\, b \in \Re$, $y = y(x)$, $r(x) \neq 0$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 - 1 η γενική λύση της $(4.3 - 12)$ είναι $y = y_h + y_p$, όπου y_h είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή της $(4.3 - 4)$ και y_p μία μερική λύση της μη ομογενούς $(4.3 - 12)$. Οι κυριότερες μέθοδοι προσδιορισμού της λύσης y_p δίνονται στη συνέχεια.

Κλασική μέθοδος λύσης - Μέθοδος του Lagrange

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης y_p θεωρείται στη γενική λύση $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς της $(4.3 - 12)$, δηλαδή της $(4.3 - 4)$, οι σταθερές c_1 και c_2 είναι συναρτήσεις του x, που πρέπει να προσδιοριστούν, έτσι ώστε να επαληθεύεται η $(4.3 - 12)$. Επομένως

$$\mathbf{y_p(x) = k_1(x) y_1(x) + k_2(x) y_2(x)}.$$

[17] $(i)\ e^{-2x}(\cos x + 3\sin x)$, $(ii)\ \frac{1}{7}\left(-e^{-3x} + e^{4x}\right)$, $(iii)\ \frac{1}{3} e^{-x}\sin 3x$, $(iv)\ \frac{1}{5}(5\cos 5x + \sin 5x)$, $(v)\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-x} \sin\left(\sqrt{3}\,x\right)$, $(vi)\ -e^{x}(-1 + 2x)$.

Τότε

$$y_p(x)' = k_1'(x)y_1(x) + k_1(x)y_1'(x) + k_2'(x)y_2(x) + k_2(x)y_2'(x). \qquad (1)$$

Στην (1) οι συναρτήσεις $k_1(x)$ και $k_2(x)$ εκλέγονται, έτσι ώστε

$$k_1'(x)y_1(x) + k_2'(x)y_2(x) = 0, \qquad (2)$$

οπότε από την (1) προκύπτει στην περίπτωση αυτή ότι

$$y_p(x)'' = k_1(x)y_1''(x) + k_1'(x)y_1'(x) + k_2(x)y_2''(x) + k_2'(x)y_2'(x). \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (1), (2) και (3) στην $(4.3 - 12)$, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της $(4.3 - 4)$, προκύπτει

$$\begin{aligned} r(x) &= \underbrace{k_1 y_1''} + k_1'y_1' + \overbrace{k_2 y_2''} + k_2'y_2' + a\left(\underbrace{k_1 y_1'} + \overbrace{k_2 y_2'}\right) + b\left(\underbrace{y_1 k_1} + \overbrace{y_2 k_2}\right) \\ &= k_1\left(y_1'' + \alpha\, y_1' + \beta\, y_1\right) + k_2\left(y_2'' + \alpha\, y_2' + \beta\, y_2\right) + k_1'y_1' + k_2'y_2' \\ &= k_1'y_1' + k_2'y_2'. \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$k_1'(x)y_1'(x) + k_2'(x)y_2'(x) = r(x). \qquad (5)$$

Οι εξισώσεις (2) και (5) ορίζουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τις συναρτήσεις $k_1'(x)$ και $k_2'(x)$, από τη λύση του οποίου προκύπτει

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx \quad \text{και} \quad k_2(x) = \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx\,, \quad \text{όταν} \\ u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x). \end{aligned} \qquad (4.3 - 12)$$

Τότε σύμφωνα και με την $(4.3 - 12)$ η γενική λύση της $(4.3 - 12)$ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y(x)} &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= \mathbf{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + k_1(x)\, y_1(x) + k_2(x)\, y_2(x)}. \end{aligned} \qquad (4.3 - 13)$$

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Έστω $y, r \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε, ανάλογα με την αντίστοιχη λύση της ομογενούς, θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της $(4.3-12)$, τελικά προκύπτει

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{\mathcal{L}[\mathbf{r}(\mathbf{x})]}{\mathbf{s^2}+\mathbf{as}+\mathbf{b}} + \frac{(\mathbf{s}+\mathbf{a})\mathbf{y_0}+\mathbf{y_0}'}{\mathbf{s^2}+\mathbf{as}+\mathbf{b}}, \tag{4.3 - 14}$$

οπότε η γενική λύση της μη ομογενούς θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{y_h}(\mathbf{x}) + \mathbf{y_p}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}(\mathbf{s})]. \tag{4.3 - 15}$$

Παράδειγμα 4.3 - 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0. \tag{1}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Η ομογενής εξίσωση της (1) είναι $y''-3y'+2y=0$ με χαρακτηριστική εξίσωση την $F(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ και ρίζες τις $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Άρα σύμφωνα με την $(4.3-6)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x}, \tag{2}$$

όταν $c_1,\ c_2$ αυθαίρετες σταθερές.

