Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ενότητα 8: Διπλά και Τριπλά Ολοκληρώματα

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Βιοϊατρικής Τεχνολογίας ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 8

ΔΙΠΛΑ ΚΑΙ ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

8.1 Διπλά ολοκληρώματα

8.1.1 Ορισμός

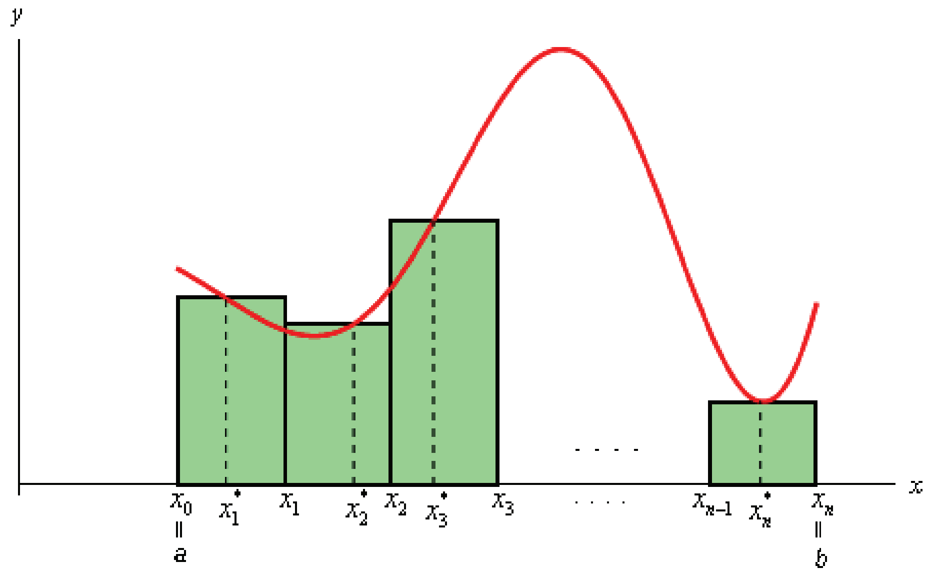
Για την καλύτερη κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, δηλαδή του **διπλού ολοκληρώματος**, κρίνεται απαραίτητο αρχικά να γίνει περιληπτικά[1] μια αναφορά στον αντίστοιχο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της συνάρτησης, έστω $f(x)\,|\,[a,\,b]$, δηλαδή του

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{8.1.1 - 1}$$

Στην περίπτωση αυτή υποθέτοντας ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και για ευκολία ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$, όπως είναι ήδη γνωστό, γεωμετρικά ο αριθμός $I(f)$ ισούται με το εμβαδόν E του καμπυλόγραμμου τραπεζίου, που ορίζεται από τον x-άξονα, το διάγραμμα της συνάρτησης $y=f(x)$ και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$ (Σχ. 8.1.1 - 1). Για την προσέγγιση του E δημιουργείται η παρακάτω διαμέριση του $[a,b]$ πλάτους Δx

$$a=x_0\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_{n-1}\leq x_n=b$$

[1] Ο αναγνώστης για μια πλήρη ανάπτυξη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.



Σχήμα 8.1.1 - 1: γεωμετρικός υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος $(8.1.1-1)$

και στη συνέχεια το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων ορθογωνίων

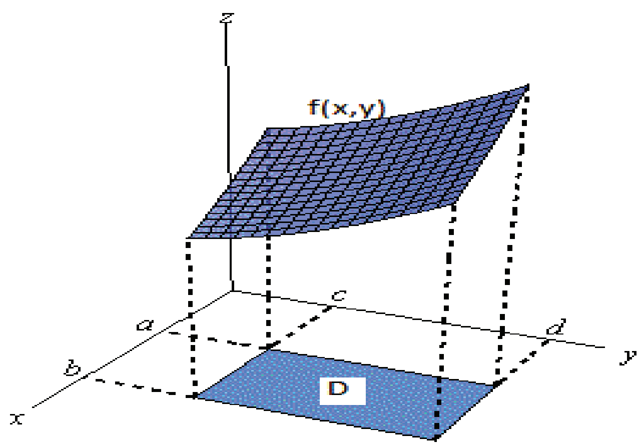
$$f\left(x_1^*\right)\Delta x + f\left(x_2^*\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n^*\right)\Delta x,$$

όπου $f\left(x_i^*\right);\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ τα ύψη. Τότε το εμβαδόν E, δηλαδή το ορισμένο ολοκλήρωμα $(8.1.1-1)$, προκύπτει από την οριακή

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)\,dx && (8.1.1\text{ - }2) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[f\left(x_1^*\right)\Delta x + f\left(x_2^*\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n^*\right)\Delta x\right], \end{aligned}$$

εφόσον υπάρχει.

Έστω τώρα η συνάρτηση $f(x,y)$ με πεδίο ορισμού το $D=[a,\ b]\times[c,\ d]\subseteq\Re^2$, που είναι συνεχής και για ευκολία μη αρνητική για κάθε $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ (Σχ. 8.1.1 - 2). Όπως και στην περίπτωση του ορισμένου ολοκληρώματος $(8.1.1-1)$, το διάστημα $[a,b]$ υποδιαιρείται σε n-υποδιαστήματα πλάτους Δx από τα σημεία $x_i;\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ και το διάστημα $[c,d]$ σε m-υποδιαστήματα πλάτους Δy από τα σημεία $y_j;\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$ (Σχ. 8.1.1 - 3 i).



Σχήμα 8.1.1 - 2: το πεδίο ορισμού $D = [a, b] \times [c, d\,]$ και η επιφάνεια $f(x, y)$

Τότε χρησιμοποιώντας αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία με εκείνη του ολοκληρώματος $(8.1.1 - 1)$, το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy \qquad (8.1.1 \text{ - } 3)$$

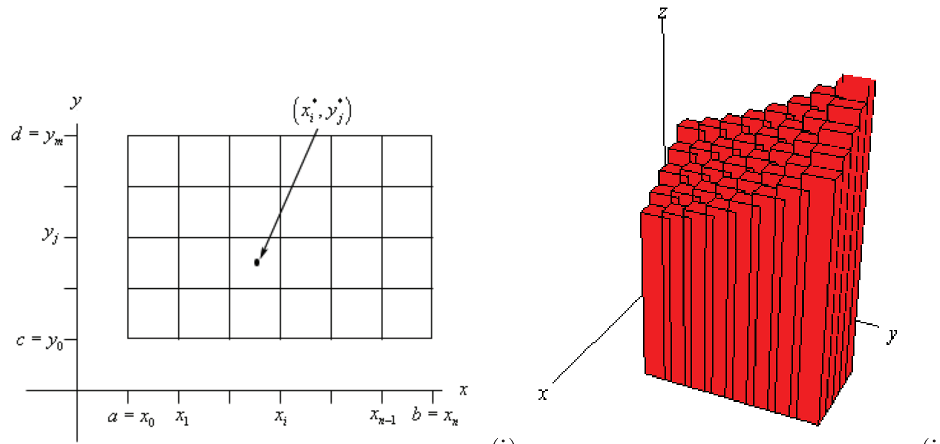
θα ισούται με τον όγκο V του στερεού, που έχει βάσεις το $[a, b] \times [c, d\,]$ και την επιφάνεια S, ενώ οι ακμές του είναι παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων. Έστω $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$ το εμβαδόν του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλογράμμου της παραπάνω διαμέρισης του $[a, b] \times [c, d\,]$ και $f\left(x_i^*, y_j^*\right)$ το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που αντιστοιχεί στα επί μέρους ορθογώνια (Σχ. 8.1.1 - 3 ii). Τότε ο όγκος V προσεγγίζεται ως εξής: (Σχ. 8.1.1 - 3 ii)

$$V \approx f\left(x_1^*, y_1^*\right) \Delta A + f\left(x_2^*, y_1^*\right) \Delta A + \ldots + f\left(x_n^*, y_m^*\right) \Delta A. \qquad (8.1.1 \text{ - } 4)$$

Παρατήρηση 8.1.1 - 1

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι, όταν η διαγώνιος των παραπάνω ορθογωνίων τείνει στο μηδέν καθώς τα n, $m \to +\infty$, το άθροισμα $(8.1.1 - 4)$ συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω I, που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων (x_i, y_j).

Σύμφωνα τώρα και με την παρατήρηση αυτή έχουμε τον παρακάτω ορισμό.



(i) (ii)

Σχήμα 8.1.1 - 3: (α) Η διαμέριση του $[a,b]\times[c,d]$ και (b) τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που προσεγγίζουν τον όγκο V στην (8.1.1 – 4)

Ορισμός 8.1.1 - 1 (διπλού ολοκληρώματος). *Ορίζεται σαν διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ στο $D=[a,b]\times[c,d]$ η οριακή τιμή*

$$I=\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n,\,m\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i^*,y_j^*\right)\Delta A, \qquad (8.1.1\text{ - }5)$$

εφόσον υπάρχει.

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε φραγμένο πεδίο ορισμού D της f.

8.1.2 Ιδιότητες

Αποδεικνύονται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

I. **Γραμμική**

$$\int\int_D [k\,f(x,y) + \lambda\,g(x,y)]\,dx\,dy = k\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy + \lambda\int\int_D g(x,y)\,dx\,dy,$$

όταν $k,\ \lambda \in \Re$. Η ιδιότητα γενικεύεται.

II. **Μέσης τιμής**

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = f\,(x_0, y_0)\;A$$

όπου A το εμβαδόν του τόπου και $(x_0, y_0) \in D$.

III. Αν η περιοχή D αποτελείται από τις χωριστές περιοχές D_1 και D_2, δηλαδή $D = D_1 \cup D_2$, τότε

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Εφαρμογή της ιδιότητας θα γίνει στο Παράδειγμα 8.1.3 - 11.

8.1.3 Μέθοδοι υπολογισμού

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $(8.1.1 - 3)$ εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου ορισμού D. Συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I. $D = \{(x,y) \in \Re^2 : \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$

Ο υπολογισμός στην περίπτωση αυτή γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 8.1.3 - 1. *Αν η συνάρτηση* $f(x,y)\,|\,D$ *με* $D = [a,\ b] \times [c,\ d\,] \subseteq \Re^2$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* D*, τότε*

$$\int\int\limits_D f\,(x,y)\;dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f\,(x,y)\;dy\right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f\,(x,y)\;dx\right] dy. \qquad (8.1.3 - 1)$$

Παρατήρησεις 8.1.3 - 1

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα (8.1.3 − 1) η τιμή του διπλού ολοκληρώματος (8.1.1 − 3) είναι ανεξάρτητη από τη σειρά ολοκλήρωσης στην (8.1.3 − 1).

ii) Στον τύπο (8.1.3 − 1), όταν γίνεται ολοκλήρωση ως προς μια μεταβλητή, έστω την y, τότε η x θεωρείται **σταθερά**.

Παράδειγμα 8.1.3 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_{D} \left(x^2 y + y^3\right)\, dx\, dy, \quad \text{όταν} \quad D = [0,1] \times [0,2].$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (8.1.3 − 1) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^2 \left(x^2 y + y^3\right) dy\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\, x^2\, y^2 + \frac{1}{4}\, y^4\right]_0^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\, x^2\, 2^2 + \frac{1}{4}\, 2^4 - 0\right) dx = \int_0^1 \left(2\, x^2 + 4\right) dx \\ &= \left[2\, \frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^1 = \frac{14}{3}\,. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά είναι:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left[\int_0^1 \left(x^2 y + y^3\right) dx\right] dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}\, x^3\, y + \frac{1}{2}\, x\, y^3\right]_0^1 dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}\, y + y^3 - 0\right) dy = \left[\frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = \frac{14}{3}\,. \end{aligned}$$

■

Στο εξής θα εφαρμόζεται ο ευκολότερος κατά περίπτωση τύπος στην (8.1.3 − 1).

Παράδειγμα 8.1.3 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D x\, e^{xy}\, dx\, dy, \quad \text{όταν} \quad D = [-1, 2] \times [0, 1].$$

Λύση. Έχουμε

$$I = \int_{-1}^{2} \left[\int_{0}^{1} x\, e^{xy}\, dy \right] dx = \int_{-1}^{2} \left[\int_{0}^{1} \overbrace{(x\, y)_y}^{x=(x\, y)_y}\ e^{xy}\, dy \right] dx$$

επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς y πρέπει να

δημιουργηθεί η παράγωγος $(xy)_y$ της e^{xy},

$\left(\text{μορφή } f'(x) e^{f(x)}\right)$

$$= \int_{-1}^{2} \left[\int_{0}^{1} (x\, y)_y\, e^{xy}\, dy \right] dx = \int_{-1}^{2} e^{xy}\big|_0^1\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(e^x - 1\right) dx = \left[e^x - x\right]_{-1}^{2} = e^2 - e^{-1} - 3.$$

Αν η ολοκλήρωση γίνει πρώτα ως προς x, τότε απαιτείται για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος παραγοντική ολοκλήρωση. ∎

Παράδειγμα 8.1.3 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D \frac{dx\, dy}{(2x + 3y)^2}, \quad \text{όταν} \quad D = [0, 1] \times [1, 2].$$

Λύση. Έχουμε

$$I = \int_{1}^{2} \left[\int_{0}^{1} (2x + 3y)^{-2} dx \right] dy = \int_{1}^{2} \left[\int_{0}^{1} \frac{1}{2}\, (2x + 3y)_x (2x + 3y)^{-2}\, dx \right] dy$$

όμοια επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x πρέπει να

δημιουργηθεί η παράγωγος $(2x+3y)_x$ της $(2x+3y)^{-2}$,

(μορφή $f'(x)\,f^a(x)$)

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}\,\frac{(2x+3y)^{-2+1}}{-2+1}\,dx\right] dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{2}\,(2x+3y)^{-1}\right]_0^1 dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dy}{2+3y} - \left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^2 \frac{dy}{3y} = -\frac{1}{2}\int_1^2 \overbrace{\frac{dy}{2+3y}}^{\frac{1}{3}\ln|2+3y|} + \frac{1}{6}\int_1^2 \overbrace{\frac{dy}{y}}^{\ln|y|}$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\ln 8 - \ln 2 - \ln 5\right).$$

■

II. $D = \left\{(x,y) \in \Re^2 \;:\quad a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\,\right\}$

Τότε (Σχ. 8.1.3 - 1)

$$\int\!\!\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx, \qquad (8.1.3 - 2)$$

δηλαδή γίνεται **πρώτα** η ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή y, που μεταβάλλεται συναρτήσει της x.

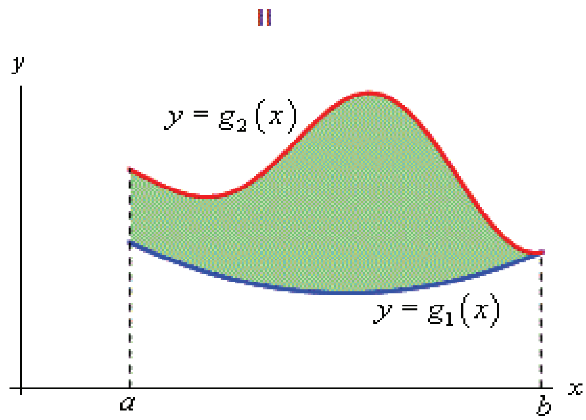
Παράδειγμα 8.1.3 - 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

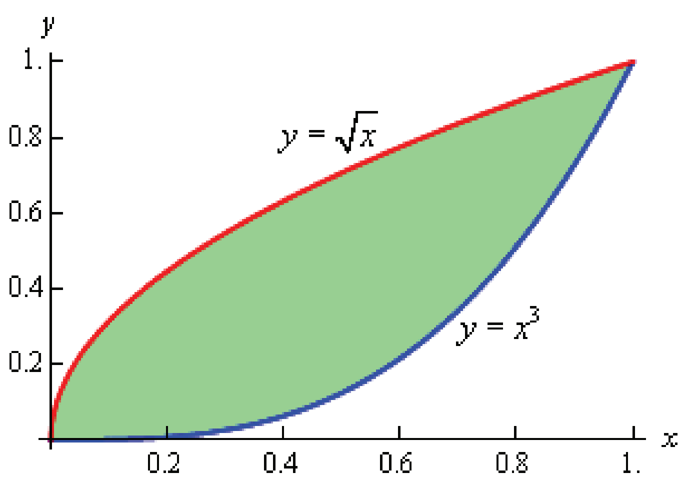
$$I = \int\!\!\int_D \left(4xy - y^3\right) dx\,dy, \quad \text{όταν}$$

$$D = \left\{(x,y) \in \Re^2 \,:\, 0 \le x \le 1, \quad x^3 \le y \le \sqrt{x}\right\} \quad (\text{Σχ. } 8.1.3 - 2).$$

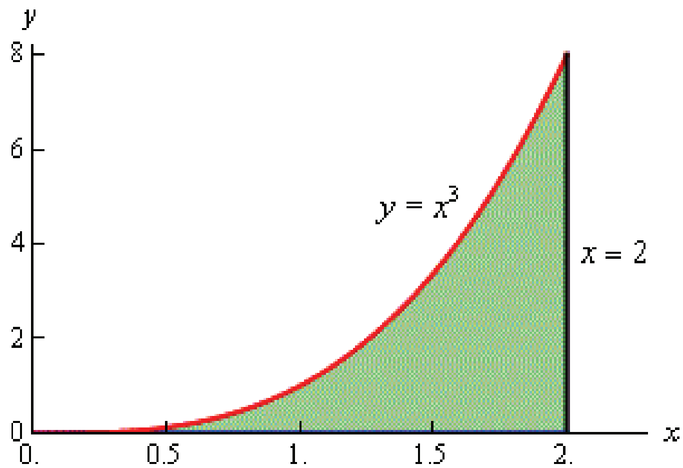
Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(8.1.3 - 2)$ έχουμε



Σχήμα 8.1.3 - 1: το πεδίο ορισμού $D = \{a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ της συνάρτησης $f(x, y)$



Σχήμα 8.1.3 - 2: Παράδειγμα 8.1.3 - 6 με πεδίο ορισμού $D = \{0 \leq x \leq 1, \quad x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$



Σχήμα 8.1.3 - 3: Παράδειγμα 8.1.3 - 5 με πεδίο ορισμού $D = \{0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x^3\}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} \left(4xy - y^3\right) dy \right] dx = \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{y^4}{4}\right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{7}{4}x^2 - 2x^7 + \frac{1}{4}x^{12}\right) dx = \left[\frac{7}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{52}x^{13}\right]_0^1 = \frac{55}{156}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 8.1.3 - 5

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{1+x^4}\, dx\, dy, \quad \text{όταν} \\ D &= \left\{(x,y) \in \Re^2 \,:\, 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x^3\right\} \quad (\Sigma\chi.\ 8.1.3 - 3). \end{aligned}$$

Λύση. Έχουμε

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4}\, dy \right] dx = \int_0^2 \sqrt{1+x^4} \left[\int_0^{x^3} dy \right] dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\;[\,y\,]_0^{x^3}\; dx = \int_0^2 x^3\,\sqrt{1+x^4}\,dx$$

$$= \int_0^2 \overbrace{\frac{1}{4}\left(1+x^4\right)_x}^{x^3} \left(1+x^4\right)^{1/2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{6}\left(1+x^4\right)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(17^{3/2}-1\right) \approx 11.51547.$$

■

III. $D = \{(x,y)\in\Re^2 \;:\quad c \le y \le d, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)\,\}$

Τότε (Σχ. 8.1.3 - 4)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\,\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy, \qquad (8.1.3 - 3)$$

δηλαδή γίνεται **πρώτα** η ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή x, που μεταβάλλεται συναρτήσει της y.

Παράδειγμα 8.1.3 - 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

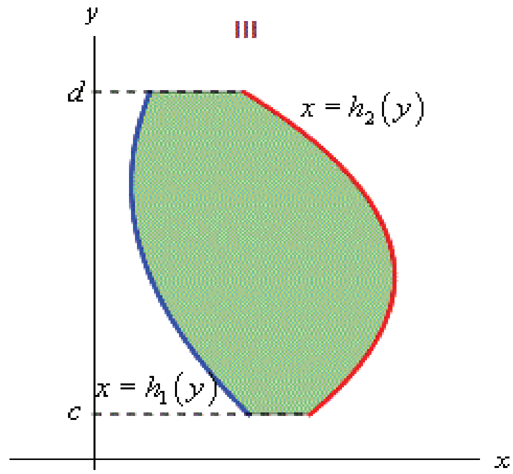
$$I \;=\; \iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D = \left\{(x,y)\in\Re^2 \,:\, 1\le y\le 2, \quad y \le x \le y^3\right\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(8.1.3-3)$ έχουμε

$$I \;=\; \int_1^2 \left[\,\int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}}\,dx\right] dy = \int_1^2 \left[\,\int_y^{y^3} y\left(\frac{x}{y}\right)_x e^{\frac{x}{y}}\,dx\right] dy$$

πρέπει να δημιουργηθεί η παράγωγος $\left(\frac{x}{y}\right)_x$ της $e^{\frac{x}{y}}$

$$= \int_1^2 \left[y\,e^{\frac{x}{y}}\right]_y^{y^3} dy = \int_1^2 \left(y\,e^{y^2} - y\,e^1\right)$$



Σχήμα 8.1.3 - 4: το πεδίο ορισμού $D = \{c \leq x \leq d, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$ της συνάρτησης $f(x, y)$

$$= \left[\frac{1}{2}\, e^{y^2} - \frac{e}{2}\, y^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\, e^4 - 2\, e.$$

■

IV. Γενική περίπτωση: φραγμένη περιοχή του $\Re^2$

Έστω D το πεδίο ορισμού. Τότε γίνεται κατάλληλη διαμέριση του D, έτσι ώστε να προκύψει τελικά μια από τις Περιπτώσεις II ή III.

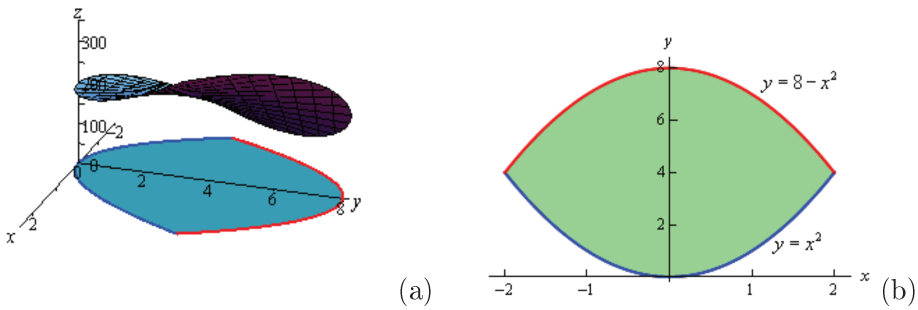
Παράδειγμα 8.1.3 - 7

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D (16xy + 200)\, dx\, dy,$$

όταν D η περιοχή που περιορίζεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = 8 - x^2$ (Σχ. 8.1.3 - 5).

Λύση. Από τις εξισώσεις των καμπυλών προκύπτει $x^2 = 8 - x^2$, οπότε $x = \pm 2$. Επειδή το x πρέπει να ανήκει σε φραγμένο διάστημα, προκύπτει ότι



Σχήμα 8.1.3 - 5: Παράδειγμα 8.1.3 - 7.

$-2 \leq x \leq 2$. Τότε $x^2 \leq 8 - x^2$, οπότε το πεδίο ορισμού D γράφεται ως εξής:

$$D = \left\{ (x, y) \in \Re^2 \;:\; -2 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 8 - x^2 \right\} \quad (\Sigma\chi.\ 8.1.3 - 5\text{b}),$$

δηλαδή είναι η Περίπτωση ΙΙ. Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{2} \left[\int_{x^2}^{8-x^2} (16xy + 200)\ dy \right] dx = \int_{-2}^{2} \left[8\,x\,y^2 + 200\,y \right]_{x^2}^{8-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^{2} \left(-128\,x^3 - 400\,x^2 + 512\,x + 1600 \right)\ dx \\ &= \left[-32\,x^4 - \frac{400}{3}\,x^3 + 256\,x^2 + 1600\,x \right]_{-2}^{2} = \frac{12800}{3}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 8.1.3 - 8

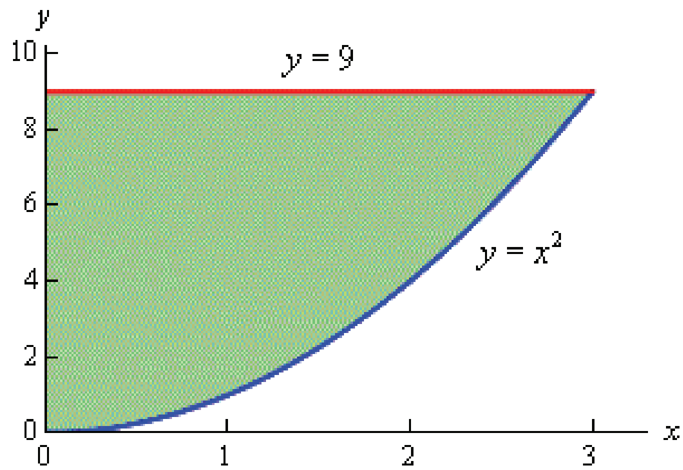
Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int_D x^2\,y\,dx\,dy,$$

όταν D η περιοχή που περιορίζεται από τις καμπύλες $y = 9$ και $y = x^2$ με $x \geq 0$.

Λύση. Από τις εξισώσεις των καμπυλών προκύπτει $x^2 = 9$, οπότε, επειδή $x \geq 0$, είναι $x = 3$. Άρα το πεδίο ορισμού D γράφεται:

$$D = \left\{ (x, y) \in \Re^2 \;:\; 0 \leq x \leq 3, \quad x^2 \leq y \leq 9 \right\} \quad (\Sigma\chi.\ 8.1.3 - 6),$$



Σχήμα 8.1.3 - 6: Παράδειγμα 8.1.3 - 8

δηλαδή είναι όμοια η Περίπτωση ΙΙ. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left[\int_{x^2}^9 x^2 y\, dy \right] dx = \int_0^3 \left. \frac{x^2 y^2}{2} \right|_{x^2}^9 dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{81\, x^2}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \left. \frac{27\, x^3}{2} - \frac{x^7}{14} \right|_0^3 = \frac{1458}{7}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 8.1.3 - 9

Όμοια το

$$I = \iint_D \left(x^2 + y^3 \right) dx\, dy, \quad \text{όταν } D = \left\{ (x,\, y) \in \Re^2 \,:\, y^2 \leq 9x,\; x \leq 3 \right\}.$$

Λύση. Επειδή $y^2 \leq 9x$, πρέπει $x \geq 0$. Είναι όμως γνωστό ότι, αν $x^2 \leq a$ με $a > 0$, τότε $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$, οπότε $-3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}$. Άρα ο τόπος D γράφεται

$$D = \left\{ (x,\, y) \in \Re^2 \,: \quad 0 \leq x \leq 3, \quad -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x} \right\},$$

δηλαδή η Περίπτωση II. Τότε

$$I = \int_0^3 \left[\int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \left(x^2 + y^3\right)\, dy \right] dx = \int_0^3 \left[x^2 y + \frac{y^4}{4} \right]_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} dx$$

$$= 6 \int_0^3 x^{5/2}\, dx = \frac{324\sqrt{3}}{7}\,.$$

■

Παράδειγμα 8.1.3 - 10

Όμοια το

$$I = \iint_D \left(x^4 + y^2\right)\, dx\, dy, \quad \text{όταν } D = \left\{(x,\, y) \in \Re^2 \,:\, y \geq x^2,\, x \geq y^2\right\}.$$

Λύση. Αρχικά, επειδή

- $x \geq y^2$, πρέπει $x \geq 0$, και όμοια από την
- $y \geq x^2$, προκύπτει ότι $y \geq 0$.

Στη συνέχεια εκφράζονται τα όρια του x συναρτήσει του y ως εξής: από την $x^2 \leq y$ προκύπτει ότι $x \leq \sqrt{y}$, ενώ είναι $x \geq y^2$. Άρα

$$y^2 \leq x \leq \sqrt{y}.$$

Για το διάστημα μεταβολών του y από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$y^2 \leq \sqrt{y}, \quad \text{οπότε} \quad y^4 - y \leq 0, \quad \text{δηλαδή } y\left(y^3 - 1\right) \leq 0.$$

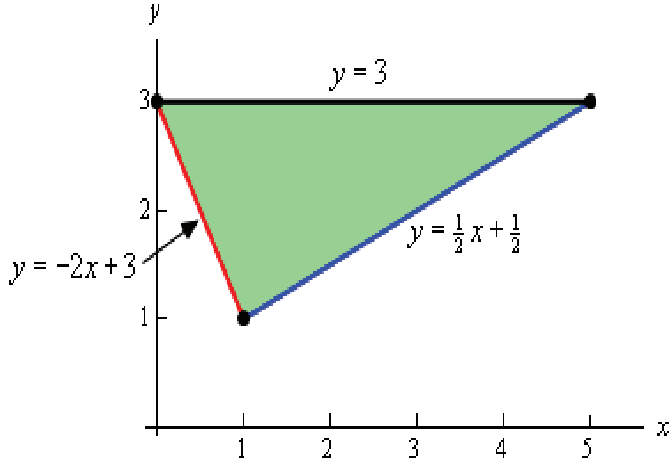
Επειδή $y \geq 0$, πρέπει $y \leq 1$, . Επομένως ο τόπος D γράφεται

$$D = \left\{(x,\, y) \in \Re^2 : \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\right\},$$

δηλαδή η Περίπτωση III. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(8.1.3 - 3)$ έχουμε

$$J = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(x^4 + y^2\right)\, dx \right] dy = \int_0^1 \left(\frac{6}{5}\, y^{5/2} - y^4 - \frac{1}{5}\, y^{10} \right) dy = \frac{48}{385}\,.$$

■



Σχήμα 8.1.3 - 7: Παράδειγμα 8.1.3 - 11

Παράδειγμα 8.1.3 - 11

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \left(6x^2 - 40y\right)\, dx\, dy,$$

όταν D το τρίγωνο με κορυφές $(0,3)$, $(1,1)$ και $(5,3)$ (Σχ. 8.1.3 - 7).

Λύση. Η περιοχή ολοκλήρωσης D, είναι δυνατόν να προκύψει τις εξής δύο περιοχές:[2]

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y): \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -2x+3 \leq y \leq 3\} \\ D_2 &= \left\{(x,y): \quad 1 \leq x \leq 5, \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq y \leq 3\right\} \end{aligned}$$

Τότε σύμφωνα με την Ιδιότητα ΙΙΙ της Παραγράφου 8.1.2 έχουμε

$$I = \iint_{D_1} \left(6x^2 - 40y\right)\, dx\, dy + \iint_{D_2} \left(6x^2 - 40y\right)\, dx\, dy$$

[2]Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\int_{-2x+3}^{3} \left(6x^2 - 40y\right)\, dy \right] dx + \int_1^5 \left[\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{3} \left(6x^2 - 40y\right)\, dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[6x^2 y - 20\, y^2\right]_{-2x+3}^{3} dx + \int_0^1 \left[6x^2 y - 20\, y^2\right]_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{3} dx \\
&= \int_0^1 \left[12x^3 - 180 + 20\,(3-2x)^2\right] dx \\
&\quad + \int_1^5 \left[-3x^3 + 15x^2 - 180 + 5\,(x+1)^2\right] dx \\
&= \ldots = -\frac{935}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Ένας άλλος τρόπος είναι να εκφραστεί το x στις περιοχές D_1 και D_2 συναρτήσει του y ως εξής:

$$
\begin{aligned}
y &= -2x+3, \quad \text{οπότε} \quad & x &= -\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2} \\
y &= \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}, & x &= 2y - 1.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
D = \left\{ (x,y)\ :\quad -\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2} \le x \le 2y - 1, \quad 1 \le y \le 3 \right\},
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \left[\int_{-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}}^{2y-1} \left(6x^2 - 40y\right)\, dx \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[2\,x^3 - 40\,x\,y\right]_{-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}}^{2y-1} dy \\
&= \int_1^3 \left[100y - 100y^2 + 2(2y-1)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2}\right)^3\right] dy
\end{aligned}
$$

$$\left[50y^2 - \frac{100}{3}\,y^3 + \frac{1}{4}(2y-1)^4 + \left(-\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2}\right)^4\right]_1^3$$

$$= \quad -\frac{935}{3}\,.$$

■

8.1.4 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Πολλές φορές για την ευκολία υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\int\!\!\int_D f(x,y)\,dx\,dy$$

απαιτείται να γίνει μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε άλλης μορφής συντεταγμένες. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων, οι γενικότερες δυνατές είναι οι καμπυλόγραμμες (curvilinear coordinates)[3], που ορίζονται στη συνέχεια.

Ορισμός 8.1.4 - 1 (καμπυλόγραμμες συντεταγμένες). *Ο μετασχηματισμός σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες έχει τη μορφή*

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad \textit{όταν} \quad (x,y) \in D \subseteq \Re^2. \tag{8.1.4 - 1}$$

Αν οι συναρτήσεις $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ ορίζονται για κάθε $(u,v) \in \tilde{D} \subseteq \Re^2$ και υπάρχουν οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι των x, y ως προς u και v και είναι συνεχείς συναρτήσεις, ενώ για την ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού $(8.1.4-1)$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \tag{8.1.4 - 2}$$

[3] Βλέπε: *http : //en.wikipedia.org/wiki/Curvilinear_coordinates*

είναι $J(u,v) > 0$ ή $J(u,v) < 0$, τότε ο μετασχηματισμός του τόπου D μέσω των σχέσεων $(8.1.4-1)$ στον τόπο $\tilde{D}$ είναι αμφιμονοσήμαντος και εφόσον το ολοκλήρωμα $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ υπάρχει, θα ισχύει

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{\tilde{D}} F(u,v)\;|J(u,v)|\;du\,dv. \qquad (8.1.4 \text{ - } 3)$$

Σημείωση 8.1.4 - 1

Είναι ήδη γνωστή στον αναγνώστη η μέθοδος της αντικατάστασης για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $\int f(x)\,dx$. Τότε, αν $u = g(x)$, πρέπει να γίνει αντικατάσταση της u στην f αφενός και αφετέρου αντικατάσταση του dx με το du, όπως αυτό εξηγείται παρακάτω στον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int e^{3x}\,dx$. Τότε, έστω

$$3x = u \text{ ή } \quad x = \frac{u}{3}, \quad \text{οπότε} \quad dx = \left(\frac{u}{3}\right)'du = \frac{1}{3}\,du = J(u)\,du. \qquad (1)$$

Άρα

$$\int e^{3x}dx = \int f(x)\,dx = \int e^u\,\frac{1}{3}\,du = \int F(u)\,J(u)\,du = \ldots = \frac{1}{3}\,e^{3x} + c. \quad (2)$$

Τότε η $(8.1.4-2)$ είναι η αντίστοιχη της $J(u)$ στην (1) και η $(8.1.4-3)$ της $\int F(u)\,J(u)\,du$ στην (2).

Οι κυριότεροι καμπυλόγραμμοι μετασχηματισμοί, που συνήθως χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές, δίνονται στη συνέχεια.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός 8.1.4 - 2 (γραμμικός μετασχηματισμός). *Ένας γραμμικός μετασχηματισμός (linear transformation) έχει γενικά τη μορφή*

$$\mathrm{L_T}: \quad x = au + bv \quad \textit{και} \quad y = cu + dv, \qquad (8.1.4 \text{ - } 4)$$

όταν $a,\ b,\ c,\ d \in \Re$.

Σύμφωνα με την $(8.1.4-2)$ τότε είναι

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc. \qquad (8.1.4 \text{ - } 5)$$

Αν $ad - bc \neq 0$, τότε η $(8.1.4 - 4)$ αντιστρέφεται, οπότε

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y)\, dx\, dy = |ad - bc| \iint\limits_{\tilde{D}} F(u, v)\, du\, dv. \tag{8.1.4 - 6}$$

Ο μετασχηματισμός $(8.1.4 - 4)$ ανήκει στην κατηγορία των λεγόμενων **ομογραφικών μετασχηματισμών** (endomorphism ή homomorphism), δηλαδή έχει την ιδιότητα να διατηρεί τα σχήματα, δηλαδή μετασχηματίζει ευθείες σε ευθείες, κ.λπ.

Παράδειγμα 8.1.4 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_{D} e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx\, dy,$$

όταν D το τρίγωνο με πλευρές τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x + y - 2 = 0$.

Λύση. Έστω

$$u = y - x \quad \text{και} \quad v = y + x.$$

Λύνοντας ως προς x και y προκύπτει ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός $(8.1.4-4)$ για την περίπτωση αυτή είναι

$$\mathrm{L_T}: \quad x = \frac{v-u}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{v+u}{2}\,.$$

Τότε σύμφωνα με την $(8.1.4 - 2)$ είναι

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου από τις συντεταγμένες $x,\, y$ στις $u,\, v$ ως εξής:

$$\begin{array}{llcll}
\text{ευθεία} \quad x = 0 & \mathrm{L_T}: & \begin{array}{rcl} u &=& y \\ v &=& y \end{array} & \text{οπότε} \quad u = v & \text{ευθεία} \quad v - u = 0 \\[2ex]
\phantom{\text{ευθεία}} \quad y = 0 & & \begin{array}{rcl} u &=& -x \\ v &=& x \end{array} & \phantom{\text{οπότε}} \quad u = -v & \phantom{\text{ευθεία}} \quad v + u = 0 \\[2ex]
\phantom{\text{ευθεία}} \quad x + y = 2 & & & \phantom{\text{οπότε}} \quad v = 2 & \phantom{\text{ευθεία}} \quad v - 2 = 0.
\end{array}$$

Άρα από τον τύπο $(8.1.4-6)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \left|-\frac{1}{2}\right| \int_0^2 \left[\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du\right] dv = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\int_{-v}^{v} v \left(\frac{u}{v}\right)_u e^{\frac{u}{v}}\, du\right] dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 v \left[e^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v} dv = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\int_0^2 v\, dv = e - \frac{1}{e}\,. \end{aligned}$$

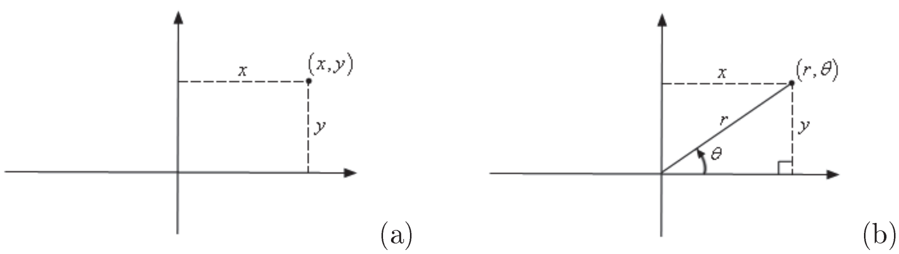
■

Πολικές συντεταγμένες

Όπως είναι γνωστό οι πολικές (Σχ. 8.1.4 - 1b) συντεταγμένες (r,θ) συνδέονται με τις καρτεσιανές (Σχ. 8.1.4 - 1a) συντεταγμένες (x,y) με τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta, \qquad \text{όταν } r \geq 0 \text{ και } 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (8.1.4 - 7)$$

Ο μετασχηματισμός $(8.1.4-7)$ είναι αμφιμονοσήμαντος με την έννοια ότι



Σχήμα 8.1.4 - 1: (α) Καρτεσιανές και (b) πολικές συντεταγμένες

σε κάθε σημείο $(x,\, y) \in \Re^2 - \{(0,\, 0)\}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο $(r,\, \theta) \in [0,\, +\infty)\times[0,\, 2\pi)$ και αντίστροφα, ενώ για την ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού είναι

$$J(r,\,\theta) = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0.$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(8.1.4-3)$ το ολοκλήρωμα $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\int\int_{D} f(x,\, y)\, dx\, dy = \int\int_{\tilde{D}} F(r,\, \theta)\, r\, dr\, d\theta. \qquad (8.1.4 - 8)$$

Παράδειγμα 8.1.4 - 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int_{D} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r = 1$.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες σύμφωνα με τις σχέσεις $(8.1.4 - 7)$ έχουμε

$$f(x,\, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2} = F(r,\, \theta),$$

ενώ είναι $r \in [0, 1]$ και επειδή πρόκειται για το άνω ημικύκλιο $\theta \in [0, \pi]$. Άρα σύμφωνα με την $(8.1.4 - 8)$ είναι

$$I = \int_{0}^{\pi} \left[\int_{0}^{1} r\, \sqrt{1 - r^2}\, dr \right] d\theta = -\frac{1}{3} \int_{0}^{\pi} \left(1 - r^2\right)^{3/2} \Big|_{0}^{1} d\theta = \frac{1}{3} \int_{0}^{\pi} d\theta = \frac{\pi}{3}\,.$$

■

Παράδειγμα 8.1.4 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int_{D} 2xy\, dx\, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι ο κυκλικός τομέας του 1ου τεταρτημορίου μεταξύ των κύκλων κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνων 2 και 5 αντίστοιχα.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$f(x,\, y) = 2\, x\, y = 2\, r^2 \sin\theta \cos\theta = r^2 \sin 2\theta = F(r,\, \theta)$$

όπου $r \in [2, 5]$ και επειδή πρόκειται για το 1ο τεταρτημόριο είναι $\theta \in [0, \pi/2]$. Άρα σύμφωνα με την $(8.1.4-8)$ είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_2^5 r \left(r^2 \sin 2\theta \right) \, dr \right] \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_2^5 \, d\theta \\ &= \frac{609}{4} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = -\frac{609}{4} \, \frac{1}{2} \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{609}{4} \, . \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 8.1.4 - 4

Όμοια το

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2} \, dx \, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$f(x, y) = e^{r^2} = F(r, \, \theta)$$

όπου $r \in [0, 1]$ και $\theta \in [0, 2\,\pi]$. Άρα σύμφωνα με την $(8.1.4-8)$ είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r \, e^{r^2} \, dr \right] \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(r^2 \right)_r \, e^{r^2} \, dr \right] \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, \left[e^{r^2} \right]_0^1 \, d\theta = \frac{1}{2} \, (e-1) \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \, (e-1) \, . \end{aligned}$$

■

8.2 Τριπλά ολοκληρώματα

8.2.1 Ορισμός

Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z)\,|\,D$ με $D = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \subseteq \Re^3$ που είναι φραγμένη για κάθε $(x,y,z) \in D$. Όπως και στην περίπτωση του διπλού ολοκληρώματος (Παράγραφος 8.1.1) ο τόπος D υποδιαιρείται σε επί μέρους ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, που βρίσκονται στο εσωτερικό του τόπου D, υποδιαιρώντας τα διαστήματα $[a_i,b_i]$; $i = 1,\,2,\,3$ με τα σημεία $x_i,\,y_j,\,z_k$; $i = 1,\,2,\,\ldots,\,n$; $j = 1,\,2,\,\ldots,\,m$ και $k = 1,\,2,\,\ldots,\,p$. Αν $\Delta A = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ ο όγκος του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου της παραπάνω διαμέρισης και $f\left(x_i^*, y_j^*, z_k^*\right)$ το αντίστοιχο ύψος του, τότε ο όγκος V, που γεωμετρικά ισούται το **τριπλό** ολοκλήρωμα

$$V = \int\int\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dx \qquad (8.2.1 - 1)$$

προσεγγίζεται ως εξής:

$$V \approx f\left(x_1^*, y_1^*, z_1^*\right)\,\Delta A + \ldots + f\left(x_n^*, y_m^*, z_p^*\right)\,\Delta A. \qquad (8.2.1 - 2)$$

Όμοια με την Παρατήρηση 8.1.1 - 1 αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι, όταν η διαγώνιος των παραπάνω παραλληλεπιπέδων τείνει στο μηδέν καθώς καθώς τα $n,\,m\;p \to +\infty$, το άθροισμα $(8.2.1 - 2)$ συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω I, που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων (x_i, y_j, z_k). Σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 8.2.1 - 1 (τριπλού ολοκληρώματος). *Ορίζεται σαν τριπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)$ στο $D = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ η οριακή τιμή*

$$\begin{aligned} I &= \int\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \lim_{n,\,m\;p \to +\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f\left(x_i^*, y_j^*, y_k^*\right), \Delta A, \qquad (8.2.1 - 3) \end{aligned}$$

εφόσον υπάρχει.

8.2.2 Ιδιότητες

Οι σημαντικότερες είναι:

I. **Γραμμική**

$$\iiint\limits_D [k\, f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z)]\, dx\, dy$$

$$= k \iiint\limits_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \lambda \iiint\limits_D g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

όταν $k,\ \lambda \in \Re$.

II. **Μέσης τιμής**

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = f\left(x_0, y_0, z_0\right)\, A$$

όπου A ο όγκος του τόπου D.

III. Αν η περιοχή D αποτελείται από τις χωριστές περιοχές D_1 και D_2, δηλαδή $D = D_1 \cup D_2$, τότε

$$\begin{aligned}\iiint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy\, dz \quad &= \quad \iiint\limits_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy\, dz \\ &\quad + \iiint\limits_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

8.2.3 Μέθοδοι υπολογισμού

Ο υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος $(8.2.1-3)$ εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου ορισμού.

Στη συνέχεια εξετάζεται μόνον οι παρακάτω δύο περιπτώσεις.[4]

I. $D = \left\{\, (x,y,z) \in \Re^3 : \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad a_2 \leq y \leq b_2, \quad a_3 \leq z \leq b_3 \right\}$

Τότε ο υπολογισμός γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

[4] Ο αναγνώστης για εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 8.2.3 - 1. *Αν η συνάρτηση* $f(x,y,z)\,|\,D$ *με* $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]\subseteq\Re^3$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* D, *τότε*

$$\begin{aligned}\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{a_1}^{b_1}\left\{\int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx\\ &= \int_{a_2}^{b_2}\left\{\int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right]dz\right\}dy\\ &= \int_{a_3}^{b_3}\left\{\int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\right]dx\right\}dz.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα η τιμή του τριπλού ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από τη σειρά ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 8.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int\limits_D 8\,xyz\,dx\,dy\,dz,$$

όταν

$$D=\left\{(x,y,z)\in\Re^3\quad 2\le x\le 3,\quad 1\le y\le 2,\quad 0\le z\le 1\right\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(8.2.3-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}I &= \iiint\limits_D 8\,xyz\,dx\,dy\,dz=\int_1^2\left\{\int_2^3\left[\int_0^1 8\,xyz\,dz\right]dx\right\}dy\\ &= \int_1^2\left\{\int_2^3\left[4\,xyz^2\right]_0^1 dx\right\}dy=\int_1^2\left[\int_2^3 4\,xy\,dx\right]dy\\ &= \int_1^2\left[2\,x^2y\right]_2^3 dx=\int_1^2 10\,y\,dy=15.\end{aligned}$$

■

II.

$$D=\{(x,y,z)\in\Re^3:\ \ a_1\le x\le b_1\,,\qquad \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$

Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (8.2.3\text{ - }1)\\ &= \int\limits_{a_1}^{b_1}\left\{\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx. \end{aligned}$$

δηλαδή η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα από τη μεταβλητή, που από τις άλλες δύο μεταβλητές (Προφανώς υπάρχουν άλλοι δύο τύποι παράστασης του τόπου D στην κατηγορία αυτή).

Παράδειγμα 8.2.3 - 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int\limits_D x^3y^2z\,dx\,dy\,dz,$$

όταν

$$D=\Big\{(x,y,z)\in\Re^3\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le x,\quad 0\le z\le xy\Big\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(8.2.3-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_D x^3y^2z\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^1\left\{\int\limits_0^x\left[\int\limits_0^{xy} x^3y^2z\,dz\right]dy\right\}dx\\ &= \int\limits_0^1\left\{\int\limits_0^x\left[\frac{1}{2}x^3y^2z^2\right]_0^{xy}dy\right\}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^x x^5y^4\,dy\right]dx\\ &= \frac{1}{10}\int\limits_0^1 x^{10}\,dx=\frac{1}{110}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 8.2.3 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \int\limits_D \left(x^2 + y^2 - z^2\right)\, dx\, dy\, dz,$$

όταν

$$D = \left\{(x, y, z) \in \Re^3 : \quad x + y + z \leq 1, \quad x,\, y,\, z \geq 0\right\}.$$

Λύση. Όμοια με τον τύπο $(8.2.3 - 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_D \left(x^2 + y^2 - z^2\right) dx\, dy\, dz \\ &= \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^{1-x} \left[\int\limits_0^{1-x-y} \left(x^2 + y^2 - z^2\right) dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^{1-x} \left[x^2 z + y^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^{1-x-y} dy \right\} dx \\ &= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{1}{60}\,. \end{aligned}$$

■

[5]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων