Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ενότητα 9: Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Αθανάσιος Μπράτσος

Τμήμα Μηχανικών Βιοϊατρικής Τεχνολογίας ΤΕ

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μάθημα 9

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

9.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού

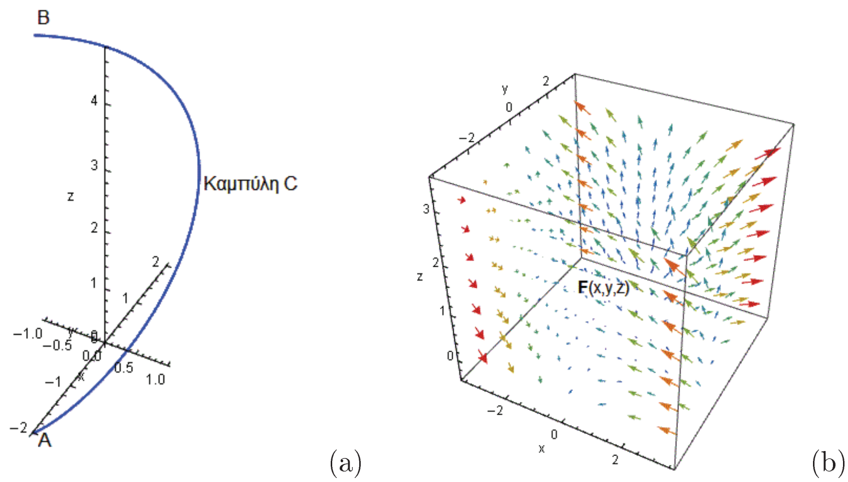
9.1.1 Ορισμός

Στο μάθημα αυτό γίνεται μια γενίκευση της μέχρι τώρα γνωστής έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, σύμφωνα με την οποία το διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha, \beta]$ αντικαθίσταται από μια καμπύλη, έστω C (Σχ. 9.1 - 1a), με πεπερασμένο μήκος, που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση[1] $\mathbf{r}(t)$, ενώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$ από ένα διανυσματικό πεδίο, που περιγράφεται επίσης από μία διανυσματική συνάρτηση[2], έστω $\mathbf{F}$ (Σχ. 9.1 - 1b), που ορίζεται επί της C (Σχ. 9.1 - 2c), δηλαδή τα σημεία (x, y), αντίστοιχα (x, y, z) στα οποία ορίζεται η $\mathbf{F}$, είναι επίσης σημεία της C (Σχ. 9.1 - 2d). Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται τότε **επικαμπύλια** και η καμπύλη C **δρόμος ολοκλήρωσης**.

Δίνεται στη συνέχεια ο ορισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

[1] Βλέπε: Μάθημα 5. Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, Παράγραφος 5.2: παραμετρική παράσταση καμπυλών.

[2] Βλέπε: Μάθημα 7. Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός, Παράγραφος 7.2: Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία.



Σχήμα 9.1 - 1: (a) η καμπύλη C και (b) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$

Ορισμός 9.1 - 1 (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα). *Έστω C μία καμπύλη με πεπερασμένο μήκος που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$ και ένα διανυσματικό πεδίο, έστω $\mathbf{F}$, που είναι ορισμένο επί της C (Σχ. 9.1 - 2). Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\mathbf{F}$ επί της C, συμβολίζεται με $\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$ και ορίζεται από τον τύπο*

$$\int\limits_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(t)\right] \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt, \qquad (9.1 - 1)$$

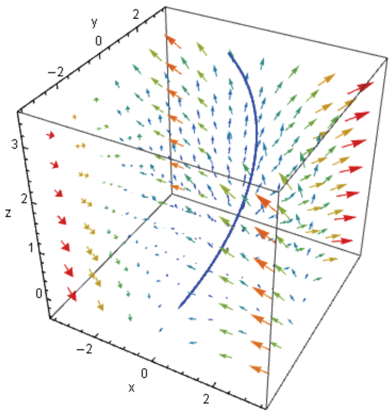
όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Αν η καμπύλη C είναι **κλειστή**, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της C συμβολίζεται με

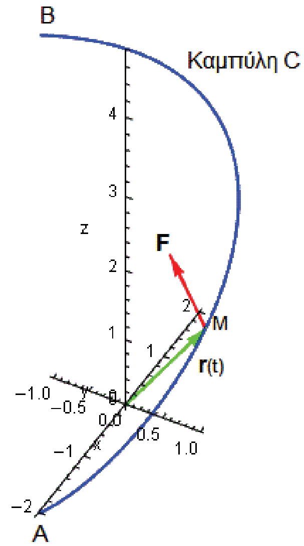
$$\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$$

όπου στο σύμβολο της ολοκλήρωσης τίθεται πολλές φορές και βέλος για να καθοριστεί η φορά διαγραφής της C.

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν πολλές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, όπως στο έργο δυνάμεων, τη δυναμική ενέργεια, τη ροή θερμότητας, την εντροπία, τη ροή ρευστών κ.λπ.



(c)



(d)

Σχήμα 9.1 - 2: (a) το διανυσματικό πεδίο **F** με την καμπύλη C και (d) το πεδίο **F** επί της C, δηλαδή, όταν τα σημεία (x, y, z) στα οποία ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση **F**, είναι επίσης σημεία της C

9.1.2 Τύπος υπολογισμού

Έστω ότι η διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει το πεδίο **F**, εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων του στο χώρο των 3-διαστάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y,z) &= P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k} \\ &= \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), \rangle \qquad (9.1 - 2)\end{aligned}$$

ενώ η διανυσματική συνάρτηση[3] **r** ως

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \qquad (9.1 - 3)$$

[3]Μάθημα 5: Διάνυσμα θέσης ή διανυσματική ακτίνα τύπος $(5.1 - 3)$.

Σύμφωνα με τις $(9.1-2)$ και $(9.1-3)$, λαμβάνοντας υπ' όψιν το γνωστό τύπο υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου[4], το ολοκλήρωμα $(9.1-1)$ γράφεται

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}(t)\cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k})\cdot(dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k}) \\ &= P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \end{aligned} \tag{9.1 - 4}$$

Η αντίστοιχη έκφραση της $(9.1-4)$, που θα χρησιμοποιηθεί στην Παράγραφο 9.4 στο χώρο των 2-διαστάσεων, είναι

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}(t)\cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}) \\ &= P\,dx+Q\,dy. \end{aligned} \tag{9.1 - 5}$$

Έστω τώρα ότι η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$, που περιγράφει παραμετρικά την καμπύλη C, είναι της μορφής[5]

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} \\ &= \langle x(t),y(t),z(t)\rangle\,, \quad \text{όταν} \quad t\in[\alpha,\beta]. \end{aligned} \tag{9.1 - 6}$$

Αντικαθιστώντας σύμφωνα με την $(9.1-6)$ στην $(9.1-2)$ τα x, y, z με τις αντίστοιχες παραμετρικές μορφές τους $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t)=\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t)) &= \langle P(x(t),y(t),z(t)),Q(x(t),y(t),z(t)), \\ &= R(x(t),y(t),z(t))\rangle\,. \end{aligned} \tag{9.1 - 7}$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $t\in[\alpha,\beta]$, από την $(9.1-6)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k} \\ &= \langle x'(t),y'(t),z'(t)\rangle\,, \quad \text{όταν} \quad t\in[\alpha,\beta]. \end{aligned} \tag{9.1 - 8}$$

[4] Αν $\mathbf{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ και $\mathbf{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$, τότε το **εσωτερικό γινόμενο** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ισούται με

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1\,b_1+a_2\,b_2+a_3\,b_3.$$

[5] Βλέπε: Μάθημα 5. Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, Παράγραφος 5.2: παραμετρική παράσταση καμπυλών, τύπος (5.2-4).