Σύμφωνα με την $(4.3-12)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = e^x(2e^{2x}) - e^x\, e^{2x} = e^{3x},\\
k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{x\, e^{2x}}{e^{3x}}\, dx = -\int x\, e^{-x}\, dx\\
&= x\, e^{-x} + e^{-x},\\
k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{x\, e^{x}}{e^{3x}}\, dx = \int x\, e^{-2x}\, dx\\
&= -\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Άρα από την (2) και την $(4.3-13)$ έχουμε ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} + e^x \left(x\, e^{-x} + e^{-x}\right) + e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-2x}\right) \\ &= c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\, x. \end{aligned}$$

Η μερική λύση αφήνεται σαν άσκηση.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Στην (4.3–14) είναι $a = -3$, $b = 2$ και $\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(x) = 1/s^2$. Αντικαθιστώντας στον τύπο $(4.3-14)$ μετά και την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2\,(s^2-3s+2)} = \frac{1}{s^2(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s-1} + \frac{\Delta}{s-2} \\ &= \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4(s-2)}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(4.3-15)$ η μερική λύση της (1) είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{4} + \frac{x}{2} - e^x + \frac{e^{2x}}{4}\,.$$

■

Παράδειγμα 4.3 - 5

Όμοια της

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0. \tag{3}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Η ομογενής εξίσωση της (3) είναι $y''+2y'+y=0$ με χαρακτηριστική εξίσωση την $F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ και ρίζα $\lambda = -1$ διπλή. Άρα σύμφωνα με την $(4.3-7)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}, \tag{4}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την $(4.3-12)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = e^{-x}\left(xe^{-x}\right)' - \left(e^{-x}\right)'\, x\, e^{-x} = e^{-2x}, \\ k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{e^{-2x}\, x\, e^{-x}}{e^{-2x}}\, dx = -\int x\, e^{-x}\, dx \\ &= x\, e^{-x} + e^{-x}, \\ k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{e^{-2x}\, e^{-x}}{e^{-2x}}\, dx = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}. \end{aligned}$$

Άρα από την (4) και την $(4.3-13)$ έχουμε ότι η γενική λύση της (3) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} + e^{-x}\left(x\, e^{-x} + e^{-x}\right) + x\, e^{-x}\left(-e^{-x}\right) \\ &= c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} + e^{-2x}. \end{aligned}$$

Όμοια η μερική λύση αφήνεται σαν άσκηση.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Όμοια είναι $a = 2$, $b = 1$ και $\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(e^{-2x}) = 1/(s+2)$. Τότε από τον τύπο $(4.3-14)$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+2)\,(s^2+2s+1)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} \\ &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{s+1} \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα και την $(4.3-15)$ η μερική λύση της (3) είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2x} + x\, e^{-x} - e^{-x} = e^{-2x}\left(1 + x\, e^{x} - e^{x}\right).$$

■

Παράδειγμα 4.3 - 6

Όμοια η

$$y'' + 4y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0. \tag{5}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Η ομογενής εξίσωση της (5) είναι $y'' + 4y = 0$ με χαρακτηριστική εξίσωση την $F(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$ και ρίζες $\lambda = 2i$, $\overline{\lambda} = -2i$. Άρα σύμφωνα με την $(4.3-8)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \tag{6}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την $(4.3-12)$ είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = \cos 2x\, (\sin 2x)' - (\cos 2x)' \sin 2x \\ &= 2\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{x \sin 2x}{2}\, dx = -\frac{1}{2}\int x \sin 2x\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int x \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]' dx = \frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{x \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int x \cos 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int x \left[-\frac{\sin 2x}{2}\right]' dx = \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x. \end{aligned}$$

Άρα από την (6) και την $(4.3-13)$ έχουμε ότι η γενική λύση της (5) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \cos 2x \left(\frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\underbrace{\sin 2x}\right) \\ &\quad + \sin 2x \left(\frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\underbrace{\cos 2x}\right) \\ &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4}. \end{aligned}$$

Όμοια η μερική λύση αφήνεται σαν άσκηση.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Όμοια είναι $a = 0$, $b = 4$ και $\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(x) = 1/s^2$. Τότε από τον τύπο $(4.3 - 14)$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2\,(s^2+4)} \\ &= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{\Gamma s + \Delta}{s^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4\cdot 2}\frac{2}{s^2+2^2} \end{aligned}$$

μετά την κατάλληλη τροποποίηση του τελευταίου όρου στο δεξιό μέλος στην παραπάνω ισότητα. Άρα σύμφωνα με την $(4.3 - 15)$ η μερική λύση της (5) είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\sin 2x.$$

■

Παράδειγμα 4.3 - 7

Όμοια η

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0. \tag{7}$$

Λύση.

Κλασική μέθοδος

Η ομογενής εξίσωση της (7) είναι $y'' + 2y' + 10y = 0$ με χαρακτηριστική εξίσωση την $F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ και ρίζες $\lambda = -1 + 3\,i$, $\overline{\lambda} = -1 - 3\,i$. Άρα σύμφωνα με την $(4.3 - 8)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x)e^{-x}\left(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x\right), \tag{8}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Τότε όμοια από την $(4.3-12)$ είναι

$$\begin{aligned}
u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = e^{-x}\cos 3x\,\left(-e^{-x}\sin 3x + 3\,e^{-x}\cos 3x\right) \\
&\quad -e^{-x}\sin 3x\,\left(-e^{-x}\cos 3x - 3\,e^{-x}\sin 3x\right) \\
&= 3\,e^{-x}\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right) = 3\,e^{-2x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{1\cdot\, e^{-2x}\sin 3x}{3\,e^{-x}}\, dx = -\frac{1}{3}\int e^{x}\,\sin 3x\, dx \\
&= -\frac{e^{x}}{10}\left(-3\,\cos 3x + \sin 3x\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{1\cdot\, e^{-x}\cos 3x}{3\,e^{-2x}}\, dx = \frac{1}{3}\int e^{x}\,\cos 3x\, dx \\
&= \frac{e^{x}}{10}\left(\cos 3x + 3\,\sin 3x\right).
\end{aligned}$$

Άρα από την (8) και την $(4.3-13)$ έχουμε ότι η γενική λύση της (7) είναι

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-x}\left(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x\right) \\
&\quad +e^{-x}\,\cos 3x\,\left[-\frac{e^{x}}{3\cdot 10}\left(-3\,\cos 3x + \underbrace{\sin 3x}\right)\right] \\
&\quad +e^{-x}\,\sin 3x\,\left[\frac{e^{x}}{3\cdot 10}\,\left(\underbrace{\cos 3x} + 3\,\sin 3x\right)\right] \\
&= e^{-x}\left(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x\right) + \frac{3}{3\cdot 10}\,\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right) \\
&= e^{-x}\left(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x\right) + \frac{1}{10}\,.
\end{aligned}$$

Όμοια η μερική λύση αφήνεται σαν άσκηση.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Όμοια είναι $a=2$, $b=10$ και $\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(1) = 1/s$. Τότε από τον τύπο $(4.3-14)$ προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{1}{s\,(s^2+2s+10)}$$

(επειδή το s^2+2s+2 έχει ρίζες μιγαδικές δεν αναλύεται)

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{s}+\frac{Bs+\Gamma}{s^2+2s+10}=\frac{1}{10}\,\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\,\frac{s+2}{s^2+2s+10}\\
&= \frac{1}{10}\,\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\,\frac{s+2}{(s+1)^2+3^2}\\
&= \frac{1}{10}\,\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+\frac{1}{3}\,\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right]
\end{aligned}$$

μετά την τροποποίηση του παρανομαστή $s^2+2s+10$ σε άθροισμα τετραγώνων. Άρα σύμφωνα με την $(4.3-15)$ η μερική λύση της (7) είναι

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\left(e^{-x}\,\cos 3x+\frac{1}{3}\,e^{-x}\sin 3x\right).$$

■

Δίνεται στη συνέχεια ένα παράδειγμα, όπου η λύση προκύπτει ευκολότερα με το μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα 4.3 - 8

Έστω ότι η κίνηση ενός συστήματος περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$y''+6y'+8y=r(t) \tag{9}$$

όπου $y=y(t)$ και η συνάρτηση $r(t)$ περιγράφει μία κρούση 4 μονάδων τη χρονική στιγμή $t=5$, ενώ οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $y(0)=0$ και $y'(0)=3$. Τότε $r(t)=\delta(t-5)$, οπότε, θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της (9) σύμφωνα και με τον τύπο $(4.3-14)$ και τον τύπο 17 του Πίνακα 3.2 - 1 Μάθημα: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace, έχουμε

$$\left(s^2\,Y(s)-sy_0-{y_0}'\right)+6\,(5Y(s)-y_0)+8Y(s)=4e^{-5s}, \tag{10}$$

όταν $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$. Η (10), όταν λυθεί ως προς $Y(s)$, δίνει

$$Y(s)=\left(3+4e^{-5s}\right)\frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

ή μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$Y(s) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right) + \left(\frac{e^{-5s}}{s+2} - \frac{e^{-5s}}{s+4}\right). \tag{11}$$

Τότε από την (11) σύμφωνα και με τον τύπο 3 του Πίνακα 3.2 - 1 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}Y(s) = \frac{3}{2}\left(e^{-2t} - e^{-4t}\right) \\ &\quad +2u(t-5)\left[e^{-2(t-5)} - e^{-4(t-5)}\right], \end{aligned}$$

δηλαδή

$$y(t) = e^{-2t}\left[\frac{3}{2} + 2e^{10}u(t-5)\right] - e^{-4t}\left[\frac{3}{2} + 2e^{20}u(t-5)\right].$$

Τέλος πρέπει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι είναι πολλές οι περιπτώσεις, που και οι δύο μέθοδοι σε πολλές εφαρμογές αδυνατούν να δώσουν λύση. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται κυρίως αριθμητικές μέθοδοι.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν $y = y(x)$ και $y_0 = y'_0 = 0$[18]

$i)$ $y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$ $\quad iv)$ $y'' + 2y' + y = \sin x$

$ii)$ $y'' + y = \sin x$ $\quad v)$ $y'' + y' = e^{-x}\sin x$

$iii)$ $y'' + 3y' + 2y = x$ $\quad vi)$ $y'' + 4y' + 3y = 4\,e^{-x}$.

2. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 13y = 2\delta(t)$, όπου $y = y(x)$ και $y_0 = y'_0 = 0$, έχει λύση την

$$y(x) = 2e^{-2x}\left(\cos 3x + \sin 3x\right).$$

[19]

[18] $(i)\ \frac{1}{30}\,e^{-2x}\left(3e^{x} - 3\cos 3x - \sin 3x\right)$, $(ii)\ \frac{1}{2}\left(-x\cos x + \sin x\right)$, $(iii)\ -\frac{3}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + e^{-x} + \frac{x}{2}$, $(iv)\ -\frac{1}{2}\,e^{-x}\left(1 + x - e^{x}\cos c\right)$, $(v)\ \frac{1}{2}\,e^{-x}\left(-2 + e^{x} + \cos x - \sin x\right)$, $(vi)\ e^{-3x}\left(1 - e^{2x} + 2x\,e^{2x}\right)$.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Bronson, R. (1978), Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική, ISBN 978–000–761–014–3.

[4] Αθανασιάδη, Α. (1993), Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–219–7.

[5] Αθανασιάδη, Α. (1997), Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Διόσκουροι, ISBN 960–650–00–4.

[6] Churchill R., Brown J. (2005), Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–7309–41–3.

[7] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[8] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[9] Spiegel M., Schaum's Outlines – Laplace Transforms (1965), McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 978–007–060–231–1.

[10] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων