Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

**Ενότητα 6:** Συναρτήσεις πολλών Μεταβλητών

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Βιοϊατρικής Τεχνολογίας ΤΕ



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# Μάθημα 6

# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στο μάθημα αυτό θα γίνει μια γενίκευση της ήδη γνωστής στον αναγνώστη έννοιας της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής σε **δύο**, αντίστοιχα **τρεις** μεταβλητές.

## 6.1 Εισαγωγικές έννοιες

### 6.1.1 Ορισμοί

**Ορισμός 6.1 - 1 (συνάρτησης πολλών μεταβλητών)** *Έστω $D \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $D \subseteq \Re^3$ και $T \subseteq \Re$ δύο τυχόντα μη κενά σύνολα. Τότε μία συνάρτηση δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών με πεδίο ορισμού το $D$ και πεδίο τιμών το $T$ είναι μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω $f$, του συνόλου $D$ στο $T$, τέτοια ώστε:*

$$\begin{aligned} D \ni (x, y) \;\longrightarrow&\quad f(x, y) = w \in T, \\ \textit{αντίστοιχα}\quad& \\ D \ni (x, y, z) \;\longrightarrow&\quad f(x, y, z) = w \in T. \end{aligned} \tag{6.1 - 1}$$

Τα $x, y$, αντίστοιχα $x, y, z$ είναι στην περίπτωση αυτή οι ανεξάρτητες μεταβλητές ή απλά μεταβλητές ή επίσης και τα στοιχεία (arguments) της $f$, ενώ $w$ η εξαρτημένη μεταβλητή. Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, η $f$ ορίζει τον **τύπο** της συνάρτησης, δηλαδή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η παραπάνω απεικόνιση.

Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού $D$ γίνεται όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης με μία μεταβλητή, με τη διαφορά ότι προσδιορίζονται οι τιμές για τις οποίες ορίζεται η $f$ για κάθε μεταβλητή $x$, $y$, αντίστοιχα $x$, $y$, $z$ χωριστά και στη συνέχεια το $D$ σαν η ένωση των επί μέρους πεδίων ορισμού. Μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $D$ θα συμβολίζεται στο εξής με $f|D$ ή αναλυτικά $f(x,y)|D$, αντίστοιχα $f(x,y,z)|D$. Τα πεδία ορισμού και τιμών είναι μια **καμπύλη επιφάνεια** ή γενικότερα μια **τρισδιάστατη περιοχή** του χώρου.

Έστω $w = f(x,y)|D$, αντίστοιχα $w = f(x,y,z)|D$. Τότε η γραφική παράσταση της $f$ θα είναι το σύνολο των σημείων

$$\{((x,y),w) \in D \times T, \quad \text{αντίστοιχα} \quad ((x,y,z),w) \in D \times T.\}$$

**Παράδειγμα 6.1 - 1**

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f_1(x,y) = \sqrt{x+y}, \quad f_2(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y} \quad \text{και} \quad f_3(x,y) = \ln\left(4 - x^2 - 4y^2\right).$$

**Λύση.** Επειδή από τον τύπο της $f_1$ πρέπει να προκύπτει πραγματικός αριθμός, το πεδίο ορισμού $D_1$ θα είναι

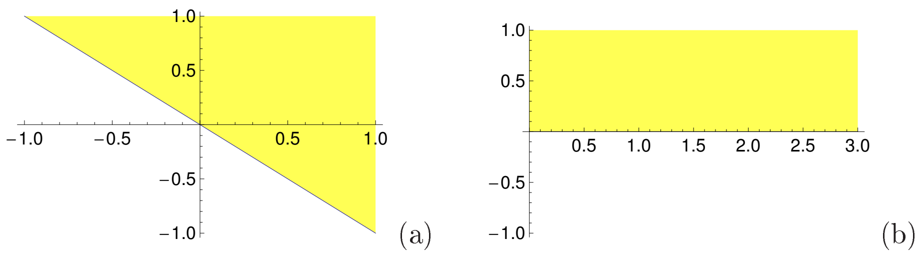
$$D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad x + y \geq 0\}.$$

Γραφικά το $D_1$ ορίζεται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο άνω μέρος της ευθείας $x + y = 0$ (Σχ. 6.1 - 1a).[1]

Όμοια το πεδίο ορισμού $D_2$ της $f_2$ θα είναι

$$D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\},$$

[1]Υπενθυμίζεται ότι η ανισότητα $Ax + By + \Gamma > 0$ λύνεται γραφικά, όταν χαραχθεί η ευθεία $\varepsilon : \quad Ax + By + \Gamma = 0$ και θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων $(x,y) \in \Re^2$ που είναι στο άνω μέρος της $\varepsilon$.




**Σχήμα** 6.1 - 1: Παράδειγμα 6.1 - 1: (a) το πεδίο ορισμού $D_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : x + y \geq 0, \}$ της συνάρτησης $f_1(x, y) = \sqrt{x + y}$. Η μπλε ευθεία έχει εξίσωση $x + y = 0$. (b) Το πεδίο ορισμού $D_2 = \{(x, y) \in \Re^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ της $f_2(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

δηλαδή το 1ο τεταρτημόριο του Σχ. 6.1 - 1b.

Τέλος, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής της, για το πεδίο ορισμού $D_3$ της $f_3$ πρέπει $4 - x^2 - 4y^2 > 0$ ή $1 > \frac{x^2}{4} + y^2$, οπότε

$$D_3 = \{(x, y) \in \Re^2 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\},$$

δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι το εσωτερικό της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (Σχ. 6.1 - 2a). Στο Σχ. 6.1 - 2b δίνεται η γραφική παράσταση της $f_3$.

■

**Παράδειγμα 6.1 - 2**

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

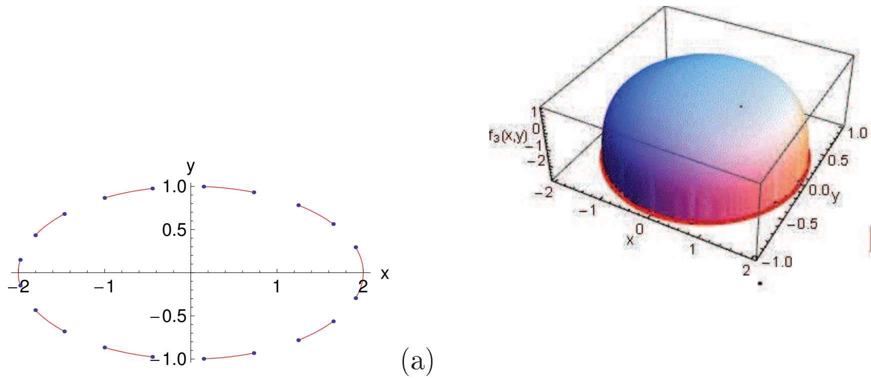
$$f(x, y) = \sin^{-1} x + \sqrt{xy}.$$

**Λύση.** Είναι γνωστό[2] ότι η συνάρτηση $\sin^{-1} x$ ορίζεται για κάθε $x \in [-1, 1]$. Επομένως ο πρώτος όρος της $f$ ορίζεται όταν $-1 \leq x \leq 1$.

[2]Όταν η συνάρτηση $\sin x$ θεωρηθεί ότι έχει πεδίο ορισμού το $[-\pi/2, \pi/2]$, τότε ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση τόξο ημιτόνου $x$, που συμβολίζεται με $\sin^{-1} x$ ή $\arcsin x$ και έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, δηλαδή το πεδίο τιμών της $\sin x$.

Όμοια, όταν η συνάρτηση $\tan x$ θεωρηθεί ότι έχει πεδίο ορισμού το $(-\pi/2, \pi/2)$, τότε ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση τόξο εφαπτομένης $x$, που συμβολίζεται με $\tan^{-1} x$ ή $\arctan x$ και έχει πεδίο ορισμού το $\Re$, δηλαδή το πεδίο τιμών της $\tan x$.

Βλέπε επίσης βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 4.




(a) (b)

**Σχήμα** 6.1 - 2: Παράδειγμα 6.1 - 1: (a) το πεδίο ορισμού $D_3 = \{(x, y) \in \Re^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$ της συνάρτησης $f_3(x, y) = \ln\left(4 - x^2 - 4y^2\right)$. Η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (b) Η γραφική παράσταση της $f_3(x, y)$. Η κόκκινη καμπύλη δεν συμπεριλαμβάνεται στο διάγραμμα

Ο δεύτερος όρος $\sqrt{xy}$ ορίζεται όταν $xy \geq 0$, δηλαδή όταν τα $x$, $y$ είναι ομόσημα. Άρα το πεδίο ορισμού της $f$ θα είναι $D = D_1 \cup D_2$, όπου

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \Re^2 : \ -1 \leq x \leq 0, \quad y \leq 0\} \quad \text{και} \\ D_2 &= \{(x, y) \in \Re^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \quad y \geq 0\}. \end{aligned}$$

■

**Παράδειγμα 6.1 - 3**

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x, y, z) = \ln(x - y + 4z) \quad \text{και} \quad g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}.$$

**Λύση.** Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής της, το πεδίο ορισμού $D_f$ της $f$ είναι

$$D_f = \{(x, y, z) \in \Re^3 : \quad x - y + 4z > 0\},$$

δηλαδή πρόκειται για το άνω μέρος του επιπέδου με εξίσωση $\pi: \quad x-y+4z=0$.[3]

Όμοια το πεδίο ορισμού $D_g$ της $g$, λόγω της τετραγωνικής ρίζας και του παρονομαστή, θα είναι

$$D_g = \{(x,y,z) \in \Re^3 : \quad x^2+y^2+z^2 < 9\},$$

δηλαδή το εσωτερικό της σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0,0,0)$ και ακτίνα $R=3$. ■

Από το Παράδειγμα 6.1 - 3 προκύπτει ότι στις περιπτώσεις συναρτήσεων τριών μεταβλητών το πεδίο ορισμού είναι ή μια επιφάνεια - περίπτωση πεδίου ορισμού $D_f$ - ή ένας όγκος - πεδίο ορισμού $D_g$. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, έστω $f$, στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να γίνει από το διάγραμμα του πεδίου τιμών $T$ των σημείων, δηλαδή του συνόλου $T = \{f(x,y,z) \quad \text{με} \quad (x,y,z) \in D\}$, όταν $D$ το πεδίο ορισμού της $f$ και είναι γενικά μια επιφάνεια ή και ένας όγκος του χώρου των τριών διαστάσεων.

---

[3] Υπενθυμίζεται ότι η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου είναι

$$ax+by+cz=d, \tag{6.1 - 2}$$

που, όταν η $(6.1-2)$ λυθεί ως προς $z$, ισοδύναμα γράφεται και

$$z=f(x,y)=Ax+By+D. \tag{6.1 - 3}$$

Η γραφική παράσταση ενός επιπέδου γενικά γίνεται με τον προσδιορισμό των σημείων τομής του επιπέδου με τους άξονες συντεταγμένων. Τότε ενώνοντας τα τρία παραπάνω σημεία τομής το δημιουργούμενο τρίγωνο δείχνει και τη μορφή του επιπέδου. Για παράδειγμα, έστω ότι ζητείται η γραφική παράσταση του επιπέδου $3x+4y+z=12$, που είναι της μορφής $(6.1-2)$ και σύμφωνα με την $(6.1-3)$ ισοδύναμα γράφεται

$$z=12-3x-4y, \quad \text{δηλαδή} \quad f(x,y)=12-3x-4y. \tag{6.1 - 4}$$

Τότε θέτοντας στην $(6.1-4)$ $x=y=0$ προσδιορίζεται ότι το σημείο τομής του επιπέδου με τον $z$-άξονα είναι το $(0,0,12)$. Όμοια το σημείο τομής με τον $x$-άξονα είναι το $(4,0,0)$ και με τον $y$-άξονα το $(0,3,0)$.

Η ανισότητα $ax+by+cz>0$ λύνεται γραφικά, όταν αρχικά γίνει η γραφική παράσταση του επιπέδου

$$\pi: \quad ax+by+cz=0$$

και στη συνέχεια θεωρώντας το σύνολο των σημείων $(x,y,z) \in \Re^3$ που είναι στο άνω μέρος του $\pi$.

## Άσκηση

Των παρακάτω συναρτήσεων να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού και να γίνει η γραφική παράσταση

$i)\ \ (4 - x^2 - y^2)^{1/2}$ $\qquad v)\ \ 1/\ln(x + y + z),$

$ii)\ \ \ln(x - y)$ $\qquad vi)\ \ \tan^{-1} y + \sqrt{xy},$

$iii)\ \ (9 - x^2)^{1/2} + (4 - y^2)^{1/2}$ $\qquad vii)\ \ \ln(xyz),$

$iv)\ \ \sin^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\qquad viii)\ \ \ln\left(x^2 + y^2 - z^2\right).$

### 6.1.2 Σύγκλιση συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

**Ορισμός 6.1 - 1 (δύο μεταβλητών).** *Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού $D \subseteq \Re^2$. Τότε θα είναι*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = l, \tag{6.1 - 1}$$

*τότε και μόνον όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε $|f(x, y) - l| < \varepsilon$ για κάθε $(x, y) \in D$ και $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.*

**Ορισμός 6.1 - 2 (τριών μεταβλητών).** *Έστω η συνάρτηση $f(x, y, z)$ με πεδίο ορισμού $D \subseteq \Re^3$. Τότε θα είναι*

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = l, \tag{6.1 - 2}$$

*τότε και μόνον όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε $|f(x, y, z) - l| < \varepsilon$ για κάθε $(x, y, z) \in D$ και $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\,(z - z_0)^2} < \delta$.*

Σχετικά με τη διαδικασία υπολογισμού των επί μέρους οριακών τιμών στην περίπτωση του Ορισμού 6.1 - 1 ισχύει η παρακάτω πρόταση[4].

[4] Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την περίπτωση του Ορισμού 6.1 - 2 (βλέπε βιβλιογραφία).

**Πρόταση 6.1 - 1.** *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$ με $(x,y)\in D\subseteq\Re^2$ ανοικτό σύνολο και σημείο $(x_0,y_0)\in D$. Αν $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l$ και υπάρχουν στο $\Re$ οι οριακές τιμές $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ και $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$, τότε*

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) &= \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]\\ &= \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]=l. \qquad (6.1 - 3)\end{aligned}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα.

**Παράδειγμα 6.1 - 1**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y} \text{ με πεδίο ορισμόύ } D=\{(x,y)\in\Re^2 \text{ με } (x,y)\neq(0,0)\}.$$

Τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\begin{cases}\dfrac{0-y}{0+y}=-1 & \text{αν} \quad y\neq 0\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x+0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x'}{x'}=1 & \text{αν} \quad y=0,\end{cases}$$

ενώ

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\begin{cases}\dfrac{x-0}{x+0}=1 & \text{αν} \quad x\neq 0\\[2ex] \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-y}{0+y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y'}{y'}=-1 & \text{αν} \quad x=0,\end{cases}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]=1, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]=-1,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.1 - 1 το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

**Σημειώσεις 6.1 - 1**

Ανάλογα με τις ιδιότητες των ορίων των συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύει ότι:

- το όριο εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό,
- το όριο του αθροίσματος, της διαφοράς και του γινομένου ισούται με το άθροισμα των ορίων, της διαφοράς και του γινομένου. Όμοια του πηλίκου, όταν το όριο του παρονομαστή είναι διάφορο του μηδενός, ισούται με το πηλίκο των ορίων.

## Άσκηση

Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $(0,0)$

| | |
|---|---|
| $i)\quad \dfrac{x-y^2}{x+y^2}$ | $iv)\quad \dfrac{x-2y}{x+y}$ |
| $ii)\quad \dfrac{\lvert xy\rvert}{xy}$ | $v)\quad \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$ |
| $iii)\quad \dfrac{y}{x^2+y^2}$ | $vi)\quad (1+y)\,\dfrac{\sin^2 x}{x}\,.$ |

### 6.1.3 Συνέχεια συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

Ανάλογα με την Παράγραφο 6.1.2 δίνεται και στην περίπτωση αυτή ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών.

**Ορισμός 6.1 - 1 (συνέχειας).** *Μία συνάρτηση $f(x,y)$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$ με πεδίο ορισμού, έστω $D \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $D \subseteq \Re^3$, θα είναι συνεχής στο σημείο $(x_0,y_0) \in D$, αντίστοιχα $(x_0,y_0,z_0) \in D$ τότε και μόνον, όταν*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f\left(x_0,y_0\right),$$

*αντίστοιχα*

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f\left(x_0,y_0,z_0\right).$$

Οι παραπάνω οριακές τιμές υπολογίζονται σύμφωνα με τους Ορισμούς 6.1 - 1, αντίστοιχα 6.1 - 2.

**Παράδειγμα 6.1 - 1**

Η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \alpha\nu \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$, επειδή με ανάλογους υπολογισμούς με εκείνους του Παραδείγματος 6.1 - 1 προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to 0}\left[\lim_{y \to 0} f(x,y)\right] = 0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \lim_{y \to 0}\left[\lim_{x \to 0} f(x,y)\right] = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.1 - 1 $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$, δηλαδή υπάρχει η οριακή τιμή και ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

**Παράδειγμα 6.1 - 2**

Η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \alpha\nu \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Η λύση, που προκύπτει με υπολογισμούς ανάλογους των Παραδειγμάτων 6.1 - 1 και 6.1 - 1, αφήνεται σαν άσκηση.

### Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Οι παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων δύο μεταβλητών αποτελούν μια γενίκευση των αντίστοιχων για μια μεταβλητή[5]. Ανάλογες προτάσεις ισχύουν και στην περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών.

[5]Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 5.

**Πρόταση 6.1 - 1.** *Αν $f$, $g|D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$, τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$ και $fg$ είναι συνεχείς στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$.*

**Πρόταση 6.1 - 2.** *Αν $f$, $g|D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$ και $f\,(x_0, y_0) \neq (0,0)$, τότε υπάρχει περιοχή $\varpi\,(x_0, y_0)$, τέτοια ώστε $f\,(x_0, y_0) \neq (0,0)$ για κάθε $x \in \varpi\,(x_0, y_0)$, οπότε η συνάρτηση $1/f$ έχει έννοια για κάθε $x \in D \cap \varpi\,(x_0, y_0)$ και είναι συνεχής στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$.*

**Σημείωση 6.1 - 1**

Οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις στα πεδία ορισμού των. Όμοια οι εκθετικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές και οι αντίστροφες αυτών συναρτήσεις.

## Άσκηση

Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια οι παρακάτω συναρτήσεις

| | | | |
|---|---|---|---|
| $i)$ | $\sin(x+y)$ | $iv)$ | $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ |
| $ii)$ | $\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ | $v)$ | $\dfrac{x+y}{1-\cos x}$ |
| $iii)$ | $\dfrac{x+y}{x-y}$ | $vi)$ | $\dfrac{1}{x+y}\,.$ |

## 6.2 Μερική παράγωγος συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

### 6.2.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ο γνωστός ορισμός της παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής[6] επεκτείνεται και στην περίπτωση μιας συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών για

[6] **Ορισμός 6.2 - 1 (παραγώγου συνάρτησης μια μεταβλητής).** *Έστω η συνάρτηση $f|D$, όπου $D \subseteq \Re$ ανοικτό διάστημα και σημείο $x_0 \in D$. Τότε για κάθε $x \in D - \{x_0\}$ με τον τύπο $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ορίζεται μία συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της $f$*

κάθε μεταβλητή χωριστά θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές σαν σταθερές και λέγεται μερική παράγωγος της συνάρτησης ως προς τη θεωρούμενη μεταβλητή. Συγκεκριμένα έχουμε:

**Ορισμός 6.2 - 2 (μερική παράγωγος).** *Έστω μια συνάρτηση $f\,|S$ όπου $S$ ανοικτό υποσύνολο του $\Re^2$, αντίστοιχα του $\Re^3$ και σημείο $(x_0, y_0) \in S$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Τότε ορίζεται σαν 1ης τάξης μερική παράγωγος (partial derivative) της $f$ ως προς τη μεταβλητή $x$ στο σημείο $(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0)$, η παρακάτω οριακή τιμή*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f\,(x_0, y_0)}{\partial x} &= f'_x\,(x_0, y_0) = D_x f\,(x_0, y_0) \qquad (6.2 - 1) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x, y_0) - f\,(x_0, y_0)}{\Delta x}\,, \end{aligned}$$

*αντίστοιχα*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f\,(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} &= f'_x\,(x_0, y_0, z_0) = D_x f\,(x_0, y_0, z_0) \qquad (6.2 - 2) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f\,(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}\,, \end{aligned}$$

*εφόσον υπάρχει.*

Η οριακή τιμή $(6.2 - 1)$, αντίστοιχα $(6.2 - 2)$ είναι, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, πραγματικός αριθμός. Το σύμβολο (τελεστής) $\partial/\partial x = \partial_x = D_x$ δηλώνει 1ης τάξης μερική (partial) παράγωγο ως προς τη μεταβλητή ή συνιστώσα $x$, σε διάκριση με το γνωστό συμβολισμό $D = D^1 = d/dx$ για

---

*στο σημείο $x_0$. Θα λέγεται ότι η $f$ παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 \in D$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f'\,(x_0)$ τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή*

$$f'\,(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} \qquad (1)$$

*υπάρχει. Η (1) ισοδύναμα γράφεται*

$$f'\,(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0)}{h}\,.$$

μια μεταβλητή. Όμοια ορίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς τις άλλες μεταβλητές.

Αν η 1ης τάξης μερική παράγωγος υπάρχει για κάθε $x_0 \in S$, τότε ορίζεται η 2ης τάξης μερική παράγωγος της $f$ στο $x$ ως εξής:

$$f_{x\,x} = f_{2x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{6.2 - 3}$$

όπου όμοια το σύμβολο $\partial^2/\partial x^2 = \partial_x x = \partial_{2x} = D_{xx}$ δηλώνει 2ης τάξης μερική παράγωγο ως $x$.

Όμοια ορίζονται οι 3ης, 4ης και γενικά η $\nu$-τάξης μερική παράγωγος της $f$ στο $x$ ως:

$$\begin{aligned} f_{x\,x\,x} &= f_{3x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \\ f_{x\,x\,x\,x} &= f_{4x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) \quad \text{και γενικά} \\ f_{\nu\,x} &= \frac{\partial^\nu f}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x^{\nu-1}}\right). \end{aligned} \tag{6.2 - 4}$$

Οι παράγωγοι $(6.2-5)$ και $(6.2-4)$, σε αντίθεση με τις παραγώγους $(6.2-1)$ ή $(6.2-2)$ που είναι πραγματικοί αριθμοί, είναι συναρτήσεις δύο, αντίστοιχα τριών κατά περίπτωση μεταβλητών.

Επίσης ορίζονται οι παράγωγοι των παρακάτω μορφών

$$\begin{aligned} f_{x\,y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ f_{x\,x\,y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ f_{x\,y\,y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned} \tag{6.2 - 5}$$

Οι παράγωγοι αυτές λέγονται πολλές φορές **ανάμεικτες** ή και **επάλληλες**.

Οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύουν και στην περίπτωση της μερικής παραγώγου[7]. Επίσης ισχύει για κάθε μεταβλητή

[7] Υπενθυμίζονται με τη μορφή προτάσεων οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

και ο κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης[8]. Με τον τύπο 6.2 - 6

**Πρόταση 6.2 - 1 (παράγωγος σταθεράς συνάρτησης).** *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,\Re$ όπου $f(x) = c$ σταθερά για κάθε $x \in \Re$. Τότε*

$$f'(x) = 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Re.$$

**Πρόταση 6.2 - 2 (παράγωγος αθροίσματος).** *Έστω οι συναρτήσεις $f,\ g\,|\,D$ παραγωγίσιμες στο $D$. Τότε ισχύει*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in D.$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

**Πρόταση 6.2 - 3 (παράγωγος γινομένου).** *Έστω οι συναρτήσεις $f,\, g\,|\,D$ παραγωγίσιμες στο $D$. Τότε ισχύει*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in D.$$

Όμοια η ιδιότητα γενικεύεται. Επειδή προφανώς ισχύει $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$ με $\lambda \in \Re$ σταθερά από τις Προτάσεις 6.2 - 1 - 6.2 - 3 προκύπτει τελικά η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**

$$(kf(x) + \lambda g(x))' = kf'(x) + \lambda g'(x)$$

για κάθε $x \in D$ και $k,\ \lambda \in \Re$.

**Πρόταση 6.2 - 4.** *Αν η συνάρτηση $f|D$ παραγωγίζεται στο $D$ και επί πλέον υπάρχει $x_0 \in D$, έτσι ώστε $f'(x_0) \neq 0$, τότε*

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x)}\,.$$

**Πρόταση 6.2 - 5 (παράγωγος πηλίκου).** *Έστω οι συναρτήσεις $f,\, g|D$ παραγωγίσιμες στο $D$ και επί πλέον $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε ισχύει*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in D.$$

[8]

**Θεώρημα 6.2 - 1.** *Έστω οι συναρτήσεις $y = f(w)\,|\,D_1$ και $w = g(x)\,|\,D_2$ όπου $g(D_2) \subseteq D_1$ και $D_1,\ D_2$ ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in D_2$. Έστω επίσης ότι για ένα σημείο $x_0 \in D_2$*

υπολογίζονται οι παράγωγοι των σύνθετων συναρτήσεων μιας μεταβλητής, έστω $x$, οι κυριότερες των οποίων δίνονται στον Πίνακα 6.2 - 1.

**Σημειώσεις 6.2 - 1**

i) Ανάλογα με την περίπτωση της παραγώγου μιας μεταβλητής, η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης ως προς μια μεταβλητή της, έστω $x$, θα ορίζει το **συντελεστή μεταβολής** της κατά τον $x$-άξονα. Όμοια για τις άλλες μεταβλητές.

ii) Οι συντελεστές μεταβολής των μεταβλητών στην περίπτωση (i) είναι δυνατόν να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή να έχουμε ταχύτερη μεταβολή ως προς $x$ σε σύγκριση με τη μεταβολή ως προς $y$, κ.λπ.

**Παράδειγμα 6.2 - 1**

Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης μερικές μερικές παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + 4\sqrt{y} - 5, \quad g(x,y,z) = x^2y - y^2z^3 + \sin(xy), \\ h(s,t) &= t^2 \ln\left(s^2+1\right) + \frac{9}{t^3} - \sqrt[3]{s^4}. \end{aligned}$$

---

*υπάρχουν οι παράγωγοι $g'(x_0) = w_0'$ και $y_0' = f'(w_0)$. Τότε θα υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $h(x)|D_2$ στο σημείο $x_0 \in D_2$ και θα ισχύει*

$$\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(w)}{dw}\right|_{w=w_0} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = y_0'\, w_0'.$$

Το θεώρημα είναι γνωστό σαν ο κανόνας της **αλυσιδωτής παραγώγισης** (chain rule).

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα 6.2 - 1, αν για κάθε $x \in D_2$ υπάρχει η παράγωγος $g'(x)$ και επί πλέον ότι για την αντίστοιχη τιμή $g(x) = w \in D_1$ υπάρχει η $f'(w) = f'(g(x))$, θα υπάρχει και η παράγωγος της $f(g(x))$ ως προς $x$ για κάθε $x \in D_2$ και θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\,\frac{dg(x)}{dx} = f_g'\, g_x'. \tag{6.2 - 6}$$

**Πίνακας** 6.2 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων με μεταβλητή $x$.

| α / α | Συνάρτηση | Παράγωγος |
|---|---|---|
| 1 | $f^a(x)$ | $af'(x)f^{a-1}(x)$ |
| 2 | $e^{f(x)}$ | $f'(x)e^{f(x)}$ |
| 3 | $\ln f(x)$ | $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ |
| 4 | $\sin f(x)$ | $f'(x)\cos f(x)$ |
| 5 | $\cos f(x)$ | $-f'(x)\sin f(x)$ |
| 6 | $\tan f(x)$ | $\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$ |
| 7 | $\cot f(x)$ | $-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$ |
| 8 | $\tan^{-1} f(x)$ | $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ |
| 9 | $\sin^{-1} f(x)$ | $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ |
| 10 | $\cos^{-1} f(x)$ | $-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ |
| 11 | $\sinh f(x)$ | $f'(x)\cosh f(x)$ |
| 12 | $\cosh f(x)$ | $f'(x)\sinh f(x)$ |
| 13 | $\tanh f(x)$ | $\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\tanh^2 f(x)\right]$ |
| 14 | $\coth f(x)$ | $-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\coth^2 f(x)\right]$ |

**Λύση.** Διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_x &= \left(x^4+4\,y^{1/2}-5\right)_x = \left(x^4\right)_x + \overbrace{\left(4\,y^{1/2}-5\right)_x}^{0} = 4x^3,\\
f_y &= \left(x^4+4\,y^{1/2}-5\right)_y = 4\,\overbrace{\left(y^{1/2}\right)_y}^{\frac{1}{2}\,y^{\frac{1}{2}-1}} + \overbrace{\left(x^4-5\right)_y}^{0} = 2\,y^{-1/2},\\
g_x &= \left[x^2y-y^2z^3+\sin(xy)\right]_x = \overbrace{\left(x^2y\right)_x}^{y\left(x^2\right)_x} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_x}^{0} + [\sin(xy)]_x\\
&= 2\,xy+(xy)_x\,\cos(xy) = 2xy+y\,\cos(xy),\\
g_y &= \left[x^2y-y^2z^3+\sin(xy)\right]_y = \overbrace{\left(x^2y\right)_y}^{x^2(y)_y} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_y}^{z^3\left(y^2\right)_y} + [\sin(xy)]_y\\
&= x^2-2\,y\,z^3+(xy)_y\,\cos(xy) = x^2-2\,y\,z^3+x\,\cos(xy),\\
g_z &= \left[x^2y-y^2z^3+\sin(xy)\right]_z = \overbrace{\left(x^2y\right)_y}^{0} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_y}^{y^2\left(z^3\right)_z} + \overbrace{[\sin(xy)]_z}^{0}\\
&= -3y^2z^2,\\
h_s &= \left[t^2\ln\left(s^2+1\right)+9\,t^{-3}-s^{4/3}\right]_s\\
&= \left[t^2\ln\left(s^2+1\right)\right]_s + 9\,\overbrace{\left(t^{-3}\right)_s}^{0} - \left(s^{4/3}\right)_s\\
&= t^2 \overbrace{\left[\ln\left(s^2+1\right)\right]_s}^{\text{τύπος 3 του Πίνακα 6.2 - 1}} - \frac{4}{3}\,s^{\frac{4}{3}-1}\\
&= t^2\,\frac{1}{s^2+1}\,\overbrace{\left(s^2+1\right)_s}^{2\,s} - \frac{4}{3}\,s^{1/3} = \frac{2\,s\,t^2}{s^2+1} - \frac{4}{3}\,s^{1/3},\\
h_t &= \left[t^2\ln\left(s^2+1\right)+9\,t^{-3}-s^{4/3}\right]_t
\end{aligned}
$$

$$= \overbrace{\left[t^2 \ln\left(s^2+1\right)\right]_t}^{\ln\left(s^2+1\right)\left(t^2\right)_t} + 9\overbrace{\left(t^{-3}\right)_s}^{-3\,t^{-4}} - \overbrace{\left(s^{4/3}\right)_s}^{0} = 2\,t\,\ln\left(s^2+1\right) - 27\,t^{-4}.$$

■

**Παράδειγμα 6.2 - 2**

Να υπολογιστούν οι 1ης και οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2.$$

**Λύση.** Όμοια διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
f_x &= \left(\frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2\right)_x = \left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_x + \overbrace{\left(z^2\right)_x}^{0} = \frac{1}{y}\,\left(x\,e^{-x}\right)_x \\
&= \frac{1}{y}\left[\overbrace{(x)_x}^{1}\,e^{-x} + x\overbrace{\left(e^{-x}\right)_x}^{(-x)_x\,e^{-x}=-e^{-x}}\right] = \frac{(1-x)\,e^{-x}}{y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) = \left[\frac{(1-x)\,e^{-x}}{y}\right]_x \\
&= \frac{1}{y}\,\left[(1-x)\,e^{-x}\right]_x = \frac{1}{y}\left[\overbrace{(1-x)_x}^{-1}\,e^{-x} + (1-x)\,\overbrace{\left(e^{-x}\right)_x}^{-e^{-x}}\right] \\
&= \frac{(x-2)\,e^{-x}}{y}, \\
f_y &= \left(\frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2\right)_y = \left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_y + \overbrace{\left(z^2\right)_y}^{0} = \left(x\,e^{-x}\right)\,\overbrace{\left(y^{-1}\right)_y}^{-y^{-2}} \\
&= -x\,e^{-x}\,y^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yy} &= \left(-x\,e^{-x}\,y^{-2}\right)_y = -x\,e^{-x}\,\overbrace{\left(y^{-2}\right)_y}^{-2\,y^{-3}} = 2\,x\,e^{-x}y^{-3}, \\
f_z &= \left(\frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2\right)_z = \overbrace{\left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_z}^{0} + \left(z^2\right)_z = 2z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{zz} &= (2z)_z = 2, \\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right) = \left(-x\,e^{-x}\,y^{-2}\right)_x \\
&= -\frac{1}{y^2}\,\left(x\,e^{-x}\right)_x = -\frac{1}{y^2}\,\left[(x)_x\,e^{-x} + x\,\left(e^{-x}\right)_x\right] = \frac{(x-1)\,e^{-x}}{y^2}\,, \\
f_{yx} &= \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) \\
&= \left[\frac{(1-x)\,e^{-x}}{y}\right]_y = \cdots = \frac{(x-1)\,e^{-x}}{y^2}\,, \quad \text{όμοια} \\
f_{yz} &= f_{zy} = 0, \quad \text{και} \quad f_{xz} = f_{zx} = 0.
\end{aligned}$$

■

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει ότι $f_{xy} = f_{yx}$, δηλαδή οι ανάμεικτες μερικές παράγωγοι 2ης τάξης των ίδιων ανά δύο μεταβλητών είναι ίσες. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα[9].

**Θεώρημα 6.2 - 2 (Schwarz).** *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)| \subseteq \Re^2$, όπου $S$ ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς στο $S$. Τότε*

$$f_{xy} = f_{yx} \quad \text{για κάθε} \quad (x,y) \in S. \tag{6.2 - 7}$$

**Παράδειγμα 6.2 - 3**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{y}{x+y}\,.$$

Να υπολογιστεί η τιμή $f_{xyy}|_{(1,0)}$.

**Λύση.** Αρχικά είναι

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y^2}\right) = \left(f_{yy}\right)_x\,. \tag{1}$$

[9] Το θεώρημα, που είναι επίσης γνωστό σαν θεώρημα των Schwarz-Clairaut και γενικεύεται (βλέπε βιβλιογραφία).

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} f_y &= \left(\frac{y}{x+y}\right)_y = \frac{\overbrace{(y)_y}^{1}(x+y) - y\,\overbrace{(x+y)_y}^{0+1}}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2} \\ f_{yy} &= \left[\frac{x}{(x+y)^2}\right]_y = x\left[(x+y)^{-2}\right]_y = x\left[-2\,\overbrace{(x+y)_y}^{1}(x+y)^{-2-1}\right] \\ &= -\frac{2\,x}{(x+y)^3}, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$\begin{aligned} f_{xyy} &= \left[-\frac{2\,x}{(x+y)^3}\right]_x = -2\left[\frac{x}{(x+y)^3}\right]_x \\ &= -2\,\frac{\overbrace{(x)_x}^{1}(x+y)^3 - x\,\overbrace{\left[(x+y)^3\right]_x}^{3(x+y)_x(x+y)^{3-1}}}{(x+y)^6} = \frac{2(2x-y)}{(x+y)^4}. \end{aligned}$$

Άρα

$$f_{xyy}\big|_{(1,0)} = \left.\frac{2(2x-y)}{(x+y)^4}\right|_{(1,0)} = \frac{2(2\cdot 1-0)}{(1+0)^4} = 4.$$

■

**Παράδειγμα 6.2 - 4**

Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$. Δείξτε ότι[10]

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0. \qquad (6.2.1 - 8)$$

**Λύση.** Έχουμε

$$f_x = \left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right]_x = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\overbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)_x}^{2x}$$

[10] Η εξίσωση $(6.2.1-8)$, που είναι γνωστή σαν η **εξίσωση του Laplace** (Laplace equation), έχει σημαντικές εφαρμογές στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4 - εξισώσεις Maxwell). Η συνάρτηση $f$, που επαληθεύει την $(6.2.1-8)$, λέγεται τότε και **αρμονική** συνάρτηση.

$$
\begin{aligned}
&= -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}, \\
f_{xx} &= -\left[\overbrace{(x)_x}^{1}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right] - x\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right]_x \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \\
&\quad -x\left[-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}-1}\overbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)_x}^{2x}\right] \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + \frac{3}{2}x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Λόγω της συμμετρίας της $f$ όμοια έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + \frac{3}{2}y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}, \qquad (2) \\
f_{xx} &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + \frac{3}{2}z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) προκύπτει τελικά η $(6.2.1-8)$. ■

## Ασκήσεις

**1.** Των παρακάτω συναρτήσεων να υπολογιστούν όλες οι 1ης και 2ης τάξης μερικές παράγωγοι

*i*) $ye^{-x^2} + x\cos y$ *iii*) $e^{\sin z} + \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

*ii*) $\dfrac{x}{x+y} + \tan x$ *vi*) $\sin^2 z + \ln\left(x^2+y^2\right)$

**2.** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = e^x \sin y$ είναι αρμονική.

### 6.2.2 Εφαπτόμενο επίπεδο

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μια συνάρτησης[11], έστω $f$, μιας μεταβλητής σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

ορισμού της ότι γεωμετρικά η παράγωγος $f'(x_0)$ ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας $\varepsilon$ του διαγράμματος της $f$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Επεκτείνοντας την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία για συνάρτηση μιας μεταβλητής θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)\,|D$ και έστω σημείο $(x_0, y_0) \in D$ στο οποίο υπάρχουν οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$. Τότε, επειδή είναι ήδη γνωστό από την προηγούμενη παράγραφο ότι το διάγραμμα της $f(x,y)$ είναι μια επιφάνεια, είναι προφανές ότι αν διατηρηθεί το $y$ σταθερό, τότε το διάγραμμα θα είναι μια καμπύλη, έστω $C_x$, ενώ αν διατηρηθεί το $x$ σταθερό, τότε θα είναι μια άλλη καμπύλη, έστω $C_y$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία, η $f_x(x_0, y_0)$ θα ορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας $\varepsilon_x$ του διαγράμματος της $C_x$ και η $f_y(x_0, y_0)$ το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας $\varepsilon_y$ του διαγράμματος της $C_y$. Τότε οι $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$ ορίζουν το **εφαπτόμενο επίπεδο**, έστω $\pi$, της $f$ στο $(x_0, y_0)$.

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση του επιπέδου $\pi$ δίνεται από τον τύπο[12]

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (6.2.2 - 1)$$

**Παράδειγμα 6.2 - 1**

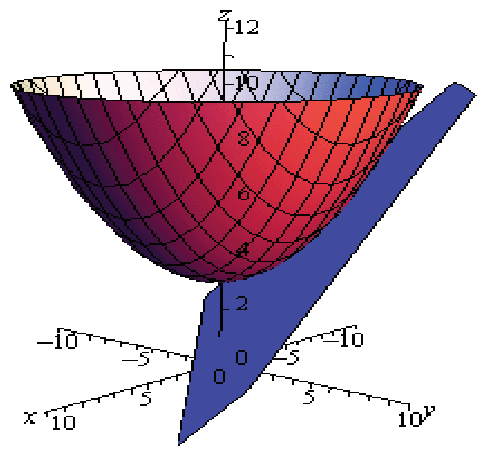
Να υπολογιστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της συνάρτησης

$$f(x,y) = 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \quad \text{στο σημείο} \quad (x_0, y_0) = (-4, 3).$$

**Λύση.** Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} & f(4,-3) &= 5, \\ f_x(x,y) &= \frac{x}{8} & f_x(4,-3) &= -\frac{1}{2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{2y}{9} & f_y(4,-3) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

[12] Σύμφωνα και με την υποσημείωση του Παραδείγματος 6.1 - 3 η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου $ax + by + cz = d$, όταν ως προς $z$, ισοδύναμα γράφεται και $z = f(x,y) = Ax + By + D$.




**Σχήμα** 6.2 - 1: Παράδειγμα 6.2 - 1

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(6.2.2-1)$ η εξίσωση του επιπέδου θα είναι (Σχ. 6.2 - 1)

$$z = 5 - \frac{1}{2}(x+4) + \frac{2}{3}(y-3).$$

■

### 6.2.3 Η έννοια του διαφορικού

Είναι ήδη γνωστό ότι το διαφορικό μιας συνάρτησης, έστω $f(x)|D$, συμβολίζεται με $d\,f(x)$ και ορίζεται από τον τύπο

$$d\,f(x) = f'(x)dx.$$

Η έννοια του διαφορικού γενικεύεται και για την περίπτωση συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών ως εξής:[13]

**Ορισμός 6.2 - 1** *Έστω ότι $f(x,y)|S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f(x,y,z)|S \subseteq \Re^3$ όπου $S$ ανοικτό σύνολο, είναι μία συνάρτηση δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών, της οποίας υποτίθεται ότι υπάρχουν στο $S$ οι $f_x$, $f_y$, αντίστοιχα $f_x$, $f_y$, $f_z$.*

[13]Για γενικότερες περιπτώσεις βλέπε βιβλιογραφία.

*Τότε*

$$\begin{aligned} d\,f(x,y) &= f_x\,dx + f_y\,dy, \quad \textit{αντίστοιχα} && (6.2.3 - 1) \\ d\,f(x,y,z) &= f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz. && (6.2.3 - 2) \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι η ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης και η συνέχεια αυτών, συνεπάγονται πάντοτε την ύπαρξη του διαφορικού της συνάρτησης.

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν στο $S$ και όλες οι 2ης και 3ης τάξης παράγωγοι της $f$ αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y) &= f_{xx}\,dx^2 + 2\,f_{xy}\,dxdy + f_{yy}\,dy^2 && (6.2.3 - 3) \\ d^3 f(x,y) &= f_{xxx}\,dx^3 + 3\,f_{xxy}\,dx^2dy \\ &\quad +3\,f_{xyy}\,dx\,dy^2 + f_{yyy}\,dy^3, \quad \text{κ.λπ.} && (6.2.3 - 4) \end{aligned}$$

Ανάλογοι τύποι ισχύουν για την περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών, δηλαδή

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y,z) &= f_{xx}\,dx^2 + f_{yy}\,dy^2 + f_{zz}\,dz^2 && (6.2.3 - 5) \\ &\quad +2\left(f_{xy}\,dxdy + f_{yz}\,dydx + f_{zx}\,dzdx\right), \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 6.2 - 1**

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2y^3$. Τότε $f_x = 2\,x\,y^3$ και $f_y = 3\,x^2y^2$, οπότε σύμφωνα με την $(6.2.3-1)$ είναι

$$d\,f(x,y) = 2\,x\,y^3\,dx + 3\,x^2y^2\,dy.$$

Επίσης είναι

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left(2\,xy^3\right)_x = 2\,y^3, \quad f_{yy} = \left(3\,x^2y^2\right)_y = 6\,x^2y \quad \text{και} \\ f_{xy} &= \left(f_y\right)_x = \left(3\,x^2y^2\right)_x = 6\,x\,y^2. \end{aligned}$$

Άρα από την $(6.2.3-2)$ προκύπτει

$$d^2 f = 2\,y^3\,dx^2 + 6\,x\,y^2\,dx\,dy + 6\,x^2y\,dy^2.$$

## Άσκηση

Να υπολογιστούν τα διαφορικά 1ης και 2ης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων

$i)$ $x^3 + y^3 - xy$ $\qquad$ $iii)$ $\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

$ii)$ $\tan^{-1}\left(\dfrac{xy}{z}\right)$ $\qquad$ $iv)$ $z^2\, e^{x\,y}$.

### 6.2.4 Αλυσιδωτός κανόνας παραγώγισης

Ο ήδη γνωστός τύπος (6.2 − 6) της αλυσιδωτής παραγώγισης του Θεωρήματος 6.2 - 1 γράφεται επίσης για ευκολία ως εξής:

$$\text{αν} \quad y = f(x) \quad \text{και} \quad x = g(t), \quad \text{τότε} \quad \frac{d\,y}{d\,t} = \frac{d\,y}{d\,x}\,\frac{d\,x}{d\,t}\,.$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται για την περίπτωση συναρτήσεων δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών[14] σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 6.2 - 1** *Έστω η συνάρτηση $f\,(x, y) \mid S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f\,(x, y, z) \mid S \subseteq \Re^3$ και $x = x(t)$, $y = y(t)$, αντίστοιχα $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ για κάθε $t \in A \subseteq \Re$, όπου $A$ ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της $f$ να ανήκουν στο $S$ για κάθε $t \in A$ και επί πλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της $f$ στο $(x(t), y(t))$, αντίστοιχα $(x(t), y(t), z(t))$ για κάθε $t \in A$. Τότε η συνάρτηση $f = f(t)$ παραγωγίζεται στο $t$ και ισχύει*

$$\frac{d\,f(t)}{d\,t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,t} = f_x\,\frac{dx}{d\,t} + f_y\,\frac{dy}{d\,t}, \qquad (6.2.4 - 1)$$

*αντίστοιχα*

$$\begin{aligned} \frac{d\,f(t)}{d\,t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\,t} \\ &= f_x\,\frac{dx}{d\,t} + f_y\,\frac{dy}{d\,t} + f_z\,\frac{dz}{d\,t}. \qquad (6.2.4 - 2) \end{aligned}$$

Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό σαν **κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης** (chain rule) σύνθετης συνάρτησης για δύο, αντίστοιχα τρεις μεταβλητές.

[14] Για την περίπτωση $\nu$-μεταβλητών βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

**Πόρισμα 6.2 - 1** *Έστω η συνάρτηση $f(x, y) \,|\, S \subseteq \Re^2$ όπου $y = g(x)$ για κάθε $x \in A \subseteq \Re$, όταν $A$ ανοικτό σύνολο και επί πλέον υπάρχει η παράγωγος της $f$ στο $(x, y)$ για κάθε $x \in A$. Τότε η συνάρτηση $f$ παραγωγίζεται στο $x$ και ισχύει*

$$\frac{d\,f(x, y)}{d\,x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,x}. \tag{6.2.4 - 3}$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον τύπο $(6.2.4 - 1)$ και παραλείπεται.

**Παράδειγμα 6.2 - 1**

Να υπολογιστεί η παράγωγος $df/dt$, όταν

$$f(x, y) = x^2 y - y^2 \quad \text{και} \quad x = t^2, \quad y = 2t.$$

**Λύση.** Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
f_x &= \left(x^2 y - y^2\right)_x = \overbrace{\left(x^2 y\right)_x}^{2xy} - \overbrace{\left(y^2\right)_x}^{0} = 2xy = 4\,t^3\,, \\
f_y &= \left(x^2 y - y^2\right)_y = \overbrace{\left(x^2 y\right)_y}^{x^2} - \overbrace{\left(y^2\right)_y}^{2y} = \left(t^2\right)^2 - 2t = t^4 - 2t, \\
\frac{dx}{dt} &= 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2.
\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(6.2.4 - 1)$ είναι

$$\frac{d\,f}{d\,t} = 4\,t^3 \cdot 2\,t + \left(t^4 - 4\,t\right) \cdot 2 = 2\,t\left(5\,t^3 - 4\right).$$

■

**Παράδειγμα 6.2 - 2**

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \ln(x + y + z), \quad \text{όταν} \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t \quad \text{και} \quad z = t^2.$$

**Λύση.** Όμοια διαδοχικά έχουμε

$$f_x = \frac{1}{x+y+z}\overbrace{(x+y+z)_x}^{1} = \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{\cos^t + \sin^2 t + t^2} = \frac{1}{1+t^2},$$

και όμοια

$$f_y = f_z = \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\cos^2 t\right)_t = -2\cos t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \left(\sin^2 t\right)_t = 2\cos t \sin t, \quad \frac{dz}{dt} = 2t.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(6.2.4-2)$ είναι

$$\frac{d\,f}{d\,t} = \frac{1}{1+t^2}\left(-2\cos t \sin t + 2\cos t \sin t + 2t\right) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

■

**Παράδειγμα 6.2 - 3**

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y) = x\,\ln(xy) + y^3, \quad \text{όταν} \quad y = \cos\left(x^2+1\right).$$

**Λύση.** Σύμφωνα με τον τύπο $(6.2.4-5)$ είναι

$$\begin{aligned} f_x &= \left(x\,\ln(xy) + y^3\right)_x = (x\,\ln(xy))_x + \overbrace{\left(y^3\right)_x}^{0}, \\ &= \ln(xy) + x\,\frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1 \\ f_y &= \left(x\,\ln(xy) + y^3\right)_y = x\,[\ln(xy)]_y + \overbrace{\left(y^3\right)_y}^{3\,y^2} \\ &= \frac{x}{y} + 3\,y^2, \\ \frac{dy}{dx} &= -2\,x\,\sin\left(x^2+1\right), \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \ln\left[x\,\cos\left(x^2+1\right)\right]+1-2x^2\tan\left(x^2+1\right)\\ &\quad -6x\sin\left(x^2+1\right)\cos^2\left(x^2+1\right).\end{aligned}$$

■

Γενικεύοντας το Θεώρημα 6.2 - 1 αποδεικνύεται ότι:[15]

**Θεώρημα 6.2 - 2** *Έστω η συνάρτηση* $f\,(x,y)\,|\,S \subseteq \Re^2$ *και* $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$ *για κάθε* $(s,t)\in A\subseteq\Re^2$, *όπου* $A$ *ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της* $f$ *να ανήκουν στο* $S$ *για κάθε* $(s,t)\in A$ *και επί πλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της* $f$ *στο* $(x(s,t),y(s,t))$ *για κάθε* $(s,t)\in A$. *Τότε η συνάρτηση* $f=f(s,t)$ *παραγωγίζεται στο* $(s,t)$ *και ισχύει*

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{και} \qquad (6.2.4 - 4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \qquad (6.2.4 - 5)$$

**Παράδειγμα 6.2 - 4**

Έστω

$$f(x,y)=e^{2y}\sin 3x \quad \text{όπου} \quad x=\sqrt{s^2+t^2}, \quad y=st-t^2.$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $f_s$ και $f_t$.

**Λύση.** Σύμφωνα με τους τύπους $(6.2.4-4)$ και $(6.2.4-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \overbrace{\left(e^{2y}\sin 3x\right)_x}^{3e^{2y}\cos 3x}\overbrace{\left[\left(s^2+t^2\right)^{1/2}\right]_s}^{\frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right)^{\frac{1}{2}-1}2s}+\overbrace{\left(e^{2y}\sin 3x\right)_y}^{2\,e^{2y}\sin 3x}\overbrace{\left(st-t^2\right)_s}^{t}\\ &= \frac{3\,s\,e^{2y}\cos 3x}{\sqrt{s^2+t^2}}+2\,t\,e^{2y}\sin 3x\end{aligned}$$

[15] Βλέπε βιβλιογραφία.

$$= e^{2\left(st-t^2\right)}\left(\frac{3\,s\,\cos 3\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{s^2+t^2}}+2\,t\,\sin 3\sqrt{s^2+t^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(e^{2y}\sin 3x\right)_x \overbrace{\left[\left(s^2+t^2\right)^{1/2}\right]_t}^{\frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right)^{\frac{1}{2}-1}2t} + \left(e^{2y}\sin 3x\right)_y \overbrace{\left(st-t^2\right)_t}^{s-2t}$$

$$= \frac{3\,t\,e^{2y}\cos 3x}{\sqrt{s^2+t^2}} + 2\,(s-2t)\,e^{2y}\sin 3x$$

$$= e^{2\left(st-t^2\right)}\left(\frac{3\,t\,\cos 3\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{s^2+t^2}}+2\,(s-2t)\,\sin 3\sqrt{s^2+t^2}\right).$$

■

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό για ευκολία να οριστεί ο παρακάτω διαφορικός τελεστής.[16]

**Ορισμός 6.2 - 1 (τελεστής Laplace)** *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y)\,|\,S\subseteq\Re^2$, αντίστοιχα $f(x,y,z)\,|\,S\subseteq\Re^3$ έχει τουλάχιστον 2ης τάξης μερικές παραγώγους για κάθε $(x,y)\in S$, αντίστοιχα $(x,y,z)\in S$. Τότε ο τελεστής Laplace ή και διαφορικός τελεστής 2ης, αντίστοιχα 3ης τάξης ορίζεται ως εξής:*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \textit{αντίστοιχα} \tag{6.2.4 - 6}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6.2.4 - 7}$$

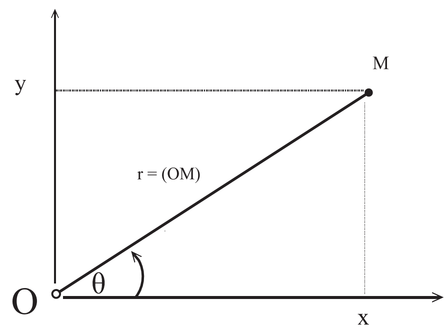
**Εφαρμογή 6.2 - 1 (πολικές συντεταγμένες $(r,\theta)$)**

[17] Να υπολογιστεί η παράσταση

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{xx}+f_{yy} \tag{6.2.4 - 8}$$

[16] Για περισσότερες εφαρμογές βλέπε Μάθημα: Διαφορικός Διανυσματικός Λογισμός.

[17] Η εφαρμογή αυτή είναι εκτός της εξεταστέας ύλης.




**Σχήμα** 6.2 - 1: πολικές συντεταγμένες $(r, \theta)$

σε πολικές συντεταγμένες (Σχ. 6.2 - 1).[18]
**Λύση.** Εφαρμόζοντας τους τύπους $(6.2.4-4)$ και $(6.2.4-5)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\overbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}^{\cos\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}^{\sin\theta} = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\,, \tag{1}$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς $r$ την (1) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial y}\\
&= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) \quad (\text{Θεώρημα } 6.2-2)\\
&\overbrace{=}^{(1)} \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

[18] Είναι γνωστό ότι οι πολικές συντεταγμένες $(r, \theta)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad \text{με } r \geq 0 \text{ και } \theta \in [0, 2\pi) \text{ ή } \theta \in (-\pi, \pi].$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,. \tag{2}$$

Όμοια με την (1) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\overbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}^{-r\sin\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\overbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}^{r\cos\theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς $\theta$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= r\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= r\left[-\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} - \sin\theta\,\overbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}^{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)}\right] + r\left[-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\,\overbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}^{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)}\right] \\
&= r\left[-\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} - \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-r\,\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\,\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] \\
&\quad\; r\left[-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(-r\,\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\,\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] \\
&= -r\overbrace{\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)}^{\frac{\partial f}{\partial r}} \\
&\quad +r^2\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\
&\quad -r^2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -r\,\frac{\partial f}{\partial r} + r^2 \left( \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \qquad (4)$$

Από την (2) και την (4) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}\,. \qquad (5) \end{aligned}$$

Από την (5) έχουμε την παρακάτω έκφραση της (6.2.4–8) σε πολικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \qquad (6.2.4 - 9)$$

που γράφεται και

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\,. \qquad (6.2.4 - 10)$$

■

Με ανάλογους υπολογισμούς προκύπτει ότι ο τελεστής Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες (Σχ. 6.2 - 2a) είναι[19]

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ενώ σε σφαιρικές συντεταγμένες (Σχ. 6.2 - 2b) [20]

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$

---

[19] Οι κυλινδρικές συντεταγμένες $(r, \theta, z)$ δίνονται από τις σχέσεις

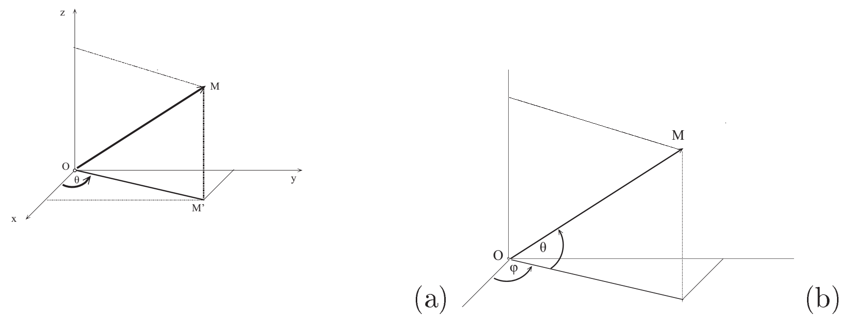
$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ z = z$$
$$\text{με } r \geq 0,\ \ \theta \in [0, 2\pi) \text{ ή } \theta \in (-\pi, \pi] \ \text{ και } \ z \in \Re.$$

[20] Οι σφαιρικές συντεταγμένες $(r, \theta, \varphi)$ όμοια από τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta\sin\phi,\ \ y = r\sin\theta\sin\phi,\ \ z = r\cos\phi$$

$$\text{με } r \geq 0 \text{ και } \theta \in [0, \pi],\ \ \phi \in [0, 2\pi) \text{ ή } \phi \in (-\pi, \pi],$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\,.$$




**Σχήμα** 6.2 - 2: (α) οι κυλινδρικές $(r, \theta, z)$ και (b) οι σφαιρικές $(r, \theta, \varphi)$ συντεταγμένες.

## Άσκηση

Των παρακάτω συναρτήσεων να υπολογιστεί η παράγωγος $df/dt$

i) $f(x, y) = xe^y + y^2 \sin x$, όταν $x = t$, $y = t^2$,

ii) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, όταν $x = \cosh t$, $y = \sinh t$,

iii) $f(x, y, z) = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, όταν $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$,

iv) $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$, όταν $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

## 6.3 Ακρότατα

### 6.3.1 Τοπικά ακρότατα

**Ορισμός 6.3 - 1 (τοπικό ακρότατο).** *Έστω η συνάρτηση* $f\,(x, y)\ |\, S \subseteq \Re^2$, *αντίστοιχα* $f\,(x, y, z)\ |\, S \subseteq \Re^3$ *όπου* $S$ *ανοικτό σύνολο και σημείο* $P_0 = (x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. *Τότε θα λέγεται ότι το* $P_0$, *αντίστοιχα το* $\tilde{P}_0$ *είναι θέση τοπικού μεγίστου, αντίστοιχα τοπικού ελαχίστου της* $f$ *τότε και μόνον, όταν υπάρχει περιοχή* $\varpi(x_0, y_0)$ *του* $P_0$*, αντίστοιχα* $\varpi(x_0, y_0, z_0)$ *του* $\tilde{P}_0$*, έτσι ώστε*

I. **μέγιστο**: $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$,

II. **ελάχιστο**: $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$

*για κάθε* $(x,y) \in \varpi(x_0, y_0) \cap S$, *αντίστοιχα* $(x,y,z) \in \varpi(x_0, y_0, z_0) \cap S$.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο αυτό λέγεται θέση **τοπικού ακρότατου** (relative extremum) της $f$ με τιμή $f(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $f(x_0, y_0, z_0)$.

**Ορισμός 6.3 - 2 (ολικό ακρότατο).** *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \Re^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \mid S \subseteq \Re^3$ *όπου* $S$ *ανοικτό σύνολο και σημείο* $P_0 = (x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $\tilde{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. *Τότε θα λέγεται ότι το* $P_0$, *αντίστοιχα το* $\tilde{P}_0$ *είναι θέση ολικού μεγίστου, αντίστοιχα ολικού ελαχίστου (extremum) της* $f$ *τότε και μόνον, όταν*

I. **μέγιστο**: $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$,

II. **ελάχιστο**: $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$

*για κάθε* $(x,y) \in S$, *αντίστοιχα* $(x,y,z) \in S$.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο αυτό λέγεται θέση **ολικού ακρότατου** της $f$ με τιμή $f(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $f(x_0, y_0, z_0)$.

Δίνονται στη συνέχεια οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, έτσι ώστε μία συνάρτηση να έχει ακρότατα.

**Θεώρημα 6.3 - 1 (αναγκαία συνθήκη ακρότατου).** *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \Re^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \mid S \subseteq \Re^3$ *όπου* $S$ *ανοικτό σύνολο. Αν το σημείο* $P_0 = (x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ *είναι ένα ακρότατο (stationary point) της* $f$ *και υπάρχουν όλες οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της* $f$ *στο σημείο αυτό, τότε αυτές πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν.*

### Ακρότατο συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στο παρακάτω θεώρημα γίνεται χρήση των εξής συμβολισμών:

$$A = \frac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y^2}$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left| \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{array} \right|_{(x_0, y_0)} . \qquad (6.3.1 - 1)$$

**Θεώρημα 6.3 - 2 (ικανή συνθήκη ακρότατου).** *Έστω η συνάρτηση $f\left(x, y\right)$ $|S \subseteq \Re^2$, όπου $S$ ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν στο $S$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις όλες οι πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι. Αν το σημείο $(x_0, y_0) \in S$ είναι τέτοιο ώστε*

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} = \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} = 0, \qquad (6.3.1 - 2)$$

*τότε, αν*

I. $\Delta > 0$ *και*

   **a**. $A < 0$ *(ή $C < 0$), το $(x_0, y_0)$ είναι θέση* **μεγίστου** *της $f$,*

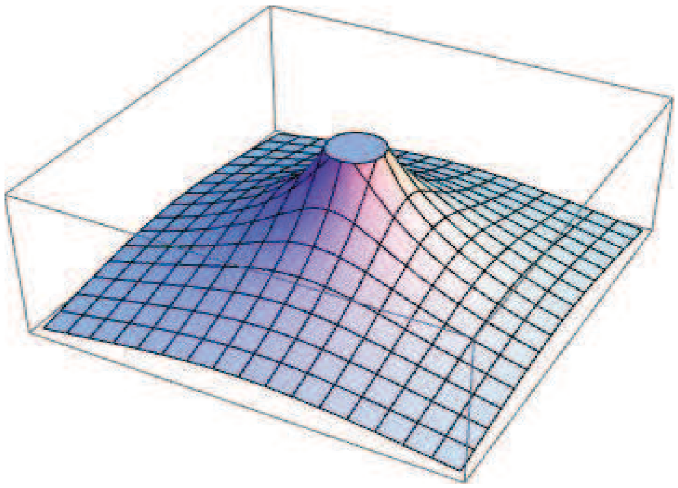
   **b**. $A > 0$ *(ή $C > 0$), το $(x_0, y_0)$ είναι θέση* **ελαχίστου** *της $f$.*

II. $\Delta < 0$, *τότε δεν υπάρχει ακρότατο. Στην περίπτωση αυτή το $(x_0, y_0)$ είναι σημείο* **καμπής** *του διαγράμματος της $f$.*

III. $\Delta = 0$, *το θεώρημα δεν εφαρμόζεται, δηλαδή ενδέχεται να υπάρχει ή όχι ακρότατο.*

### Σημειώσεις 6.3 - 1

i) Τα σημεία που επαληθεύουν τη συνθήκη $(6.3.1 - 2)$ λέγονται **κρίσιμα σημεία** (critical ή stationary points) και είναι θέσεις πιθανών ακρότατων της $f(x, y)$.



**Σχήμα** 6.3 - 1: Παράδειγμα 6.3 - 1

ii) Το σημείο $(x_0, y_0)$ που επαληθεύει την $(6.3.1-1)$ πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f$, διαφορετικά δεν είναι σημείο πιθανού ακρότατου.

**Παράδειγμα 6.3 - 1**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \Re^2 - (0,0).$$

Τότε από τον τύπο $(6.3.1-2)$ προκύπτει

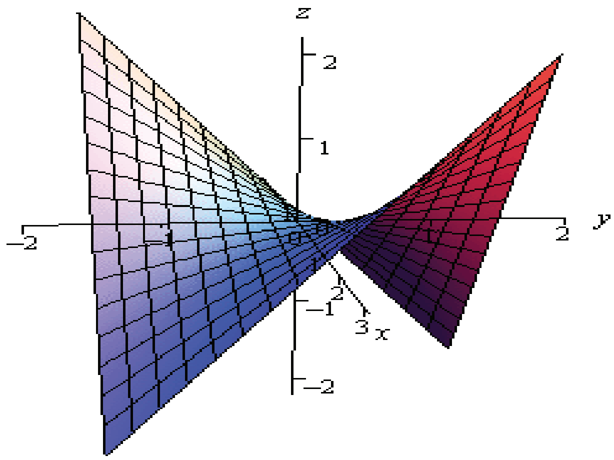
$$f_x = \frac{\left(x^2+y^2\right)_x}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{και} \quad f_y = \frac{\left(x^2+y^2\right)_y}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2} = 0,$$

οπότε $x = y = 0$, δηλαδή το σημείο $P(0,0) \notin D$ (Σχ. 6.3 - 1) και επομένως το σημείο $P$ δεν είναι πιθανό ακρότατο.

**Παράδειγμα 6.3 - 2**

Να μελετηθεί ως την ύπαρξη ακρότατων η συνάρτηση

$$f(x,y) = xy \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \Re^2.$$




**Σχήμα** 6.3 - 2: Παράδειγμα 6.3 - 2

**Λύση.** Σύμφωνα με τον τύπο $(6.3.1-2)$ είναι $f_x = x = 0$ και $f_y = y = 0$, οπότε έχουμε πιθανό ακρότατο στο σημείο $P(0,0)$. Από τις σχέσεις $(6.3.1-1)$ προκύπτουν

$$A = f_{xx} = 0, \;\; B = f_{xy} = 1, \;\; C = f_{yy} = 0, \;\; \Delta = -1 < 0.$$

Άρα σύμφωνα με τη συνθήκη (II) του Θεωρήματος 6.3 - 2 το $P$ είναι σημείο καμπής του διαγράμματος της $f$ (Σχ. 6.3 - 2). ∎

**Παράδειγμα 6.3 - 3**

Όμοια η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad \text{με} \quad D = \Re^2.$$

**Λύση.** Από τον τύπο $(6.3.1-2)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 3x^2 - 3y &= 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 1η εξίσωση προκύπτει $y = x^2$, οπότε αντικαθιστώντας στη 2η έχουμε

$$3\left(x^2\right)^2 - 3x = 3x\left(x^3 - 1\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Άρα τα πιθανά ακρότατα είναι στα σημεία:

$$P_1(0,0) \quad \text{και} \quad P_2(1,1).$$

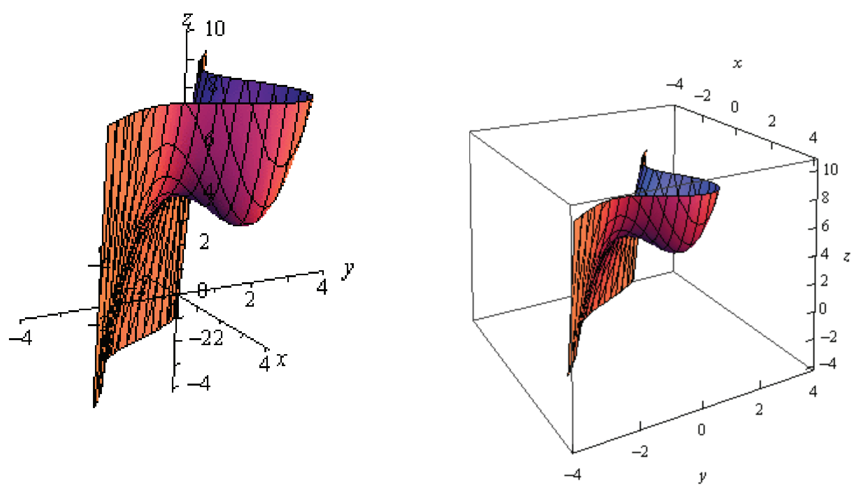
Από τις σχέσεις $(6.3.1-1)$ για το σημείο $(x,y) \in D$ έχουμε

$$\begin{aligned} A &= f_{xx} = 6x, \quad B = f_{xy} = -3, \quad C = f_{yy} = 6y \quad \text{και} \\ \Delta &= AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36\,xy - 9. \end{aligned}$$

Τότε από τις συνθήκες (I-III) του Θεωρήματος 6.3 - 2 για τα παραπάνω σημεία προκύπτουν (Σχ. 6.3 - 3):

$P_1$: $\Delta|_{P_1(0,0)} = -9 < 0$, δηλαδή είναι σημείο καμπής,

$P_2$: $\Delta|_{P_2(1,1)} = 27 > 0$ και $A|_{P_2(1,1)} = 6 > 0$, δηλαδή υπάρχει ελάχιστο με τιμή $f(1,1) = 3$.




Σχήμα 6.3 - 3: Παράδειγμα 6.3 - 3. Δύο διαφορετικές όψεις του διαγράμματος της $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$

**Παράδειγμα 6.3 - 4**

Όμοια η συνάρτηση

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 \quad \text{με} \quad D = \Re^2.$$

**Λύση.** Από τον τύπο $(6.3.1-2)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 6xy - 6x &= 0 \\ f_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 1η εξίσωση προκύπτει $6x(y-1) = 0$, δηλαδή ή $x = 0$ ή $y = 1$. Τότε από τη 2η εξίσωση έχουμε

$x = 0:$

$$3y^2 - 6y = 3y(y-2) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad y = 0 \quad \text{ή} \quad y = 2,$$

$y = 1:$

$$3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,2), \quad P_3(1,1) \quad \text{και} \quad P_4(-1,1).$$

Οι σχέσεις $(6.3.1-1)$, όταν εφαρμοστούν γενικά για το σημείο $(x,y) \in D$, δίνουν

$$\begin{aligned} A &= f_{xx} = 6y - 6, \quad B = f_{xy} = 6x, \quad C = f_{yy} = 6y - 6 \quad \text{και} \\ \Delta &= AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{vmatrix} = 36(y-1)^2 - 36x^2. \end{aligned}$$

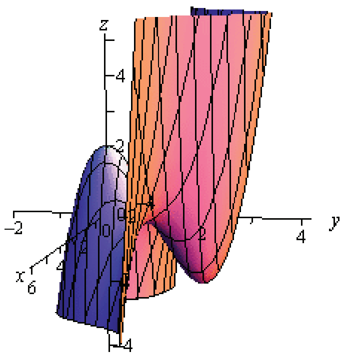
Τότε από τις συνθήκες (I-III) του Θεωρήματος 6.3 - 2 για τα παραπάνω σημεία προκύπτουν (Σχ. 6.3 - 4):

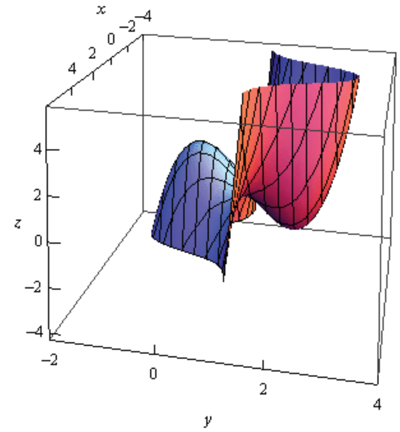
$P_1$: $\Delta|_{P_1(0,0)} = 36 < 0$ και $A|_{P_1(0,0)} = -6 > 0$, δηλαδή υπάρχει μέγιστο (ολικό) με τιμή $f(0,0) = 2$,

$P_2$: $\Delta|_{P_2(0,2)} = 36 > 0$ και $A|_{P_2(0,2)} = 6 > 0$, δηλαδή ελάχιστο (ολικό) με τιμή $f(0,2) = -2$,

$P_3$: $\Delta|_{P_3(1,1)} = -36 < 0$ σημείο καμπής και

$P_4$: $\Delta|_{P_4(-1,1)} = -36 < 0$ όμοια σημείο καμπής.




**Σχήμα** 6.3 - 4: Παράδειγμα 6.3 - 4. Δύο διαφορετικές όψεις του διαγράμματος της $3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

■

## Άσκηση

Να μελετηθούν για την ύπαρξη ακρότατων οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x,y)$:

$i)$ $x^2 + xy + y^2 + 5x - 5y + 3$ $\quad$ $ii)$ $x^3 - 6xy + y^3$

$iii)$ $x^3 - 3x + xy^2$ $\quad$ $iv)$ $e^{-x^2-y^2}$.

## Ακρότατα συνάρτησης τριών μεταβλητών

**Θεώρημα 6.3 - 3 (ικανή συνθήκη ακρότατου).** *Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z)$ $|S \subseteq \Re^3$, όπου $S$ ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν στο $S$ και είναι* *συνεχείς συναρτήσεις όλες οι πρώτης και δευτέρας τάξης μερικές παράγωγοι. Έστω σημείο* $P_0 = P_0\,(x_0, y_0, z_0) \in S$, *τέτοιο ώστε*

$$\frac{\partial f\,(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \frac{\partial f\,(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \frac{\partial f\,(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0. \qquad (6.3.1 - 3)$$

*Αν*

$$A = f_{xx}\,(x_0, y_0, z_0)\,, \quad B = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{P_0} \quad \textit{και}$$

$$C = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_{P_0}, \qquad (6.3.1 - 4)$$

*τότε η* $f\,(x, y, z)\,|S \subseteq \Re^3$ *έχει:*

I. **μέγιστο**, *όταν* $A < 0$, $B > 0$ *και* $C < 0$,

II. **ελάχιστο**, *όταν* $A > 0$, $B > 0$ *και* $C > 0$.

Όμοια με τις Σημειώσεις 6.3 - 1 (I) τα σημεία που επαληθεύουν τη συνθήκη $(6.3.1-3)$ λέγονται επίσης κρίσιμα σημεία και είναι θέσεις πιθανών ακρότατων της $f(x, y, z)$.

### Παράδειγμα 6.3 - 5

Έστω η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 5$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(6.3.1 - 3)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 2x - 2 &= 0 \\ f_y = 2y &= 0 \\ f_z = 2z &= 0 \end{aligned}$$

από τη λύση του οποίου προκύπτει σαν πιθανό σημείο ακρότατου το $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$. Σύμφωνα με τις σχέσεις $(6.3.1 - 4)$ είναι

$$A = f_{xx}\,(1, 0, 0) = 2 > 0, \;\; B = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(1,0,0)} = 4 > 0 \;\; \text{και}$$

$$C \;=\; \left| \begin{matrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{matrix} \right|_{(1,0,0)} = 8 > 0,$$

δηλαδή επαληθεύεται η συνθήκη (ΙΙ) του Θεωρήματος 6.3 - 3, οπότε στο σημείο $P(1,0,0)$ η $f$ έχει ελάχιστο με τιμή $f(1,0,0) = -4$.

## Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x,y,z)$

i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11$

ii) $x^2 + y^2 + z^2 + 3z + 1$.

### 6.3.2 Απόλυτα ακρότατα

[21]Επεκτείνοντας την έννοια των ακρότατων της Παραγράφου 4.3.1 ζητείται η **βελτιστοποίηση** (mathematical optimization) των τιμών μιας συνάρτησης, έστω $f(x,y)$, σε μια κλειστή περιοχή[22] του πεδίου ορισμού της $D$, όταν $D \subseteq \Re^2$. Το πρόβλημα αυτό ισοδυναμεί τότε με την εύρεση των **απόλυτων ακρότατων**, δηλαδή των απόλυτων ελάχιστων και μέγιστων της $f$ στο $D$.

Η μελέτη των ακρότατων της κατηγορίας αυτής βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα (extreme value theorem):

**Θεώρημα 6.3 - 1** *Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ορισμένη και συνεχής σε μια περιοχή $D \subseteq \Re^2$, τότε υπάρχουν σημεία $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2) \in D$, έτσι ώστε*

[21]Η παράγραφος αυτή δεν ανήκει στην εξεταστέα ύλη.

[22]Υπενθυμίζεται ότι:

**Ορισμός 6.3 - 1** *Μια περιοχή στο $\Re^2$ θα λέγεται* **κλειστή**, *όταν περιέχει και το σύνορό της, ενώ θα λέγεται* **ανοικτή**, *όταν δεν το περιέχει.*

Επομένως η περιοχή $D = [-1,1] \times [0,2]$ είναι κλειστή, ενώ η $D = [-1,1] \times [0,2]$ ανοικτή.

**Ορισμός 6.3 - 2** *Μια περιοχή στο $\Re^2$ θα λέγεται* **φραγμένη**, *όταν είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι ανήκει σε ένα πεπερασμένο δίσκο.*

*η* $f(x_1, y_1)$ *να είναι η μέγιστη και η* $f(x_1, y_1)$ *η ελάχιστη τιμή της* $f$ *στο* $D$.

**Σημείωση 6.3 - 1**

Η διαδικασία προσδιορισμού των απόλυτων ακρότατων γίνεται με τα παρακάτω βήματα:

I. υπολογισμός των κρίσιμων σημείων της $f$ στο $D$,[23]

II. εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της $f$ στο σύνορο του $D$.

III. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των περιπτώσεων $(I)$ και $(II)$ ορίζουν τότε τα απόλυτα ακρότατα της $f$ στο $D$.

**Παράδειγμα 6.3 - 1**

Να υπολογιστούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$$

στο τετράγωνο (Σχ. 6.3 - 1a)

$$D = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad -1 \le x \le 1 \text{ και } -1 \le y \le 1\}.$$

**Λύση.** Σύμφωνα με τη Σημείωση 6.3 - 1 έχουμε:

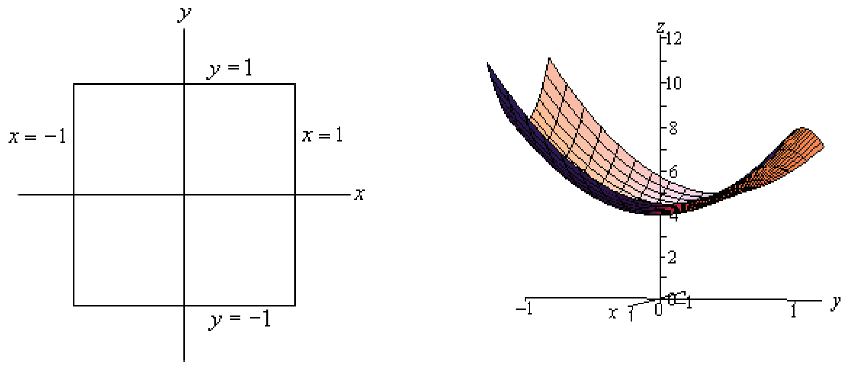
**βήμα I:** Από τον τύπο $(6.3.1-2)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 2x - 4xy &= 0 \\ f_y = 8y - 2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 2η εξίσωση προκύπτει $y = \frac{x^2}{4}$, οπότε αντικαθιστώντας στην 1η έχουμε

$$x - 4x\,\frac{x^2}{4} = 2x - x^3 = x\left(2 - x^2\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0,\, \pm\sqrt{2}.$$

[23] Δεν απαιτείται η εφαρμογή του Θεωρήματος 6.3 - 3 στην περίπτωση αυτή.




Σχήμα 6.3 - 1: Παράδειγμα 6.3 - 1: (a) το τετράγωνο $D = \{(x, y) \in \Re^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq 1\}$ και (b) το διάγραμμα της $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2 y + 4$, όταν $(x, y) \in D$.

Επειδή όμως πρέπει οι τιμές να ανήκουν στο $D$, δεκτή γίνεται μόνον η τιμή $x = 0$. Αντικαθιστώντας την τιμή $x = 0$ στη 2η εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι $y = 0$. Άρα το κρίσιμο σημείο της $f$ είναι το

$$P(0, 0) \quad \text{με αντίστοιχη τιμή} \quad f(0, 0) = 4. \tag{1}$$

**βήμα II:** Η εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της $f$ στο σύνορο του $D$ γίνεται ως εξής:

i) $x = 1, \quad -1 \leq y \leq 1$, οπότε $f(1, y) = g_1(y) = 4y^2 - 2y + 5$. Τότε $g_1'(y) = 8y - 2$, οπότε το κρίσιμο σημείο της $g_1$ υπολογίζεται από την εξίσωση $g_1'(y) = 0$, δηλαδή είναι το $y = \frac{1}{4} \in D$. Άρα για την περίπτωση αυτή έχουμε

$$P_1\left(1, \frac{1}{4}\right), \quad f\left(1, \frac{1}{4}\right) = g_1\left(\frac{1}{4}\right) = 4.75. \tag{2}$$

ii) $x = -1, \quad -1 \leq y \leq 1$, οπότε $f(-1, y) = g_2(y) = 4y^2 - 2y + 5 = g_1(y)$, δηλαδή είναι η περίπτωση $(i)$.

iii) $y = 1, \quad -1 \leq x \leq 1$, οπότε $f(x, 1) = f_1(x) = 8 - x^2$. Τότε $f_1'(x) = -2x$, οπότε το κρίσιμο σημείο της $f_1$ υπολογίζεται από την εξίσωση

$f_1'(x) = 0$, δηλαδή είναι το $x = 0 \in D$. Άρα έχουμε

$$P_2\,(0,1)\,, \quad f\,(0,1) = f_1(0) = 8. \tag{3}$$

iv) $y = -1, \quad -1 \le x \le 1$, οπότε $f(x,-1) = f_2(x) = 8 + 3x^2$. Τότε $f_2'(x) = 6x$, οπότε το κρίσιμο σημείο της $f_2$ όμοια υπολογίζεται ότι είναι το $x = 0 \in D$. Άρα έχουμε

$$P_3\,(0,-1)\,, \quad f\,(0,-1) = f_2(0) = 8. \tag{4}$$

v) Στα παραπάνω πιθανά σημεία των απόλυτων ακρότατων πρέπει να συνυπολογιστούν και οι κορυφές του τετραγώνου $D$, δηλαδή:

$$\begin{array}{llllll} \text{σημείο:} & A_1\,(-1,-1) & \text{με τιμή} & f\,(-1,-1) & = & 11 \\ & A_2\,(1,-1) & & f\,(-1,1) & = & 11 \\ & A_3\,(1,1) & & f\,(1,1) & = & 7 \\ & A_4\,(-1,1) & & f\,(-1,1) & = & 7. \end{array} \tag{5}$$

**βήμα III:** Από τις (1)-(5) προκύπτουν τα εξής:

- το σημείο $P(0,0)$ ορίζει το απόλυτο ελάχιστο, επειδή η $f$ έχει τη μικρότερη τιμή 4 από όλες τις άλλες σε αυτό,
- τα σημεία $B_1\,(-1,-1)$ και $B_2\,(1,-1)$ ορίζουν τις απόλυτα μέγιστες τιμές, επειδή η $f$ έχει τη μεγαλύτερη τιμή 11 σε αυτά (Σχ. 6.3 - 1b). ∎

**Παράδειγμα 6.3 - 2**

Όμοια τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 6y$$

στον κυκλικό δίσκο

$$D = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad x^2 + y^2 \le 16\}.$$

**Λύση.** Διαδοχικά σύμφωνα και με τη Σημείωση 6.3 - 1 έχουμε:

**βήμα I:** Από τον τύπο $(6.3.1-2)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 4x &= 0 \\ f_y = -2y + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα το κρίσιμο σημείο της $f$ είναι το

$$P(0,3) \in D \quad \text{με αντίστοιχη τιμή} \quad f(0,3) = 9. \tag{1}$$

**βήμα II:** Η εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της $f$ στο σύνορο του $D$, δηλαδή στην περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 \leq 16$ γίνεται ως εξής:

i) από την εξίσωση $x^2+y^2 = 16$ προκύπτει $x^2 = 16-y^2$, οπότε αντικαθιστώντας στην $f$ έχουμε

$$g(y) = 2\left(16 - y^2\right) - y^2 + 6y = 32 - 3y^2 + 6y.$$

Επομένως το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή ανάγεται στην εύρεση των ακρότατων της $g$, όταν το $y$ ανήκει στον παραπάνω κυκλικό δίσκο, δηλαδή, όταν $-4 \leq y \leq 4$. Τότε $g'(y) = -6y + 6$, οπότε $y = 1$ και επειδή $x^2 = 16 - y^2$, τελικά τα κρίσιμα σημεία για την περίπτωση αυτή είναι:

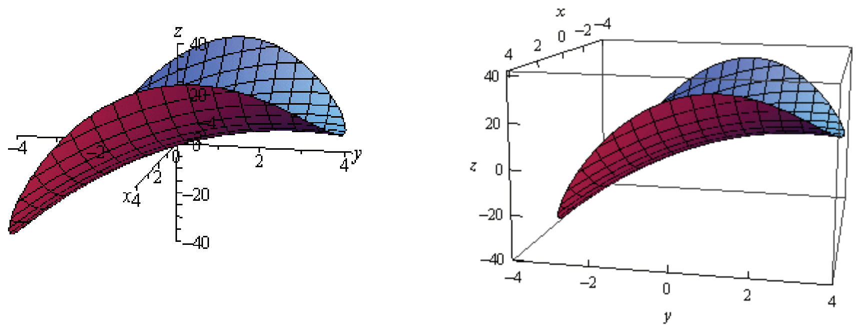
$$\begin{array}{lllll} \text{σημείο:} & P_1\left(-\sqrt{15},1\right) \in D & \text{με τιμή} & f\left(-\sqrt{15},1\right) & = 35 \\ & P_2\left(\sqrt{15},1\right) \in D & & f\left(\sqrt{15},1\right) & = 35. \end{array} \tag{2}$$

ii) Στα παραπάνω πιθανά σημεία των απόλυτων ακρότατων πρέπει να συνυπολογιστούν και εκείνα που προκύπτουν από τις τιμές στα άκρα του διαστήματος $[-4,4]$ για τη μεταβλητή $y$, δηλαδή οι τιμές $y = \pm 4$ όπου προφανώς $x = 0$. Άρα έχουμε

$$\begin{array}{lllll} \text{σημείο:} & A_1\,(0,-4) & \text{με τιμή} & f\,(0,-4) & = -40 \\ & A_2\,(0,4) & & f\,(0,4) & = 8. \end{array} \tag{3}$$

**βήμα III:** Από τις (1)-(3) προκύπτουν τα εξής:

- το σημείο $A_1\,(0,-4)$ ορίζει το απόλυτο ελάχιστο, επειδή η $f$ έχει τη μικρότερη τιμή $-40$ από όλες τις άλλες σε αυτό,
- τα σημεία $P_1\left(-\sqrt{15},1\right)$ και $P_2\left(\sqrt{15},1\right)$ ορίζουν τις απόλυτα μέγιστες τιμές, επειδή η $f$ έχει τη μεγαλύτερη τιμή 35 σε αυτά (Σχ. 6.3 - 2).




**Σχήμα** 6.3 - 2: Παράδειγμα 6.3 - 2: Δύο διαφορετικές όψεις του διαγράμματος της $f(x,y)=2x^2-y^2+6y$, όταν $(x,y)\in D$.

■

### 6.3.3 Ακρότατα με συνθήκες - Μέθοδος του Lagrange

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήθηκε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης των τιμών μιας συνάρτησης, έστω $f(x,y)$, σε μια κλειστή περιοχή του πεδίου ορισμού της $f$. Γενικεύοντας το παραπάνω πρόβλημα στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης $f(x,y)$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$, όταν τα $(x,y)$, αντίστοιχα τα $(x,y,z)$ επαληθεύουν ορισμένες συνθήκες (constraints) της μορφής $\phi(x,y)=0$, αντίστοιχα $\phi(x,y,z)=0$ (coupling equation ή equality constraint). Τα ακρότατα του είδους αυτού είναι γνωστά σαν **ακρότατα με συνθήκη** (conditional extremum) και είναι επίσης μια μορφή της με συνθήκη μαθηματικής βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης. Η μέθοδος λύσης που θα χρησιμοποιηθεί είναι γνωστή σαν **μέθοδος πολλαπλασιαστών του Lagrange** (Lagrange multipliers).

### Περίπτωση μιας συνθήκης

Ζητείται ο προσδιορισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης, έστω $f(x,y)$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$, όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη

$$\phi(x,y)=0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \phi(x,y,z)=0. \tag{6.3.3 - 1}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange ορίζεται αρχικά μία βοηθητική συνάρτηση (auxiliary function)

$$\begin{aligned} \mathit{\Lambda}(x,y) &= f(x,y)+\lambda\,\phi(x,y), && (6.3.3 - 2)\\ & \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathit{\Lambda}(x,y,z) &= f(x,y,z)+\lambda\,\phi(x,y,z) && (6.3.3 - 3) \end{aligned}$$

που λέγεται και συνάρτηση του Lagrange, στην οποία η παράμετρος $\lambda$ είναι ένας προσδιοριστέος πολλαπλασιαστής. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται πλέον στον προσδιορισμό των ακρότατων της $\mathit{\Lambda}$. Έχοντας υπ' όψιν τις $(6.3.1-1)$ προκύπτει ότι οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \mathit{\Lambda}_x = f_x + \lambda\phi_x &= 0 \\ \mathit{\Lambda}_y = f_y + \lambda\phi_y &= 0, \end{aligned} \tag{6.3.3 - 4}$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \mathit{\Lambda}_x = f_x + \lambda\phi_x &= 0 \\ \mathit{\Lambda}_y = f_y + \lambda\phi_y &= 0 \\ \mathit{\Lambda}_z = f_z + \lambda\phi_z &= 0. \end{aligned} \tag{6.3.3 - 5}$$

Από τη λύση των παραπάνω συστημάτων θα προκύψουν οι άγνωστοι συναρτήσει του $\lambda$, δηλαδή $x=x(\lambda)$, $y=y(\lambda)$ και $z=z(\lambda)$. Αντικαθιστώντας στην $(6.3.3-1)$ προσδιορίζεται τότε το $\lambda$ και στη συνέχεια οι τιμές $x_0$ και $y_0$, αντίστοιχα $x_0$, $y_0$ και $z_0$ που επαληθεύουν το σύστημα $(6.3.3-4)$, αντίστοιχα $(6.3.3-5)$.

### Σημείωση 6.3 - 1

Όμοια, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, επειδή λόγω της συνθήκης $(6.3.3-1)$ το πεδίο ορισμού της $f$ θα είναι μια φραγμένη περιοχή του $\Re^2$, αντίστοιχα του $\Re^3$, οπότε θα εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή το Θεώρημα 6.3 - 1. Τότε το σημείο $P\,(x_0, y_0)$, που προσδιορίζεται με την παραπάνω διαδικασία, θα είναι ακρότατο της $f(x,y)$ με συνθήκη τη $\phi(x,y)=0$, αντίστοιχα το $P\,(x_0, y_0, z_0)$ θα είναι ακρότατο της $f(x,y,z)$ με συνθήκη τη $\phi(x,y,z)=0$. Το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) υπολογίζεται από τις τιμές τις

$$f\left(x_0, y_0\right), \quad \text{αντίστοιχα} \quad f\left(x_0, y_0, z_0\right) \quad \text{στο σημείο} \quad P.$$

**Παράδειγμα 6.3 - 1**

Να προσδιοριστούν ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y)=xy \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x,y)=x+y-1=0.$$

**Λύση.** Σύμφωνα με την $(6.3.3-2)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x,y)=xy+\lambda\left(x+y-1\right).$$

Τότε από το σύστημα $(6.3.3-4)$ προκύπτει

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_x = y+\lambda & = & 0 \\ \Lambda_y = x+\lambda & = & 0, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcl} y & = & -\lambda \\ x & = & -\lambda. \end{array}$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη $\phi(x,y)=x+y-1=0$ προκύπτει $-2\lambda=1$, δηλαδή $\lambda=-\frac{1}{2}$. Άρα

$$x=y=\frac{1}{2}, \quad \text{δηλαδή το κρίσιμο σημείο είναι το} \quad P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.3 - 1 ο προσδιορισμός του είδους του ακρότατου γίνεται αντικαθιστώντας στην $f$ την τιμή $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, οπότε

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}>0, \quad \text{δηλαδή μέγιστο.}$$

■

**Παράδειγμα 6.3 - 2**

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y) = 5x - 3y \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x,y) = x^2 + y^2 - 136 = 0.$$

**Λύση.** Γεωμετρικά ζητείται ο προσδιορισμός των μέγιστων και των ελάχιστων τιμών των συντεταγμένων τομής του επιπέδου $z = f(x,y)$ με τον κύλινδρο $\phi(x,y)$ με βάση κυκλικό δίσκο ακτίνας $\sqrt{136}$. Σύμφωνα με την $(6.3.3-2)$ η συνάρτηση του Lagrange για την περίπτωση αυτή γράφεται

$$\Lambda(x,y) = 5x - 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 136\right).$$

Τότε από το σύστημα $(6.3.3-4)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = 2\lambda x + 5 &= 0 \\ \Lambda_y = 2\lambda y - 3 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{οπότε} \qquad \begin{aligned} x &= -\frac{5}{2\lambda} \\ y &= \frac{3}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη $\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 136 = 0$ προκύπτει

$$\frac{25}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\,\lambda^2} = 136 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 = \frac{1}{16}, \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \pm\frac{1}{4}.$$

Επομένως, όταν

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{4} \quad \text{είναι} \quad x = -10 \quad \text{και} \quad y = 6 \quad \text{σημείο} \quad P_1(-10,6), \\ \lambda &= -\frac{1}{4} \qquad\qquad x = 10 \quad \text{και} \quad y = -6 \quad \text{σημείο} \quad P_2(10,-6). \end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακρότατου, όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.3 - 1, αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στην $f$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \text{σημείο} \quad P_1(-10,6): \quad f(-10,6) &= -68 < 0 \quad \text{ελάχιστο}, \\ P_2(10,-6): \quad f(10,-6) &= \phantom{-}68 > 0 \quad \text{μέγιστο}. \end{aligned}$$

■

**Παράδειγμα 6.3 - 3**

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y,z)=xyz \quad \text{με συνθήκη την} \quad \phi(x,y,z)=x+y+z-1=0,$$

όταν $x,\ y,\ z \geq 0$.

**Λύση.** Σύμφωνα με την $(6.3.3-3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x,y,z)=xyz+\lambda\,(x+y+z-1)\,.$$

Τότε από το σύστημα $(6.3.3-5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = yz+\lambda &= 0 \\ \Lambda_y = zx+\lambda &= 0 \\ \Lambda_z = xy+\lambda &= 0, \end{aligned}$$

που γράφεται

$$yz = -\lambda \tag{1}$$
$$zx = -\lambda \tag{2}$$
$$xy = -\lambda. \tag{3}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $yz=zx$ ή $z(y-x)=0$, οπότε διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις

$$z = 0 \quad \text{ή} \tag{4}$$
$$y = x \tag{5}$$

- Αν ισχύει η (4), τότε από την (1) ή την (2) προκύπτει ότι $\lambda=0$, οπότε από την (3) έχουμε $xy=0$, δηλαδή $x=0$ ή $y=0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τη συνθήκη $\phi(x,y,z)=x+y+z-1=0$ έχουμε

$$z = 0, \quad x=0, \quad y=1 \qquad \text{σημείο} \quad P_1(0,1,0) \tag{6}$$
$$z = 0, \quad y=0, \quad x=1 \qquad \text{σημείο} \quad P_2(1,0,0) \tag{7}$$

- Αν ισχύει η (5), τότε έχουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

  i) $x = y = 0$. Συνδυάζοντας με τη συνθήκη $\phi(x, y, z) = x+y+z-1 = 0$, προκύπτει $z = 1$, δηλαδή το σημείο

  $$P_3(0, 0, 1). \tag{8}$$

  ii) $x = y \neq 0$. Τότε από τις (2) και (3) προκύπτει ότι

  $$xz = xy \quad \text{ή} \quad x(z-y) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad y = z$$

  και επειδή $x \neq 0$, πρέπει $y = z$. Άρα τελικά $x = y = z$. Τότε από τη συνθήκη $\phi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ έχουμε

  $$3x = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{1}{3} \qquad \text{σημείο} \quad P_4\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \tag{9}$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακρότατου στις περιπτώσεις (6)-(9), όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.3 - 1, αντικαθιστούμε τις τιμές στην $f$, οπότε

$$\begin{aligned} &f(0,0,1) = 0, \quad f(0,1,0) = 0, \qquad f(1,0,0) = 0 \quad \text{ελάχιστα}, \\ &f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} \qquad\qquad \text{μέγιστο}. \end{aligned}$$

**Σημείωση**: στο παράδειγμα αυτό εξετάστηκε και η τιμή $\lambda = 0$. ■

**Παράδειγμα 6.3 - 4**

Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με το μέγιστο δυνατό όγκο, όταν το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι $64\,\mathrm{cm}^2$.

**Λύση.** Έστω $x$ το μήκος, $y$ το πλάτος και $z$ το ύψος όπου $x, y, z > 0$. Τότε είναι γνωστό ότι ο όγκος δίνεται από το τύπο $xyz$, ενώ το εμβαδό είναι $2(xy + yz + zx)$. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = xyz \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x, y, z) = xy + yz + zx - 32 = 0.$$

Σύμφωνα με την $(6.3.3 - 3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x, y, z) = xyz + \lambda\,(xy + yz + zx - 32)\,.$$

Τότε από το σύστημα $(6.3.3-5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = yz + \lambda(y+z) &= 0 \\ \Lambda_y = zx + \lambda(z+x) &= 0 \\ \Lambda_z = xy + \lambda(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

που γράφεται

$$yz = -\lambda(y+z) \tag{1}$$
$$zx = -\lambda(z+x) \tag{2}$$
$$xy = -\lambda(x+y). \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $x$, την (2) με $y$ και την (3) με $z$ προκύπτει

$$yz = -\lambda(y+z) \tag{4}$$
$$zx = -\lambda(z+x) \tag{5}$$
$$xy = -\lambda(x+y) \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) έχουμε

$$-\lambda(y+z) = -\lambda(z+x), \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda(xz-yz)=0,$$

οπότε

- ή $\lambda = 0$ που απορρίπτεται επειδή τότε $yz=0$, οπότε ή $y=0$ ή $z=0$ άτοπο,

- ή $xz-yz=0$ που, επειδή $z \neq 0$, δίνει

$$x = y. \tag{7}$$

Όμοια από τις (6) και (7) προκύπτει ότι

$$y = z. \tag{8}$$

Άρα $x = y = z$ και αντικαθιστώντας στην (4), δηλαδή στη συνθήκη $\phi(x,y,z) = xy + yz + zx - 32 = 3x^2 - 32 = 0$, επειδή $x,\ y,\ z > 0$, προκύπτει ότι η λύση είναι $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{\frac{32}{3}}$, δηλαδή υπάρχει ακρότατο στο σημείο

$$P\left(x_0, y_0, z_0\right) \quad \text{με τιμή} \quad f\left(x_0, y_0, z_0\right) \approx 10.67 > 0,$$

οπότε σύμφωνα και με την Παρατήρηση 6.3 - 1 έχουμε μέγιστο. ∎

**Παράδειγμα 6.3 - 5**

Όμοια να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με το μέγιστο δυνατό όγκο, που περικλείεται από το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Λύση.** Όπως προκύπτει από την εξίσωση του ελλειψοειδούς, το κέντρο του είναι το σημείο $(0,0,0)$. Επομένως το ίδιο σημείο θα πρέπει να και το κέντρο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οπότε οι κορυφές του θα είναι στα σημεία $(\pm x, \pm y, \pm z)$ όπου $x,\ y,\ z > 0$, οπότε ο όγκος του στην περίπτωση αυτή θα δίνεται από το τύπο $V = 2x\,2y\,2z = 8xyz$. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = 8xyz \quad \text{με συνθήκη την} \quad \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Σύμφωνα με την $(6.3.3-3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x,y,z) = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right),$$

οπότε από το σύστημα $(6.3.3-5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
\Lambda_x = 8yz + 2\lambda\,\frac{x}{a^2} &= 0\\
\Lambda_y = 8zx + \lambda\,\frac{y}{b^2} &= 0\\
\Lambda_z = 8xy + \lambda\,\frac{z}{c^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς $\lambda$ τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$\lambda = -4a^2\,\frac{yz}{x} = -4b^2\,\frac{zx}{y} = -4c^2\,\frac{xy}{z}\,,$$

οπότε

$$y^2 a^2 = x^2 b^2 \quad \text{και} \quad z^2 b^2 = y^2 c^2, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \tag{1}$$

Τότε αντικαθιστώντας στη συνθήκη $\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ προκύπτει

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3\,\frac{x^2}{a^2}, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm\,\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Επειδή $x > 0$, προκύπτει ότι $x = \pm\,\frac{a}{\sqrt{3}}$, οπότε τελικά από την (1) έχουμε ακρότατο στο σημείο

$$P\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{με μέγιστο όγκο} \quad V(P) = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}\,.$$

**Σημείωση**: στο παράδειγμα αυτό δεν απαιτήθηκε ο υπολογισμός του $\lambda$. ■

## Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα με συνθήκη των παρακάτω συναρτήσεων

$i)\quad x^2 + y^2$, όταν $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \qquad iii)\quad x^2 + y^2 + z^2$, όταν $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$

$ii)\quad x + 2y$, όταν $x^2 + y^2 = 5 \qquad iv)\quad \cos^2 x + \cos^2 y$, όταν $x - y = -\dfrac{\pi}{4}$.

### Περίπτωση δύο συνθηκών

[24]Ζητείται ο προσδιορισμός των πιθανών ακρότατων μιας συνάρτησης $f(x,y,z)$, όταν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$g(x,y,z) = 0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad h(x,y,z) = 0. \tag{6.3.3 - 24}$$

Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μιας συνθήκης, με τη μέθοδο του Lagrange ορίζεται η συνάρτηση

$$\Lambda(x,y,z) \;=\; f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z) + \mu\, h(x,y,z) \tag{6.3.3 - 25}$$

[24]Η παράγραφος αυτή δεν συμπεριλαμβάνεται στην εξεταστέα ύλη. Για γενίκευση του προβλήματος βλέπε βιβλιογραφία.

στην οποία οι παράμετροι $\lambda$, $\mu$ είναι προσδιοριστέοι πολλαπλασιαστές, οπότε το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της $\Lambda$. Έχοντας υπ' όψιν τις $(6.3.1-1)$ προκύπτει ότι οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \Lambda_x = f_x + \lambda\, g_x + \mu\, h_x &= 0 \\ \Lambda_y = f_y + \lambda\, g_y + \mu\, h_y &= 0 \\ \Lambda_z = f_z + \lambda\, g_z + \mu\, h_z &= 0. \end{aligned} \tag{6.3.3 - 26}$$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος θα προκύψουν οι άγνωστοι συναρτήσει των $\lambda$, $\mu$, δηλαδή $x = x(\lambda, \mu)$, $y = y(\lambda, \mu)$ και $z = z(\lambda, \mu)$. Αντικαθιστώντας στην $(6.3.3-24)$ προσδιορίζονται τα $\lambda$, $\mu$ και στη συνέχεια οι τιμές $x_0$, $y_0$ και $z_0$ που επαληθεύουν το σύστημα $(6.3.3-26)$.

### 6.3.4 Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων

Ο αναγνώστης θα έχει ήδη διαπιστώσει ότι η ολοκλήρωση συναρτήσεων της μορφής $e^{-x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, κ.λπ., δεν γίνεται, επειδή με κανένα μετασχηματισμό η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν ανάγεται σε κάποια υπολογίσιμη μορφή. Ανάλογα τις περισσότερες φορές η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι αδύνατη με τις υπάρχουσες κλασικές μεθόδους, κ.λπ. Τότε μια λύση θα μπορούσε να δοθεί αν η συνάρτηση που δημιουργεί το πρόβλημα αντικατασταθεί με μια ευκολότερης μορφής συνάρτηση, όπως είναι η πολυωνυμική. Η αντικατάσταση στην περίπτωση αυτή σημαίνει **προσέγγιση** της συνάρτησης με την πολυωνυμική, οπότε για την ακρίβεια της λύσης, πρέπει κάθε φορά να ελέγχεται και το σφάλμα που προκύπτει μετά από αυτή.

Ενδεικτικά γράφεται[25] ότι στα μαθηματικά θεωρητικά, δηλαδή δηλαδή δίνεται ο τύπος του πολυωνύμου, είναι δυνατή πάντοτε η προσέγγιση μιας συνεχούς συνάρτησης, έστω $f(x)$, με ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού $n$ της μορφής[26]

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \tag{6.3.4 - 1}$$

[25] Ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] για περαιτέρω μελέτη των διαφόρων μορφών προσέγγισης μιας συνάρτησης.

[26]

**Θεώρημα 6.3 - 1 (Weierstrass).** *Αν $f$ είναι μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο* όταν $a_i \in \Re$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$,ενώ μια προσέγγιση, που δίνει και τον τύπο του πολυωνύμου $P$, γίνεται από το παρακάτω πολυώνυμο του Taylor

$$f(x) \approx P_n(x) = f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x - x_0\right) + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n\,!}\left(x - x_0\right)^n,$$

όταν $x_0$ το κέντρο του παραπάνω αναπτύγματος. Η προσέγγιση όμως αυτή παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα, όπως:

- η ακρίβεια δεν αυξάνεται πάντοτε ανάλογα με τον βαθμό $n$ του πολυωνύμου,
- απαιτείται η γνώση του κέντρου $x_0$,
- η προσέγγιση είναι ακριβής μόνον για τιμές του $x$ πλησίον του $x_0$,
- απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων της $f$, που όμως τις περισσότερες φορές είναι δύσκολος ή και αδύνατος, κ.λπ.

Στο παραπάνω πρόβλημα της αντικατάστασης της $f(x)$ με ένα πολυώνυμο, θα πρέπει να προστεθεί επίσης και το πρόβλημα, που κυρίως εμφανίζεται στις διάφορες εφαρμογές και είναι αυτό της προσέγγισης με πολυώνυμο ενός συνόλου δεδομένων (data) της μορφής

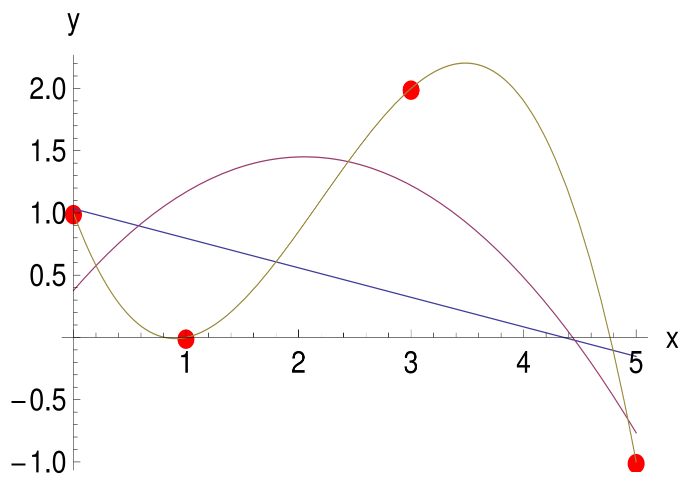
$$S = \left\{\left(x_i, y_i\right) \quad \text{με} \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\right\}. \tag{6.3.4 - 2}$$

Η απάντηση στα παραπάνω δύο προβλήματα δίνεται ως εξής: έστω ότι $x_0$, $x_1$, ..., $x_n$ είναι $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a, b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού επίσης το $[a, b]$ και της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $f\left(x_i\right)$ για κάθε $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$. Τότε ζητείται να προσδιοριστεί ένα πολυώνυμο, έστω $P_n$ βαθμού $\leq n$ της μορφής $(6.3.4 - 1)$, έτσι ώστε (Σχ. 6.3 - 1):

**I.** $P_n\left(x_i\right) = f\left(x_i\right)$ για κάθε $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, που είναι γνωστό σαν πρόβλημα της **πολυωνυμικής παρεμβολής** (polynomial interpolation), και

*$[a, b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο $P$, έτσι ώστε*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, b].$$




**Σχήμα** 6.3 - 1: Δεδομένα: $S = \{(0,1),(1,0),(3,2),(5,-1)\}$. Προσέγγιση με: παρεμβολή (πράσινη καμπύλη) και με διακριτή προσέγγιση: 1ου βαθμού - ευθεία (μπλε) και 2ου βαθμού - παραβολή (κόκκινη) καμπύλη

**II.** το πολυώνυμο να προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ή διαφορετικά **άριστο τρόπο** (best approximation ή **best fitting**) τα σημεία $S$ στην $(6.3.4-2)$. Τότε το πολυώνυμο αυτό για το συγκεκριμένο βαθμό θα δίνει και το ελάχιστο δυνατό σφάλμα. Το πρόβλημα είναι γνωστό σαν πρόβλημα της **διακριτής προσέγγισης** (discrete approximation).

Στη συνέχεια από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις θα εξεταστεί μόνον η ΙΙ, που όπως θα διαπιστωθεί, είναι μια εφαρμογή των ακρότατων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

### **Περίπτωση Ι** πολυώνυμο 1ου βαθμού

Έστω ότι το σύνολο των σημείων $S$ στην $(6.3.4-2)$ προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού της μορφής

$$P_1(x) = P(x) = ax + b, \qquad (6.3.4 \text{ - } 3)$$

δηλαδή η προσέγγιση των δεδομένων γίνεται με μια ευθεία. Αν θεωρηθεί το σημείο $(x_i, y_i) \in S$, τότε η τιμή $y_i$ προσεγγίζεται από την τιμή $\tilde{y}_i = P(x_i) =$

$ax_i+b$, οπότε το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης στην περίπτωση αυτή θα είναι $e_i = |y_i - \tilde{y}_i| = |y_i - (ax_i + b)|$. Επομένως για το ολικό σφάλμα, έστω $\tilde{E}$, θα έχουμε

$$\tilde{E} = \tilde{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_n = |y_1 - (ax_1 + b)| + \ldots + |y_n - (ax_n + b)|\,. \qquad (6.3.4 - 4)$$

Προφανώς $\tilde{E} = \tilde{E}(a, b)$, δηλαδή μια συνάρτηση των $a$, $b$. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό των $a$ και $b$, έτσι ώστε το σφάλμα $\tilde{E}$ στην $(6.3.4-4)$ να είναι ελάχιστο. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(6.3.1-2)$ η αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = 0. \qquad (6.3.4 - 5)$$

Εύκολα όμως διαπιστώνεται ότι η $(6.3.4 - 5)$ λόγω και του απολύτου δεν παραγωγίζεται[27], οπότε το πρόβλημα στη μορφή αυτή δε λύνεται.

Στη **διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων** (discrete least squares method), σε αντίθεση με την $(6.3.4 - 4)$, προσδιορίζονται οι σταθερές $a$ και $b$, έτσι ώστε το ολικό τετραγωνικό σφάλμα $E$, δηλαδή το

$$E = e_1^2 + \ldots + e_n^2 = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \quad (6.3.4 - 6)$$

να είναι **ελάχιστο**. Τότε από την $(6.3.4 - 6)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)\, x_i = 0 \quad \text{και} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned}$$

που τελικά γράφεται μετά τις πράξεις ως εξής:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^0}^{n} &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \qquad (6.3.4 - 7)$$

[27] Έστω για ευκολία ότι απαλείφονται τα απόλυτα. Τότε

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = -x_1 - \ldots - x_n = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = -1 - \ldots - 1 = -n = 0$$

άτοπο.

**Πίνακας** 6.3 - 1: Παράδειγμα 6.3 - 1

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i\,y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| -0.5 | 1.2 | -0.6 | 0.25 |
| 0.3 | 2.0 | 0.6 | 0.09 |
| 0.7 | 1.0 | 0.7 | 0.49 |
| 1.5 | -1.0 | -1.5 | 2.25 |
| 2.0 | 3.2 | -0.8 | 3.08 |

Το γραμμικό σύστημα $(6.3.4 - 7)$ λέγεται τότε και **σύστημα κανονικών εξισώσεων** (normal equations) και από τη λύση του προκύπτει ότι:

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad (6.3.4 - 8)$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (6.3.4 - 9)$$

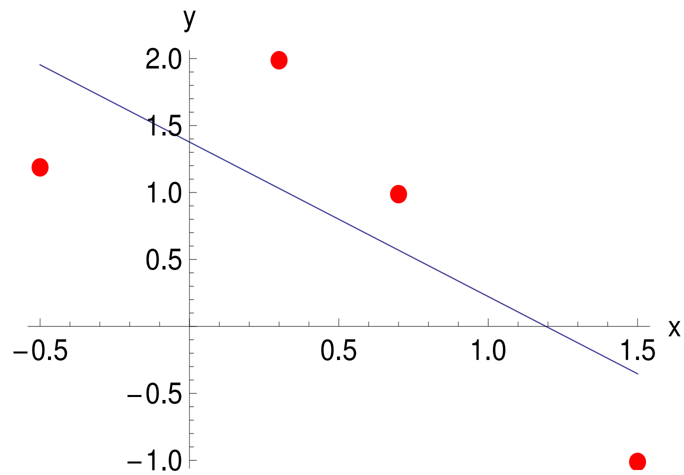
**Παράδειγμα 6.3 - 1**

Να προσδιοριστεί με την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο πρώτου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -0.5 | 0.3 | 0.7 | 1.5 |
| $y_i$ | 1.2 | 2.0 | 1.0 | -1.0 |

**Λύση.** Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα δημιουργείται ο Πίνακας 6.3 - 1. Τότε από τους τύπους $(6.3.4 - 9)$ και $(6.3.4 - 9)$ προκύπτει

$$a = \frac{4 \cdot (-0.8) - 2 \cdot (3.2)}{4 \cdot (3.08) - 2^2} \approx -1.1539 \quad \text{και}$$




**Σχήμα** 6.3 - 2: Παράδειγμα 6.3 - 1. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -1.1539\,x + 1.3769$

$$b = \frac{(3.08)\cdot(3.2) - (-0.8)\cdot 2}{4\cdot(3.08) - 2^2} \approx 1.3769,$$

δηλαδή $P(x) = -1.1539\,x + 1.3769$ (Σχ. 6.3 - 2). ■

**Περίπτωση ΙΙ** **πολυώνυμο $m$-βαθμού**

Στην περίπτωση αυτή ζητείται η προσέγγιση του συνόλου $S$ στην $(6.3.4-2)$ με ένα πολυώνυμο $m$-βαθμού της μορφής $(6.3.4-1)$, δηλαδή

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

όταν

$$\mathbf{m < n - 1}. \tag{6.3.4 - 10}$$

Τότε, όμοια με την Περίπτωση Ι, εκλέγονται οι σταθερές $a_0$, $a_1$, …, $a_m$, έτσι ώστε το σφάλμα[28]

$$E = e_1^2 + \ldots + e_n^2 = [y_1 - P_m(x_1)]^2 + \ldots + [y_n - P_m(x_n)]^2$$

να είναι ελάχιστο.

Όπως και στην περίπτωση του πολυωνύμου 1ου βαθμού μία αναγκαία συνθήκη προκύπτει από τον τύπο $(6.3.1-2)$ ως εξής:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{για κάθε} \quad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{6.3.4 - 11}$$

Από την $(6.3.4-11)$ τελικά[29] έχουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα **κανονικών εξισώσεων** με $m+1$ εξισώσεις και $m+1$ αγνώστους τους συντελεστές $a_j$ του πολυωνύμου

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^1 \\
&\vdots \qquad (6.3.4 - 12) \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^m\,.
\end{aligned}$$

[28] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 7.

[29] Το σύστημα $(6.3.4-11)$ γράφεται $\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k} = 0$, οπότε $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots, n$. Να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

στο οποίο ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι συμμετρικός.

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα $(6.3.4 - 12)$ έχει ακριβώς μία λύση, όταν τα σημεία $x_i;\ i = 1, 2, \ldots, n$ είναι **διαφορετικά** μεταξύ τους.

**Σημείωση 6.3 - 1**

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να διευκρινιστεί ότι μια γενίκευση του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή η προσέγγιση των σημείων $S$ με ένα πολυώνυμο $P_m(x)$ με την απαίτηση το άθροισμα των σφαλμάτων $E = \sum_{i=1}^{n} e_i^k$ με $k \geq 3$, να είναι ελάχιστο, καταλήγει μετά και την εφαρμογή της συνθήκης $(6.3.4-11)$ σε μη γραμμικό σύστημα. Επομένως η μέθοδος με την απαίτηση αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη.

**Παράδειγμα 6.3 - 2**

Να προσδιοριστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο 2ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα του Παραδείγματος 6.3 - 1.

**Λύση.** Επειδή ο αριθμός των σημείων είναι $n = 4$, σύμφωνα με τη συνθήκη $(6.3.4 - 10)$ ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός $m$ του πολυωνύμου θα είναι $m < 4 - 1$, δηλαδή $m = 2$. Έστω $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε το σύστημα $(6.3.4 - 12)$ γράφεται

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^0 &+ a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 &+ a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^1 \quad , \\
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 &+ a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^4 = \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^2,
\end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με τον Πίνακα 6.3 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}
4a_0 &+ 2.0a_1 + 3.08a_2 = 3.2 \\
2.0a_0 &+ 3.08a_1 + 3.62a_2 = -0.8 \\
3.08a_0 &+ 3.62a_1 + 5.3732a_2 = -1.28
\end{aligned}$$

**Πίνακας** 6.3 - 2: Παράδειγμα 6.3 - 2

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i\,y_i$ | $x_i^2$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $x_i^2\,y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.5 | 1.2 | -0.6 | 0.25 | -0.125 | 0.0625 | 0.30 |
| 0.3 | 2.0 | 0.6 | 0.09 | 0.027 | 0.0081 | 0.18 |
| 0.7 | 1.0 | 0.7 | 0.49 | 0.343 | 0.2401 | 0.49 |
| 1.5 | -1.0 | -1.5 | 2.25 | 3.375 | 5.0625 | -2.25 |
| 2.0 | 3.2 | -0.8 | 3.08 | 3.62 | 5.3732 | -1.28 |

από τη λύση[30] του οποίου προκύπτει ότι το πολυώνυμο είναι (Σχ. 6.3 - 3)

$$P_2(x) = -1.4583\,x^2 + 0.3045\,x + 1.7707.$$

■

[31]

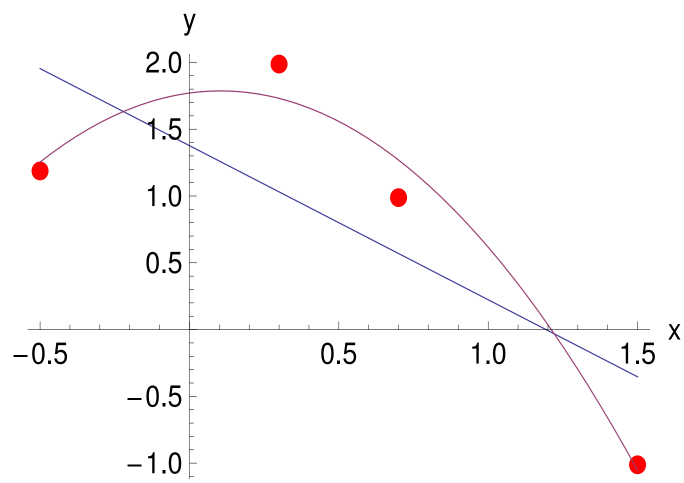
[32]

[30] Η λύση του συστήματος δεν είναι στην εξεταστέα ύλη.

[31] Θα ήθελα να ευχαριστήσω το φοιτητή Τσούκαλη Αντώνιο του Τμήματος Ιατρικών Οργάνων για τη βοήθειά του στα γραφικά του μαθήματος.



E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/




**Σχήμα** 6.3 - 3: Παράδειγμα 6.3 - 2. Η καμπύλη ορίζεται από το πολυώνυμο $P_2(x) = -1.4583\, x^2 + 0.3045\, x + 1.7707$, ενώ η ευθεία (Παράδειγμα 6.3 - 1) έχει εξίσωση $y = -1.1539\, x + 1.3769$

# Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

## Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

# Τέλος Ενότητας

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς



## Σημείωμα Αδειοδότησης



## Διατήρηση Σημειωμάτων