Σύμφωνα με τις $(9.1-7)$ και $(9.1-8)$, λαμβάνοντας υπ' όψιν και το γνωστό τύπο υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου[6], η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην $(9.1-1)$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) &= P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t),\\ &\quad +R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t).\end{aligned} \tag{9.1 - 9}$$

Τότε από την $(9.1-9)$ προκύπτει ο παρακάτω τύπος υπολογισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $(9.1-1)$ για το χώρο των 3-διαστάσεων

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \left[Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right]\,dt, \tag{9.1 - 10}$$

ενώ ο αντίστοιχος τύπος για το χώρο των 2-διαστάσεων είναι

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \left[Px'(t)+Qy'(t)\right]\,dt. \tag{9.1 - 11}$$

Κρίνεται αναγκαίο στο σημείο αυτό να γίνει υπενθύμιση των παρακάτω χρήσιμων για τα επόμενα παραμετρικών παραστάσεων.

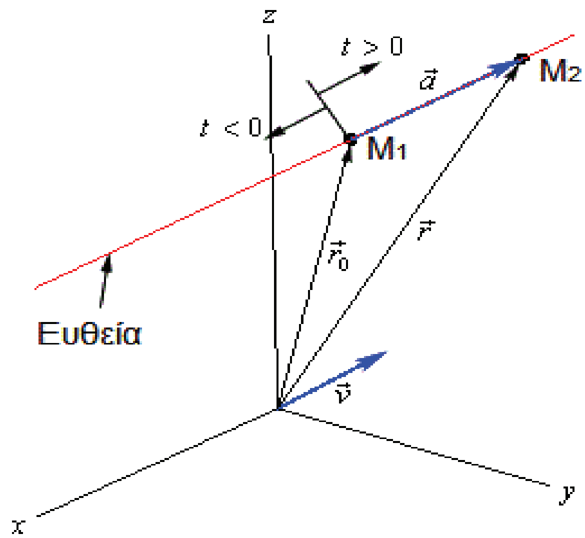
Ευθεία

Οι παραμετρικές μορφές των $x(t)$, $y(t)$, αντίστοιχα $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ της παραμετρικής εξίσωσης του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 για την περίπτωση του χώρου των

- 2-διαστάσεων, όταν $M_1\,(x_1,y_1)$ η αρχή και $M_2\,(x_2,y_2)$ το τέλος, είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2+(1-t)x_1,\\ y(t) &= ty_2+(1-t)y_1 \quad \text{με} \quad t\in[0,1].\end{aligned} \tag{9.1 - 12}$$

[6] Βλέπε παραπάνω υποσημείωση.



Σχήμα 9.1 - 3: παραμετρική παράσταση ευθείας

- 3-διαστάσεων, όταν $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ - αρχή και $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ - τέλος (Σχ. 9.1 - 3), είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1, \\ z(t) &= tz_2 + (1-t)z_1 \quad \text{με} \quad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{9.1 - 13}$$

Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε, αν R η ακτίνα, η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

οπότε παραμετρικές μορφές των $x(t)$ και $y(t)$ είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos t \quad \text{και} \\ y(t) &= R\sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{9.1 - 14}$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α, β), τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= (\alpha + R\cos t) \quad \text{και} \\ y(t) &= (\beta + R\sin t) \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{9.1 - 15}$$

Σημείωση 9.1 - 1

Σε κάθε άλλη διαφορετική των παραπάνω περίπτωση η παραμετρική μορφή της C θα δίνεται.

Παράδειγμα 9.1 - 1

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz + y)\mathbf{k}$$

και C το ευθύγραμμο τμήμα AB με αρχή το $A(1, -1, 2)$ και τέλος το $B(3, 1, -1)$.
Λύση. Έστω

$$A: \quad x_1 = 1, \quad y_1 = -1, \quad z_1 = 2. \quad B: \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = -1,$$

Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB σύμφωνα με τον τύπο $(9.1 - 13)$ εκφράζεται παραμετρικά ως εξής:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \cdot 3 + (1-t) \cdot 1 = 2t + 1 && (1) \\ y(t) &= t \cdot 1 + (1-t) \cdot (-1) = 2t - 1 && (2) \\ z(t) &= t \cdot (-1) + (1-t) \cdot 2 = -3t + 2, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 1]. && (3) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2 && (4) \\ y'(t) &= 2 && (5) \\ z'(t) &= -3. && (6) \end{aligned}$$

Από το διανυσματικό πεδίο προκύπτει ότι

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz+y)\mathbf{k} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}.$$

Άρα σύμφωνα με τις (1)-(3) έχουμε

$$\begin{aligned} P &= x = 2t+1, \\ Q &= -y = -2t+1, \\ R &= xz+y = (2t+1)(-3t+2)+2t-1 = -6t^2+3t+1. \end{aligned}$$

Τότε από τον τύπο $(9.1-10)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{AB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right] dt, \\ &= \int_0^1 \left[(2t+1)\cdot \overbrace{2}^{(4)} + (-2t+1)\cdot \overbrace{2}^{(5)} + \left(-6t^2+3t+1\right)\cdot \overbrace{(-3)}^{(6)}\right] dt \\ &= t - \frac{9t^2}{2} + 6t^3 \bigg|_0^1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 9.1 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = (x-y)\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j}$$

και C η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο $(0,0)$, όταν η περιφέρεια διαγράφεται δεξιόστροφα, δηλαδή αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(9.1-14)$ η περιφέρεια έχει την παρακάτω παραμετρική παράσταση $(R=1)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \quad \text{και} && (1) \\ y(t) &= \sin t \quad \text{με} \quad t\in[0,2\pi), && (2) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sin t \quad \text{και} && (3) \\ y'(t) &= \cos t. && (4) \end{aligned}$$

Το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$\mathbf{F} = (x-y)\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j} = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}.$$

Άρα σύμφωνα με τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P &= x - y = \cos t - \sin t, \\ Q &= x + y = \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

Τότε από τον τύπο (9.1 − 11) έχουμε

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left[P x'(t) + Q y'(t)\right]\, d\,t \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(\cos t - \sin t)\cdot \overbrace{(-\sin t)}^{(3)} + (\cos t + \sin t)\cdot \overbrace{\cos t}^{(4)}\right] d\,t \\ &= \int_0^{2\pi} d\,t = 2\pi. \end{aligned}$$

■

9.2 Ιδιότητες επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των ήδη γνωστών ολοκληρωμάτων. Οι βασικότερες από αυτές είναι:

i) $\displaystyle\int_C (\varkappa\mathbf{F} + \lambda\mathbf{G})\cdot d\mathbf{r} = \varkappa\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \lambda\int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r};\quad \varkappa,\,\lambda\in\Re$ (**γραμμική**),

ii) $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$
που είναι γνωστή σαν η **προσθετική ιδιότητα** της C, όπου C_1 και C_2 είναι δύο τόξα της C, τέτοια ώστε το άθροισμά τους να είναι η C και να διαγράφονται από το ίδιο διάνυσμα $\mathbf{r}(t)$ που διαγράφεται και η C,

iii) $\displaystyle\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$
δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παραμένει αμετάβλητο σε μία αλλαγή

της παραμέτρου, που διατηρεί τον προσανατολισμό της C και αλλάζει πρόσημο, όταν η αλλαγή αυτή αντιστρέψει τον προσανατολισμό. Η ιδιότητα αυτή εκφράζει την ανεξαρτησία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την εκλογή της παραμέτρου.

9.3 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και κλίσης

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$ δεν είναι γενικά ανεξάρτητο από το δρόμο της ολοκλήρωσης C, δηλαδή, αν υποτεθεί ότι η C έχει αρχή το σημείο A και τέλος το B, τότε η τιμή του, όταν ο δρόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, είναι διαφορετική εκείνης που ο δρόμος είναι μια οποιαδήποτε άλλη καμπύλη με αρχή το A και τέλος το B.

Τα παραπάνω δεν ισχύουν και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα του τρόπου διαγραφής της C από το A στο B, μόνον όταν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρούμενο[7]. Σχετικά αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.[8]

Θεώρημα 9.3 - 1 (ανεξαρτησίας επικαμπύλιου ολοκληρώματος). *Έστω $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, όπου φ βαθμωτή συνάρτηση της οποίας υπάρχουν τουλάχιστον οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}, \tag{9.3 - 1}$$

όταν C η καμπύλη από το σημείο $A\,(x_1, y_1, z_1)$ στο $B\,(x_2, y_2, z_2)$ του πεδίου, είναι ανεξάρτητο από το δρόμο της ολοκλήρωσης και αντίστροφα, αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (9.3−1) είναι ανεξάρτητο από το δρόμο της ολοκλήρωσης, τότε υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση, έστω φ, έτσι ώστε $\mathbf{F} = \nabla\varphi$.

Παράδειγμα 9.3 - 1

Έστω το διανυσματικό πεδίο (Σχ. 9.3 - 1a)

$$\mathbf{F} = 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,y^2\right)\,\mathbf{j}.$$

Δείξτε ότι

---

[7] Βλέπε Μάθημα 7 Παράγραφος 7.4.1.

[8] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.

i) το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρούμενο.

ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}$, όταν C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(0,-1)$ στο $B(1,2)$.

Λύση.

i) Αρκεί να δειχθεί[9] ότι $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$. Αν

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= 2\,x\,y\,\mathbf{i}+\left(x^2+2\,y^2\right)\mathbf{j}+0\,\mathbf{k}\\ &\qquad \text{(υποχρεωτικά η συνιστώσα που λείπει ίση με μηδέν)}\\ &= P(x,y,z)\,\mathbf{i}+Q(x,y,z)\,\mathbf{j}+R(x,y,z)\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

τότε

$$P=2\,x\,y,\quad Q=x^2+2\,y^2\quad \text{και}\quad R=0. \tag{1}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2\,x\,y & x^2+2\,y^2 & 0\end{vmatrix}\\ &= (0-Q_z)\,\mathbf{i}+(P_z-0)\,\mathbf{j}+(Q_x-P_y)\,\mathbf{k}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

Τότε από το Θεώρημα 7.7-1[10] προκύπτει ότι το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρούμενο, δηλαδή $\mathbf{F}=\nabla\varphi$, όπου φ το δυναμικό.

ii) Σύμφωνα με την (i), αν

$$\mathbf{F}=P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}=\nabla\varphi=\varphi_x\,\mathbf{i}+\varphi_y\,\mathbf{j}+\varphi_z\,\mathbf{k},$$

τότε από την (1) προκύπτει ότι

$$\varphi_x=P=2\,x\,y\quad \varphi_y=Q=x^2+3\,y^2\quad \text{και}\quad \varphi_z=R=0.$$

[9]Βλέπε Μάθημα 7, Θεώρημα 7.7-1: *Ένα διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, όταν είναι συντηρούμενο και αντίστροφα.*

[10]Βλέπε υποσημείωση 9.

Για να προσδιοριστεί το δυναμικό φ, πρέπει να ολοκληρωθούν οι παραπάνω σχέσεις. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του ολικού διαφορικού της φ ως εξής:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy \\ &= 2\,x\,y\,dx + \left(x^2 + 3\,y^2\right)\,dy \\ &= d_x\left(x^2 y\right) + d_y\left(x^2 y + y^3\right) \\ &= d_x(x^2 y + \overbrace{y^3}^{d_x(y^3)=0}) + d_y\left(x^2 y + y^3\right) \\ &= d\left(x^2 y + y^3\right). \end{aligned}$$

Άρα το δυναμικό του πεδίου είναι

$$\phi(x,y) = x^2 y + y^3 + c,$$

όταν c σταθερά (Σχ. 9.3 - 1b), οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3 - 1 έχουμε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(0,-1)}^{B(1,2)} d\,\varphi = \varphi\,(1,2) - \varphi\,(0,-1) = 11.$$

■

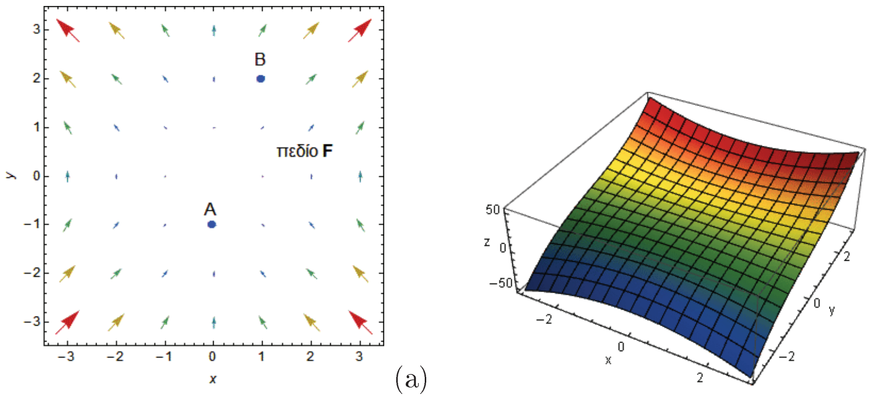
Παράδειγμα 9.3 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = 3\,x^2 z\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\,\mathbf{k}.$$

και C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(-1,1,2)$ στο $B(1,2,4)$.
Λύση. Αν

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 3\,x^2 z\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\,\mathbf{k} \\ &= P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$



(a) (b)

Σχήμα 9.3 - 1: (a) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,y^2\right)\mathbf{j}$ και τα σημεία $A(0,-1)$, $B(1,2)$ και (b) το δυναμικό $\phi(x,y) = x^2 y + y^3$.

τότε

$$P = 3\,x^2 z, \quad Q = z^2 \quad \text{και} \quad R = x^3 + 2\,y\,z. \tag{2}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3\,x^2 z & z^2 & x^3 + 2\,y\,z \end{vmatrix} \\ &= \left(R_y - Q_z\right)\mathbf{i} + \left(P_z - R_x\right)\mathbf{j} + \left(Q_x - P_y\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Άρα όμοια σύμφωνα με το γνωστό Θεώρημα 7.7-1 το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρούμενο, οπότε, αν

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} = \nabla\varphi = \varphi_x\,\mathbf{i} + \varphi_y\,\mathbf{j} + \varphi_z\,\mathbf{k},$$

τότε σύμφωνα με τη (2) είναι

$$\varphi_x = 3\,x^2 z, \quad \varphi_y = z^2 \quad \text{και} \quad \varphi_z = x^3 + 2\,y\,z.$$

Για να προσδιοριστεί το δυναμικό φ, πρέπει να ολοκληρωθούν οι παραπάνω σχέσεις. Τότε από το ολικό διαφορικό της φ έχουμε

$$d\varphi = \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\,x^2 z\, dx + z^2\, dy + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\, dz \\
&= d_x\left(x^3 z\right) + d_y\left(y\,z^2\right) + d_z\left(x^3 z + y^2 z\right) \\
&= d_x(x^3 z + \overbrace{y^2 z}^{d_x\left(y^2 z\right)=0}) + d_y(y\,z^2 + \overbrace{x^3 z}^{d_y\left(x^3 z\right)=0}) + d_z\left(x^3 z + y^2 z\right) \\
&= d\left(x^3 z + y^2 z\right).
\end{aligned}
$$

Άρα το δυναμικό του πεδίου είναι $\phi(x,y,z) = x^3 z + y^2 z + c$, όταν c σταθερά, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3 - 1 έχουμε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(-1,1,2)}^{B(1,2,4)} d\,\varphi = \varphi\,(1,2,4) - \varphi\,(-1,1,2) = 6.$$

■

Ασκήσεις

1. Αφού πρώτα δειχθεί ότι τα παρακάτω πεδία είναι συντηρούμενα, στη συνέχεια να υπολογιστεί το έργο που παράγεται κατά τη μετατόπιση υλικού σημείου, όταν:[11]

i) $\mathbf{F} = y^4 z^2\,\mathbf{i} + 4xy^3 z^2\,\mathbf{j} + 2xy^4 z\,\mathbf{k}$ από το σημείο $(-1,2,4)$ στο $(3,2,2)$,

ii) $\mathbf{F} = (y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})\,e^{xy}$ από το $(1,0)$ στο $(2,2)$,

iii) $\mathbf{F} = \left(4xy - 3x^2 z^2\right)\,\mathbf{i} + 2x^2\,\mathbf{j} - 2x^3 z\,\mathbf{k}$ από το $(0,1,1)$ στο $(2,2,4)$,

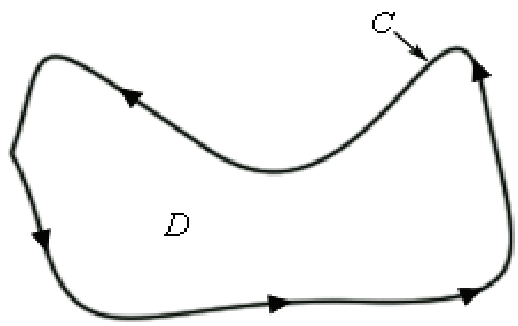
iv) $\mathbf{F} = (2x\cos y + z\sin y)\,\mathbf{i} + \left(xz\cos y - x^2\sin y\right)\,\mathbf{j} + x\sin y\,\mathbf{k}$
από το $(1,\pi,3)$ στο $(-1,0,1)$,

v) $\mathbf{F} = \left(y^2 z^3\cos x - 4x^3 z\right)\,\mathbf{i} + 2yz^3\sin x\,\mathbf{j} + \left(3y^2 z^2\sin x - x^4\right)\,\mathbf{k}$
από το $(\pi/2,1,1)$ στο $(\pi,3,3)$.

2. Να προσδιοριστεί το δυναμικό των πεδίων:

i) $\mathbf{E} = r\,\mathbf{r}$ *ii)* $\mathbf{E} = r^2\,\mathbf{r}$,

[11] Το αντίστοιχο δυναμικό είναι:
$(i)\,xy^4z^2$, $(ii)\,e^{xy}$, $(iii)\,2x^2y - x^3z^2$, $(iv)\,x^2\cos y + xz\sin y$, $(v)\,y^2z^3\sin x - x^4 z$.



Σχήμα 9.4 - 1: Θεώρημα του Green

όταν $\mathbf{r}$ διάνυσμα θέσης. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, όταν C το άνω τμήμα της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 4$.

9.4 Σχέση επικαμπύλιου και διπλού ολοκληρώματος

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ του επικαμπύλιου και του διπλού ολοκληρώματος. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:[12]

Θεώρημα 9.4 - 1 (Green στο επίπεδο). *Έστω D ένας κλειστός τόπος του επιπέδου που περικλείεται από μία κλειστή και απλή καμπύλη C του xy-επιπέδου (Σχ. 9.4 - 1). Τότε, αν P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο D, ισχύει*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy, \qquad (9.4 - 1)$$

όταν η καμπύλη C διαγράφεται κατά τη θετική φορά.

[12] Για εκτενέστερη μελέτη και απόδειξη του θεωρήματος βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.

Σημειώσεις 9.4 - 1

i) Υπενθυμίζεται ότι σαν θετική φορά διαγραφής ή διαφορετικά δεξιόστροφη φορά θεωρείται αυτή, που είναι αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

ii) Μία καμπύλη C είναι κλειστή, όταν η αρχή και το τέλος της συμπίπτουν.

iii) Με τον όρο απλή καμπύλη εννοείται ότι η διαγραφή της γίνεται με συνεχή τρόπο και ότι η C καλύπτει πλήρως τον τόπο D. Το θεώρημα γενικεύεται και αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία ότι ισχύει και για άλλες μορφές της καμπύλης C και του τόπου D.

iv) Έχοντας τώρα υπ' όψιν τον τύπο $(9.1-5)$ ο τύπος $(9.1-5)$ γράφεται

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy, \qquad (9.4 - 2)$$

όταν $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ διανυσματικό πεδίο, που οι συνιστώσες του P και Q επαληθεύουν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 9.4 - 1.

Παράδειγμα 9.4 - 1

Με το Θεώρημα του Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint_C F\cdot d\,r$, όταν

$$\mathbf{F} = \left(5 - xy - y^2\right)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - 2xy\right)\,\mathbf{j}$$

και C το τετράγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$, που διαγράφεται δεξιόστροφα.

Λύση. Από την έκφραση του διανυσματικού πεδίου έχουμε ότι, αν

$$F = P\,i + Q\,j = \left(5 - xy - y^2\right)\,i + \left(x^2 - 2xy\right)\,j,$$

τότε

$$P = 5 - xy - y^2 \quad \text{και} \quad Q = x^2 - 2xy. \qquad (1)$$

Η καμπύλη C προφανώς πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 9.4 - 1, ενώ το τετράγωνο D που ορίζει, περιγράφεται ως εξής:

$$D = \left\{(x,y) \in \Re^2 : \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1\right\}.$$

Επομένως από τους τύπους $(9.4-2)$ και (1) έχουμε[13]

$$\begin{aligned}\oint_C F\cdot dr &= \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy \\ &= \iint_D [(2x-2y)-(-x-2y)]\,dx\,dy \\ &= 3\int_0^1 \left[\int_0^1 x\,dx\right] dy = 3\int_0^1 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \frac{3}{2}\int_0^1 dy = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 9.4 - 2

Όμοια με το Θεώρημα του Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy,$$

όταν C το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,2)$, που διαγράφεται δεξιόστροφα (Σχ. 9.4 - 2).

Λύση. Προφανώς είναι

$$P = xy \quad \text{και} \quad Q = x^2y^3. \tag{2}$$

Όμοια η καμπύλη C πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 9.4 - 1, ενώ το τρίγωνο D που ορίζει, σύμφωνα και με το (Σχ. 9.4 - 2) περιγράφεται ως εξής:

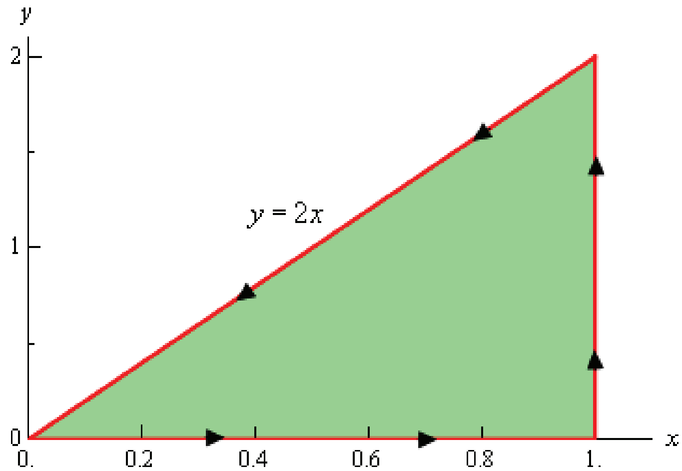
$$D = \Big\{\,(x,y)\in\Re^2:\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2x\,\Big\}.$$

Επομένως από τους τύπους $(9.4-1)$ και (2) προκύπτει ότι[14]

$$\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

[13] Βλέπε Μάθημα 8 Παράγραφος 8.1.3 Περίπτωση Ι.

[14] Όμοια βλέπε Μάθημα 8 Παράγραφος 8.1.3 Περίπτωση ΙΙ.



Σχήμα 9.4 - 2: Παράδειγμα 9.4 - 1

$$= \iint_D \left(2xy^3 - x\right)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2x} \left(2xy^3 - x\right)\, dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\, xy^4 - xy\right]_{y=0}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(8\,x^5 - 2\,x^2\right)\, dx = \left[\frac{4}{3}\,x^6 - \frac{2}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

■

15

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Apostol, T. (1962), Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός II, Εκδόσεις Ατλαντίς-Μ. Πεχλιβανίδης, Αθήνα, ISBN 61–11601.

[4] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων