



Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

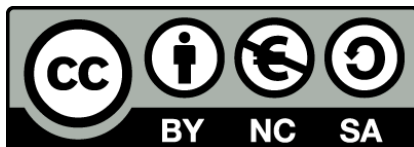
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας



Αριθμητική Ανάλυση

Δρ Ι. Φαμέλης

Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών ΤΕ και Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής ΤΕ



Το περιεχόμενο του μαθήματος διατίθεται με άδεια Creative Commons εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Αριθμητική Ανάλυση

Δρ Ι. Θ. Φαμέλης
Αν. Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών

Ιανουάριος 2014

Περιεχόμενα

1 Προσεγγιστικές Μέθοδοι και Σφάλματα	9
1.1 Εισαγωγή	9
1.2 Σφάλματα και προσεγγίσεις	10
1.3 Αναπαράσταση αριθμών και στρογγυλοποίηση.	19
1.4 Ερωτήσεις	23
2 Αριθμητική Επίλυση Μη Γραμμικών Εξισώσεων	25
2.1 Εισαγωγή	25
2.2 Μέθοδοι Εγκλεισμού	25
2.2.1 Μέθοδος διχοτόμησης	26
2.2.2 Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regula-Falsi)	29
2.3 Μέθοδος Newton και οι παραλλαγές της	32
2.4 Λυμένες Ασκήσεις	39
2.5 Ερωτήσεις	43
3 Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων με άμεσες μεθόδους	45
3.1 Εισαγωγή	45
3.1.1 Βασικές έννοιες στους πίνακες.	46
3.2 Μέθοδος απαλοιφής Gauss	52
3.3 Μέθοδος παραγοντοποίησης LU Doolittle	60
3.4 Αντιστροφή πίνακα	71
3.5 Λυμένες Ασκήσεις	73
3.6 Ερωτήσεις	80
4 Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων	83
4.1 Εισαγωγή	83
4.2 Γενική Επαναληπτική Μέθοδος	87
4.2.1 Επαναληπτική Μέθοδος Jacobi	88
4.3 Επαναληπτική Μέθοδος Gauss-Seidel	92
4.4 Επαναληπτική Μέθοδος SOR	96
4.5 Λυμένες Ασκήσεις	96

4.6	Ερωτήσεις	102
5	Προσέγγιση συναρτήσεων με παρεμβολή	103
5.1	Εισαγωγή	103
5.2	Προσέγγιση Taylor	104
5.3	Παρεμβολή Lagrange	109
5.4	Παρεμβολή Newton	113
5.4.1	Παρεμβολή Newton με Διηρημένες Διαφορές	113
5.4.2	Παρεμβολή Newton με Πεπερασμένες Διαφορές	116
5.5	Παρεμβολή Hermite	119
5.6	Κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή	124
5.7	Λυμένες Ασκήσεις	127
5.8	Ερωτήσεις	130
6	Αριθμητική Διαφόριση και Ολοκλήρωση	133
6.1	Αριθμητική προσέγγιση παραγώγων	133
6.2	Αριθμητική Ολοκλήρωση	138
6.2.1	Τύποι Newton Cotes	138
6.2.2	Σύνθετοι τύποι ολοκλήρωσης	142
6.3	Λυμένες Ασκήσεις	145
6.4	Ερωτήσεις	149
7	Προσέγγιση με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.	151
7.1	Γραμμική προσέγγιση με Ελάχιστα Τετράγωνα	151
7.2	Πολυωνυμική προσέγγιση με Ελάχιστα Τετράγωνα	155
7.3	Εκθετική και λογαριθμική συσχέτιση των δεδομένων	157
7.4	Λυμένες Ασκήσεις	160
7.5	Ερωτήσεις	162
8	Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων	163
8.1	Εισαγωγή και βασικοί ορισμοί	163
8.2	Οι μέθοδοι Euler και Improved Euler	169
8.3	Άμεσες μέθοδοι Runge-Kutta	172
8.4	Λυμένες Ασκήσεις	175
8.5	Ερωτήσεις	177

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Οι δυνάμεις που ασκούνται κατά την πτώση του σώματος.	12
1.2	Προσέγγιση της παραγώγου	13
1.3	Προσέγγιση του ολοκληρώματος	15
1.4	Σχηματικά η Accuracy και η Precision	17
2.1	Θεώρημα Bolzano	26
2.2	Μέθοδος Διχοτόμησης	27
2.3	k βήμα μεθόδου Regula-Falsi	30
2.4	Σύγκλιση επαναληπτικής μεθόδου Newton.	33
2.5	Αποτυχία της μεθόδου Newton.	36
2.6	Απόκλιση της μεθόδου Newton.	37
4.1	l_2 -νόρμα ≤ 1	84
4.2	l_∞ -νόρμα ≤ 1	85
5.1	Θεώρημα Weierstrass	104
5.2	Προσέγγιση της $f(x) = e^x$ από πολυώνυμο Taylor με κέντρο το 0.	107
5.3	Πολυωνυμική προσέγγιση με συνθήκες παρεμβολής.	109
5.4	Πολυωνυμική παρεμβολή παράδειγμα α)	112
5.5	Πολυωνυμική παρεμβολή παράδειγμα β)	113
5.6	Κυβική παρεμβολή Hermite στα δεδομένα του παραδείγματος.	121
5.7	Παρεμβολή Hermite 5 ^{ου} βαθμού στα δεδομένα του παραδείγματος.	123
5.8	Παρεμβολή στα δεδομένα του 1ου παραδείγματος	124
5.9	Παρεμβολή στα δεδομένα του 2ου παραδείγματος	125
6.1	Διαμέριση k ίσου μήκους διαστημάτων $[\alpha, \beta]$	134
6.2	Κανόνας τραπεζίου	139
6.3	Κανόνας Simpson	140
6.4	Σύνθετος κανόνας τραπεζίου	142
6.5	Σύνθετος κανόνας Simpson	144
7.1	Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.	152

7.2	Παράδειγμα 7.1.1 ευθείας ελαχίστων τετραγώνων	154
7.3	Παράδειγμα 7.1.2 ευθείας ελαχίστων τετραγώνων	156
7.4	Παράδειγμα 7.3.1 εκθετικού μοντέλου	159
7.5	Παράδειγμα 7.3.2 εκθετικού μοντέλου	161
8.1	Η αναλυτική λύση (συνεχής γραμμή) και μία προσεγγιστική (τελείες) του ΠΑΤ της λογιστικής διαφορικής εξίσωσης.	166
8.2	Σφάλματα μονοβηματικών μεθόδων	168
8.3	Λύση με Euler	170
8.4	Λύση με Improved Euler	173
8.5	Λύση με RK4	175

Κατάλογος Πινάκων

6.1 Συντελεστές των τύπων υπολογισμού παραγώγων.	137
--	-----



Κεφάλαιο 1

Προσεγγιστικές Μέθοδοι και Σφάλματα

1.1 Εισαγωγή

Στην σύγχρονη εποχή μας καλούμαστε να κατανοήσουμε πολλά φυσικά φαινόμενα αλλά και να λύσουμε τεχνολογικά ή άλλα επιστημονικά προβλήματα. Η μελέτη και ερμηνεία αυτών εξηγείται μέσω πάγιων θεωριών που θεμελιώνονται με την εξέλιξη της κάθε επιστήμης που τα μελετά. Πολλές φορές είναι απαραίτητο το να γνωρίσουμε την εξέλιξη του φαινομένου ή να δώσουμε λύση στο τεχνολογικό πρόβλημα. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά ως γλώσσα έκφρασης και περιγραφής των φαινομένων και των προβλημάτων.

Το σύνολο μαθηματικών εργαλείων (π.χ. των εξισώσεων) αλλά της σχετικής θεωρίας που τα συνδέει με το φυσικό πρόβλημα, αποτελούν το **μαθηματικό μοντέλο** που το περιγράφει. Τα μαθηματικά μοντέλα δεν είναι όμως τέλει αναπαραστάσεις της φύσης. Υπάρχουν απλοποιητικές παραδοχές ή άγνωστοι παράγοντες που δεν μπορούμε να ερμηνεύσουμε μέσω των εξισώσεων. Όμως αυτά αποτελούν το μόνο εργαλείο που έχουμε στη διάθεσή μας για να λύσουμε το φυσικό πρόβλημα.

Είναι γνωστό ότι μόνο ένα μικρό μέρος των Μαθηματικών προβλημάτων μπορούν να **επιλυθούν αναλυτικά, δηλαδή να βρεθούν ακριβείς μαθηματικές εκφράσεις των λύσεών τους**. Στην εποχή μας, με την χρήση υπολογιστικών συστημάτων, το μεγαλύτερο μέρος αυτών των προβλημάτων επιλύεται **προσεγγιστικά** από ταχύτατες και ιδιαίτερα ακριβείς μεθόδους. Αυτές τις μεθόδους τις ονομάζουμε **Αριθμητικές Μεθόδους** και το πεδίο της επιστήμης των Μαθηματικών που τις μελετά ονομάζεται Αριθμητική Ανάλυση ή και μερικές φορές Υπολογιστικά Μαθηματικά (αν και δεν είναι ταυτόσημες αυτές οι έννοιες).

Ορισμός 1.1.1 Η **Αριθμητική Ανάλυση** είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετά και αναπτύσσει διακριτά (και όχι συνεχή) μαθηματικά μοντέλα τα οποία παράγουν

προσεγγιστικές λύσεις στα διάφορα Μαθηματικά προβλήματα. ◇

Οι μέθοδοι της Αριθμητικής Ανάλυσης είναι αλγοριθμικές.

Ορισμός 1.1.2 Αλγόριθμος είναι ένα σύνολο βημάτων (ή διαδικασιών) οι οποίες χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός προβλήματος. ◇

Μερικές από τις **αριθμητικές (προσεγγιστικές) μεθόδους και τους αντίστοιχους αλγορίθμους τους** που θα μελετήσουμε είχαν αναπτυχθεί πριν την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στη ζωή μας. Οι μέθοδοι όμως αυτές, αλλά και άλλες, βρήκαν πρόσφορο έδαφος για την εφαρμογή τους μέσω των υπολογιστών. Η επιτακτική ανάγκη για προσεγγιστικές λύσεις όλο και περισσότερων φυσικών προβλημάτων υπήρξε η εφελκυστική δύναμη εξέλιξης των υπολογιστών δύναμη κατά τις πρώτες δεκαετίες της ύπαρξής τους.

Η υλοποίηση των αλγορίθμων γίνεται από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, προγραμματίζοντας τις μεθόδους με μία κατάλληλη γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. Fortran, Matlab, C). Στις σημειώσεις αυτές θα ασχοληθούμε με μεθόδους των Μαθηματικών οι οποίες χρησιμοποιούνται για την (προσεγγιστική) επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που αντιμετωπίζουν συνήθως οι μηχανικοί.

1.2 Σφάλματα και προσεγγίσεις

Η έννοια του σφάλματος είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις προσεγγιστικές μεθόδους μίας και, από την φύση τους, οι μέθοδοι αυτές παράγουν (διακριτά ή αριθμητικά συνήθως) αποτελέσματα που είναι "κοντά" αλλά όχι ίσα με τα αναλυτικά. Επίσης, η χρήση του ίδιου του υπολογιστή και οι χειρισμός αριθμητικών ποσοτήτων με αυτόν παράγει νέα σφάλματα. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.2.1 Από τις Σημειώσεις Αριθμητικής Ανάλυσης του καθ. Χ. Τσίτουρα (ΤΕΙ Στερεάς Ελλάδος) και από το διαδικτυο δανειζόμαστε το ακόλουθο παράδειγμα. Στις 25/2/1991, στην πόλη Νταχράν της Σ. Αραβίας, κατά την διάρκεια του πόλεμου στον κόλπο, μία Αμερικάνικη συστοιχία πυραύλων τύπου Patriot, απέτυχε να εντοπίσει και να εξουδετερώσει έναν Ιρακινό πύραυλο τύπου Scud. Ο Scud χτύπησε ένα στόχο του Αμερικάνικου στρατού, σκοτώνοντας 28 στρατιώτες και τραυματίζοντας 100. Αίτιο της αποτυχίας ήταν τα λάθη στρογγυλοποιήσεων στον υπολογισμό του χρόνου. Ειδικότερα ο χρόνος χωριζόταν σε δέκατα του second και χρησιμοποιούσε ένα καταχωρητή 24 δυαδικών θέσεων για αποθήκευση. Ο αριθμός

$$1/10 = 1/24 + 1/25 + 1/28 + 1/29 + 1/212 + 1/213 + \dots$$

Δηλαδή η δυαδική αναπαράσταση του $1/10$ είναι

$$0.000110011001100110011001100\dots$$

Ο καταχωρητής των Patriot αποθήκευε μόνο το

0.0001100110011001100110

παράγοντας ένα λιάδος

0.0000000000000000000000001100...

στο δυαδικό σύστημα, ή περίπου 0.000000095 στο δεκαδικό.

Δηλαδή ακόμα και ο απλός αριθμός 0.1 αναπαριστάνεται λιάδος στους H/Y. Έπειτα από 100 ώρες σε λειτουργία η συστοιχία μέτρησε $100 \times 3600 \times 10 = 3600000$ δέκατα του second παράγοντας λιάδος $0.000000095 \times 3600000 = 0.342sec$. Ο Scud ταξίδευε με ταχύτητα $1,676m/sec$ και σε $0.342s$ ήταν $573m$ μακρύτερα από το αναμενόμενο. Ο ακόλουθος πίνακας αφορά το συγκεκριμένο πρόβλημα:

Hours	Secs	Calc. Time (s)	Range Gate (s)	Appr.Inacc. Shift (m)
0	0	0	0	0
1	3600	3599.9966	.0034	7
8	28800	28799.9725	.0025	55
20(a)	72000	71999.9313	.0687	137
48	172800	172799.8352	.1648	330
72	259200	259199.7528	.2472	494
100(b)	360000	359999.6667	.3433	687

- Continuous operation exceeding about 20 hours-target outside range gate
- Alpha Battery ran continuously for about 100 hours

Πηγή ίντερνετ: GAO/IMTEC-92-26 Patriot Missile Software Problem

Ένα άλλο παράδειγμα από τη φυσική θα μας αναδείξει άλλα είδη σφαλμάτων.

Παράδειγμα 1.2.2 Έστω ότι θέλουμε να παρατηρήσουμε την πτώση ενός αντικειμένου και να υπολογίσουμε την ταχύτητά του σε κάθε στιγμή της πτώσης.

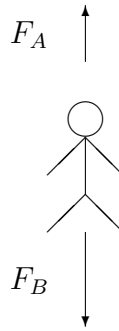
Το μαθηματικό μοντέλο.

Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι η βαρυτική δύναμη $F_B = m \cdot g$ και η αντίσταση του αέρα $F_A = -c \cdot v$ (ή $-c \cdot v^2$) και c μία σταθερά με μονάδες Kgr/sec , η οποία εξαρτάται από το σχήμα του αντικειμένου. Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι ισχύει $F = F_A + F_B$ και αφού

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

η διαφορική εξίσωση που κυβερνά την πτώση είναι η

$$m \frac{dv}{dt} = m \cdot g - c \cdot v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} \cdot v$$



Σχήμα 1.1: Οι δυνάμεις που ασκούνται κατά την πτώση του σώματος.

Η αναλυτική λύση.

Από την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή λύση του προβλήματος που είναι η:

$$v(t) = \frac{g \cdot m}{c} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}).$$

Πράγματι, ισχύει

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g \cdot m}{c} \left(-\frac{c}{m}\right) e^{-\frac{c}{m}t} = g \cdot e^{-\frac{c}{m}t}.$$

Αν αντικαταστήσουμε στην διαφορική εξίσωση την λύση βλέπουμε ότι την ικανοποιεί.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} \frac{g \cdot m}{c} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g \cdot e^{-\frac{c}{m}t}$$

Μία προσεγγιστική λύση.

Γνωρίζουμε από το γυμνάσιο ότι

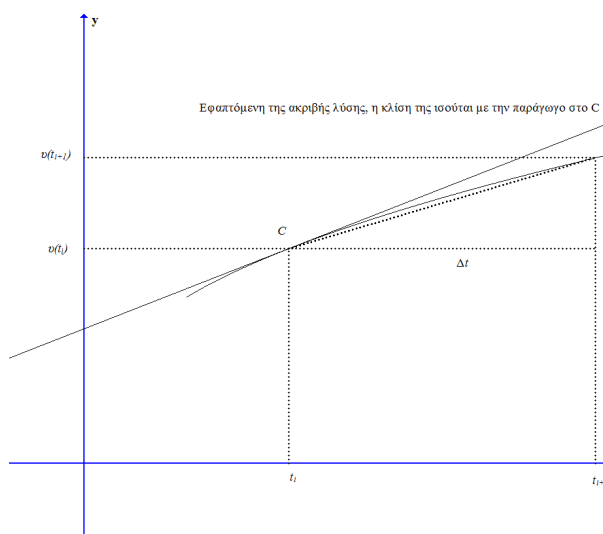
$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Οπότε μπορούμε να προσεγγίσουμε την παράγωγο από τον τύπο:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

και όταν αντικαταστήσουμε στην διαφορική εξίσωση έχουμε έναν **διακριτό** τύπο

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m}v(t_i) \Leftrightarrow v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left(g - \frac{c}{m}v(t_i)\right) (t_{i+1} - t_i)$$



Σχήμα 1.2: Προσέγγιση της παραγώγου

ο οποίος προσεγγίζει την ταχύτητα στο σημείο χρόνου t_{i+1} από την τιμή στο t_i .

Μία εφαρμογή και τα σφάλματα.

Έστω ότι $c = 12.5 \text{Kgr/sec}$, $g = 9.8 \text{m/sec}^2$ και την αρχική στιγμή $t = 0$ έχουμε $v(0) = 0$ για την πτώση ενός σώματος με μάζα $m = 68.2 \text{Kgr/sec}$. Η ακριβής λύση ισούται με

$$v(t) = 53.39 (1 - e^{-0.18355t}).$$

Για μεγάλο t ο όρος $e^{-0.18355t}$ γίνεται μικρός (άρα αμελητέος) οπότε η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι $F = 0$ και το σώμα έχει μηδενική επιτάχυνση, οπότε το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Για την χρονική στιγμή $t = 2$ ο προσεγγιστικός τύπος υπολογίζει την προσέγγιση του $u(2)$ ως εξής:

$$v(2) = v(0) + \left(g - \frac{c}{m} v(0) \right) (2 - 0) = 0 + g \cdot 2 = 19.6$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε την τιμή της ταχύτητας και της προσέγγισής της σε διάφορες χρονικές στιγμές.

t	$v(t)$	προσέγγιση
0	0	0
2	16.40	19.60
4	27.77	32.00
6	35.64	39.85
8	41.10	44.82
10	44.87	47.97
12	47.49	49.96
∞	53.59	

Δύο είναι οι πηγές των σφαλμάτων.

α Το σφάλμα διακριτοποίησης (προσέγγισης) της παραγώγου.

β Τα σφάλματα στρογγυλοποίησης από τον χειρισμό των αριθμητικών πράξεων στον Η/Υ.

◇

Η επιλογή της μεθόδου προσέγγισης μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα των υπολογισμών.

Παράδειγμα 1.2.3 Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Είναι γνωστό, από την Μαθηματική Ανάλυση, ότι το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 της e^x είναι :

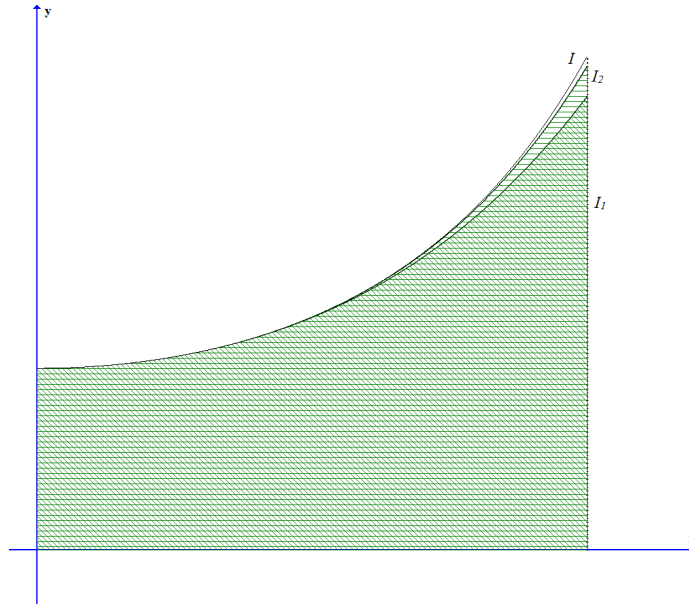
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Οπότε το ανάπτυγμα Taylor της προς ολοκλήρωσης συνάρτησης είναι :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} + \dots$$

Εμείς θα προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα αντικαθιστώντας την προς ολοκλήρωση ποσότητα με την προσέγγισή της με ένα πολυώνυμο Taylor βαθμού 4 αρχικά και βαθμού 6 στη συνέχεια. Δηλαδή θα υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις :

$$I_1 = \int_0^1 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} dx \quad \text{και} \quad I_2 = \int_0^1 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} dx$$



Σχήμα 1.3: Προσέγγιση του ολοκληρώματος

Στο σχήμα (1.3) φαίνονται οι τρεις καμπύλες που χρησιμοποιήσαμε και το κάθε ολοκλήρωμα είναι ίσο με το εμβαδόν μεταξύ της κάθε καμπύλης και του άξονα των x . Το μέγεθος των αναμενόμενων σφαλμάτων μπορούμε να το υπολογίσουμε από τους τύπους:

$$\begin{aligned}
 I - I_1 &= \int_0^1 \left(\frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} + \dots \right) dx = \\
 &= \left[\frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \dots \right]_0^1 \approx \\
 &\approx \left[\frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \right]_0^1 \approx 0.0293.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I - I_2 &= \int_0^1 \left(\frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} + \dots \right) dx = \\
 &= \left[\frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \dots \right]_0^1 \approx \\
 &\approx \left[\frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \right]_0^1 \approx 0.0055.
 \end{aligned}$$

◇

Όπως είδαμε οι προσεγγίσεις εμπεριέχουν σφάλματα και για αυτό το λόγο παραθέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.1 Έστω ότι το x_{eval} είναι μία προσέγγιση μίας ποσότητας x_{true} . Ως **απόλυτο σφάλμα** ορίζουμε την ποσότητα

$$err = \|x_{eval} - x_{true}\|.$$

Ως **σχετικό σφάλμα** ορίζουμε την ποσότητα

$$relerr = \frac{\|x_{eval} - x_{true}\|}{\|x_{true}\|}$$

δεδομένου ότι $\|x_{true}\| \neq 0$.

◇

Για βαθμωτές ποσότητες (αριθμητικές) ως $\|\cdot\|$ νοείται η απόλυτη τιμή, ενώ στην περίπτωση που οι ποσότητες είναι διανυσματικές νοείται κάποιο νόρμα. Η σημασία της τιμής του απόλυτου σφάλματος εξαρτάται από τη φύση της ποσότητας που προσεγγίζουμε. Για παράδειγμα, αν η προς προσέγγιση ποσότητα είναι της τάξης του 10^{-2} , ένα σφάλμα 0.008 θεωρείται πολύ μεγάλο. Στην περίπτωση όμως που η προς προσέγγιση ποσότητα είναι της τάξης του 10^5 , ένα σφάλμα 0.008 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο. Για αυτόν τον λόγο, πολλές φορές προτιμάμε να εξετάζουμε το σχετικό σφάλμα.

Πολλές από τις προσεγγιστικές διαδικασίες είναι επαναληπτικές. Ξεκινώντας από μία αρχική τιμή x_0 , μία διαδικασία της μορφής

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

υλοποιείται για να υπολογίσει μία ακολουθία τιμών, η οποία ευελπιστούμε να προσεγγίζει την ακριβή τιμή. Εάν τελικά η διαδικασία προσεγγίζει τη λύση που θέλουμε τότε λέμε ότι αυτή **συγκλίνει**, ενώ σε αντίθετη περίπτωση η διαδικασία **αποκλίνει**. Η επιλογή της αρχικής τιμής μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα, όσο αφορά την σύγκλιση ή μη της επαναληπτικής διαδικασίας. Επειδή, συνήθως, δεν γνωρίζουμε την ακριβή λύση η επαναληπτική διαδικασία διακόπτεται όταν η διαφορά δύο διαδοχικών προσεγγίσεων είναι μικρότερη από μία τιμή ανοχής που ορίζουμε ή όταν ξεπεράσουμε έναν αριθμό επαναλήψεων που έχουμε ορίσει.

Ορισμός 1.2.2 Ορίζουμε ως **ακρίβεια (accuracy)** μίας επαναληπτικής (αλλά και οποιασδήποτε άλλης προσεγγιστικής) διαδικασίας τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων στα οποία η ακριβής ποσότητα προσεγγίζεται από την προσεγγιστική. ◇

Η ακρίβεια είναι ένα μέτρο του πόσο κοντά στην ακριβή λύση βρίσκεται η προσέγγισή μας και μπορεί να καταγραφεί υπολογίζοντας την ποσότητα:

$$accuracy = -\log_{10}(err) \quad \text{ή} \quad accuracy = -\log_{10}(relerr).$$

Παίρνοντας τον μείον δεκαδικό λογάριθμο ενός σφάλματος (απόλυτου ή σχετικού) έχουμε μία προσέγγιση των δεκαδικών του ψηφίων. Οι ποσότητες αυτές συνήθως στρογγυλοποιούνται στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων.

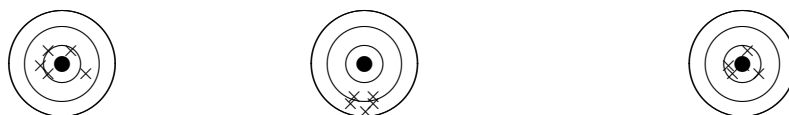
Στην περίπτωση που δε γνωρίζουμε την ακριβή τιμή, ένα μέτρο του πόσο επιτυχής είναι μία επαναληπτική διαδικασία είναι η precision (επακρίβεια).

Ορισμός 1.2.3 Ως **επακρίβεια ή προσεγγιστική ακρίβεια (precision)** ορίζουμε την ποσότητα μετρά πόσο κοντά είναι μεταξύ τους είναι οι διαδοχικές προσεγγίσεις που υπολογίζουμε. \diamond

Η επακρίβεια μπορεί να καθοριστεί και μαθηματικά από τους τύπους:

$$precision = -\log_{10}(\|x_{k+1} - x_k\|) \quad \text{ή} \quad precision = -\log_{10}\left(\frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_{k+1}\|}\right).$$

Αν και δεν είναι απαραίτητο, τα αποτελέσματα των παραπάνω τύπων μπορούν να στρογγυλοποιούνται στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Οι έννοιες αυτές παρουσιάζονται σχηματικά στο Σχήμα 1.2.



Μεγάλη Accuracy Μεγάλη Precision Μεγάλη Accuracy και Precision

Σχήμα 1.4: Σχηματικά η Accuracy και η Precision

Μία επαναληπτική προσεγγιστική διαδικασία τερματίζεται στην πράξη όταν ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο διακοπής. Τα κριτήρια αυτά μπορεί να αφορούν κάποια μέτρα του σφάλματος ή έναν μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων της διαδικασίας.

Εφόσον συνήθως δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή της λύσης, τα βασικά μέτρα σφάλματος βασίζονται στην επακρίβεια. Δηλαδή, κριτήρια τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας μπορεί να είναι είναι

$$\|x_{k+1} - x_k\| < tol \quad \text{ή} \quad \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_{k+1}\|} < tol \quad (\|x_{k+1}\| \neq 0)$$

όπου tol μία ανοχή η οποία καθορίζεται από αυτόν που λύνει το πρόβλημα.

Παράδειγμα 1.2.4 Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε στην εξίσωση $f(x) = x^2 - a$ όπου $a > 0$. Δηλαδή αναζητούμε μία προσεγγιστική διαδικασία για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας του a . Θεωρούμε ότι $x \neq 0$ και εκτελούμε τις ισοδύναμες πράξεις:

$$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + a \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \frac{x^2 + a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

Ορίζουμε την επαναληπτική διαδικασία:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) \quad \text{για} \quad x_0 = a > 0. \quad (1.1)$$

Αποδεικνύεται ότι, η διαδικασία αυτή συγκλίνει στο μοναδικό (για διαστήματα στον θετικό ημιάξονα των x) σταθερό σημείο το οποίο είναι η \sqrt{a} .

Θα εφαρμόσουμε την επαναληπτική διαδικασία (1.1) για $a = 5$ και θα αναζητήσουμε μία προσέγγιση του $\sqrt{5} = 2.2360679 \dots$. Ως κριτήριο διακοπής ζητάμε η επακρίβεια (απόλυτη διαφορά δύο διαδοχικών επαναλήψεων) να είναι μικρότερη από την παράμετρο ανοχής $tol = 0.003$.

Βήμα 1 Υπολογίζουμε,

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{5}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{5}{5} \right) = 3$$

Εφόσον $|x_1 - x_0| = |3 - 5| = 2 > tol = 0.003$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 2 Υπολογίζουμε,

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{5}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{14}{6} = 2.333333$$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = |2.333333 - 3| = 0.666667 > tol = 0.003$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 Υπολογίζουμε,

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{5}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2.333333 + \frac{5}{2.333333} \right) = 2.238095$$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = |2.238095 - 2.333333| = 0.095238 > tol = 0.003$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 4 Υπολογίζουμε,

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{5}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(2.238095 + \frac{5}{2.238095}\right) = 2.236069$$

Εφόσον $|x_4 - x_3| = |2.236069 - 2.238095| = 0.002026 < tol = 0.003$ η διαδικασία τερματίζεται.

Η προσεγγιστική τιμή $\sqrt{5} \approx 2.236069$ επιτεύχθηκε σε μόλις τέσσερις επαναλήψεις με βάση την παράμετρο ανοχής που έχουμε θεωρήσει. \diamond

1.3 Αναπαράσταση αριθμών και στρογγυλοποίηση.

Έστω ότι προσεγγίζουμε μία τιμή x_{true} με μία προσεγγιστική x_{eval} , τότε λέμε ότι η προσέγγιση είναι σε k **σημαντικά (significant)** δεκαδικά ψηφία όταν για το απόλυτο σφάλμα ισχύει:

$$|x_{eval} - x_{true}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-k}.$$

Παράδειγμα 1.3.1 Ας δούμε ένα παράδειγμα, έστω $x_{true} = 0.89431$ τότε το $x_{eval} = 0.8943$ είναι μία προσέγγιση σε τέσσερα σημαντικά ψηφία διότι

$$|x_{eval} - x_{true}| = |0.8943 - 0.89431| = 0.00001 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.00005.$$

Επίσης έστω $x_{true} = 0.00369$ τότε το $x_{eval} = 0.0037$ είναι μία προσέγγιση σε τέσσερα σημαντικά ψηφία διότι

$$|x_{eval} - x_{true}| = |0.00369 - 0.0037| = 0.00001 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.00005.$$

\diamond

Τέτοιες προσεγγίσεις είναι **ισοδύναμες** όταν αυτές αποτελούν τελικές προσεγγίσεις μετά από μία σειρά υπολογισμούς οπότε και μας ενδιαφέρει το απόλυτο σφάλμα. Μπορεί όμως αυτές οι προσεγγίσεις αποτελούν ενδιάμεσες προσεγγίσεις και επακολουθούν άλλες πράξεις. Για παράδειγμα εάν θέλουμε να υπολογίσουμε το $1/x_{true}$ και το προσεγγίσουμε με το $1/x_{eval}$ έχουμε για την πρώτη περίπτωση:

$1/x_{true} = 1/0.89431 = 1.118180496695777$ τότε το $1/x_{eval} = 1/0.8943 = 1.118193000111819$ οπότε διατηρούνται τα 4 σημαντικά ψηφία στην προσέγγιση διότι:

$$|1/x_{eval} - 1/x_{true}| = 0.0000125034 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.00005.$$

Για την δεύτερη περίπτωση έχουμε:

$1/x_{true} = 1/0.00369 = 271.0027100$ τότε το $1/x_{eval} = 1/0.0037 = 270.27027$ όπου παρατηρούμε ότι δεν διατηρείται ούτε ένα σημαντικό ψηφίο στην προσέγγιση διότι:

$$|1/x_{eval} - 1/x_{true}| = 0.7324399.$$

◇

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι προσεγγίσεις μικρών αριθμών (οι οποίοι μπορούν να προκύψουν ακόμη και από μία απλή αφαίρεση) όταν χρησιμοποιούνται σε παρονομαστές πράξεων οδηγούν σε μεγέθυνση των σφαλμάτων των αριθμητικών υπολογισμών. Αυτό το φαινόμενο είναι συνηθισμένο στους αριθμητικούς υπολογισμούς στον υπολογιστή και θα πρέπει να το προσέχουμε.

Παράδειγμα 1.3.2 Θεωρούμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

για την οποία έχουμε 2 θετικές ρίζες, δηλαδή ισχύει $a \neq 0$ και $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Είναι γνωστό ότι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1) \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (2)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή καθεμιάς από αυτές τις εκφράσεις με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή της ($b + \sqrt{\Delta}$ και $b - \sqrt{\Delta}$ αντίστοιχα) καταλήγουμε σε ισοδύναμες εκφράσεις για τις ρίζες:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(b + \sqrt{\Delta})}{2a(b + \sqrt{\Delta})} = \\ &= \frac{(b^2 - 4ac) - b^2}{2a(b + \sqrt{\Delta})} = \frac{-4ac}{2a(b + \sqrt{\Delta})} = \frac{-2c}{(b + \sqrt{\Delta})} \quad (3) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(b - \sqrt{\Delta})}{2a(b - \sqrt{\Delta})} = \\ &= \frac{(b^2 - 4ac) - b^2}{2a(b - \sqrt{\Delta})} = \frac{-4ac}{2a(b - \sqrt{\Delta})} = \frac{-2c}{(b - \sqrt{\Delta})} \quad (4). \end{aligned}$$

Θα ανάμενε κάποιος ότι τα δύο αυτά ζεύγη ριζών θα έδιναν τα ίδια αποτελέσματα, και σε κάθε περίπτωση στον υπολογιστή θα υπολογίζαμε τις ίδιες ρίζες. Ωστόσο, στην περίπτωση όπου $|b| \approx \sqrt{\Delta}$ δεν ισχύει κάτι τέτοιο.

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους, υπολογίσαμε στον υπολογιστή τις ρίζες για τις ακόλουθες δευτεροβάθμιες:

- 1) $x^2 - 1000.001x + 1 = 0$
- 2) $x^2 + 1000.001x + 1 = 0$
- 3) $x^2 - 10000.0001x + 1 = 0$
- 4) $x^2 + 10000.0001x + 1 = 0$
- 5) $x^2 - 100000.00001x + 1 = 0$
- 6) $x^2 + 100000.00001x + 1 = 0$
- 7) $x^2 - 1000000.000001x + 1 = 0$
- 8) $x^2 + 1000000.000001x + 1 = 0$

Ως μέτρο του σφάλματος για κάθε μία από τις ρίζες καταγράψαμε στον επόμενο πίνακα, για κάθε πρόβλημα, το πόσο αποτυγχάνει να ικανοποιήσει την δευτεροβάθμια

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Σφάλμα τύπου				
	1	2	3	4
1	0.000000e + 000	2.364686e - 011	2.364686e - 005	1.110223e - 016
2	2.364686e - 011	0.000000e + 000	1.110223e - 016	2.364686e - 005
3	0.000000e + 000	-2.022716e - 009	-2.022716e - 001	1.110223e - 016
4	-2.022716e - 009	0.000000e + 000	1.110223e - 016	-2.022716e - 001
5	0.000000e + 000	-3.385358e - 007	-3.385358e + 003	0.000000e + 000
6	-3.385358e - 007	0.000000e + 000	0.000000e + 000	-3.385358e + 003
7	0.000000e + 000	-7.614493e - 006	-7.614493e + 006	1.110223e - 016
8	-7.614493e - 006	0.000000e + 000	1.110223e - 016	-7.614493e + 006

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να διατυπώσουμε έναν κανόνα για τον ποιο τύπο θα χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό κάθε ρίζας, ανάλογα με το πρόσημο του συντελεστή του πρωτοβάθμιου b , στην περίπτωση όπου $|b| \approx \sqrt{\Delta}$.

Όταν $b < 0$, οι τύποι που πρέπει να επιλέξουμε είναι οι (1) και (4).

Όταν $b > 0$, οι τύποι που πρέπει να επιλέξουμε είναι οι (2) και (3).

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα μπορεί να είναι τόσο σημαντικά ώστε να αξίζει η συγκεκριμένη μελέτη.

◇

Στον παραπάνω πίνακα τα αποτελέσματα εμφανίζονται στην εκθετική μορφή αναπαράστασης τους όπως συνήθως γίνεται στους υπολογιστές. Η **εκθετική μορφή** αναπαράστασης αριθμού έχει τη μορφή:

$$\alpha.\beta e \pm c$$

όπου το α είναι το ακέραιο μέρος, το β το δεκαδικό και \pm το εκθετικό μέρος της αναπαράστασης του αριθμού. Για καθένα από τα α , β και c μπορεί να διατίθενται ένα ένας συγκεκριμένος αριθμός ψηφίων (ανάλογα με το περιβάλλον που εμφανίζεται ο αριθμός).

Ένας τέτοιος αριθμός διαβάζεται ως

$$\alpha.\beta \times 10^{\pm c}$$

Για παράδειγμα το $2.1423e + 02$ είναι η εκθετική αναπαράσταση του $2.1423 \times 10^{+2} = 214.23$, ενώ το $2.1423e - 003$ είναι η εκθετική αναπαράσταση του $2.1423 \times 10^{-3} = 0.0021423$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$, ο οποίος γενικά αναπαρίσταται με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Θα λέμε ότι ο αριθμός αυτός **στρογγυλοποιείται σε ένα αριθμό** με k δεκαδικά ψηφία (τον οποίο συμβολίζουμε με $x^{(k)}$) όταν το σφάλμα στρογγυλοποίησης είναι:

$$|x - x^{(k)}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-k}.$$

Παράδειγμα 1.3.3 Για παράδειγμα, έστω $x = 8.9549966666\dots$, τότε $x^{(3)} = 8.955$ διότι

$$|x - x^{(3)}| = |8.9549966666\dots - 8.955| = 0.00000334\dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.0005$$

αλλά δεν ισχύει $x^{(3)} = 8.954$ διότι

$$|x - x^{(3)}| = |8.9549966666\dots - 8.954| = 0.00099667\dots \geq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.0005.$$

Επίσης ισχύει $x^{(7)} = 8.9549967$ διότι

$$\begin{aligned} |x - x^{(7)}| &= |8.9549966666\dots - 8.9549967| = 0.0000000334\dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-7} = \\ &= 0.00000005. \end{aligned}$$

Όμως δεν ισχύει $x^{(7)} = 8.95499667$ διότι

$$\begin{aligned} |x - x^{(7)}| &= |8.9549966666\dots - 8.9549966| = 0.0000000666\dots \geq \frac{1}{2} \times 10^{-7} = \\ &= 0.00000005 \end{aligned}$$

Ενώ για αριθμούς όπως ο $x = 3.544550$ ισχύει ότι $x^{(4)} = 3.5446$ διότι

$$|x - x^{(4)}| = |3.544550 - 3.5446| = 0.00005 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.00005$$

αλλά και $x^{(4)} = 3.5445$ διότι

$$|x - x^{(4)}| = |3.544550 - 3.5445| = 0.00005 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.00005.$$

Επίσης, $x^{(2)} = 3.54$ διότι

$$|x - x^{(2)}| = |3.544550 - 3.54| = 0.004550 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.005.$$

◇

Η στρογγυλοποίηση αριθμών, είτε γίνεται από τον άνθρωπο είτε από υπολογιστή, ενέχει την έννοια του σφάλματος στους υπολογισμούς που γίνονται με στρογγυλοποιημένες ποσότητες. Στους υπολογιστές, αριθμοί με πολλά ή άπειρα δεκαδικά ψηφία στρογγυλοποιούνται λόγω του τρόπου αναπαράστασης και αποθήκευσης των αριθμών κινητής υποδιαστολής στην μνήμη και τα μέσα αποθήκευσης.

Στην Αριθμητική Ανάλυση και στους υπολογιστές χειριζόμαστε κυρίως αριθμητικές **ποσότητες κινητής υποδιαστολής** (floating point). Ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων στην στρογγυλοποίηση ενός αριθμού εξαρτάται από τον τύπο του αριθμού κινητής υποδιαστολής στον οποίο στρογγυλοποιούμε αλλά και τις διάφορες τεχνικές στρογγυλοποίησης (προς τα πάνω, προς τα κάτω, αποκοπή ψηφίων ή στρογγυλοποίηση στο κοντινότερο αριθμό).

Εμείς, σε όλη **στους υπολογισμούς των παραδειγμάτων του μαθήματος** μας θα χρησιμοποιούμε **προς τα πάνω στρογγυλοποίηση**, η οποία είναι και η συνήθης στον υπολογιστή. Δηλαδή, όταν θέλουμε να κάνουμε πράξεις και να εμφανίζουμε τα αποτελέσματά μας με 3 δεκαδικά ψηφία την ποσότητα 3.4556 θα την στρογγυλοποιούμε στην 3.456, την 3.4554 θα την στρογγυλοποιούμε στην 3.455 και την 3.4555 στην 3.456.

1.4 Ερωτήσεις

Ερώτηση 1.4.1 Τι ονομάζεται αναλυτική και τι αριθμητική (προσεγγιστική) λύση ενός Μαθηματικού προβλήματος. Τι εμπεριέχει μία αριθμητική λύση ;

Ερώτηση 1.4.2 Τι ορίζουμε ως απόλυτο και τι ως σχετικό σφάλμα μιας προσέγγισης μίας αριθμητικής ποσότητας;

Ερώτηση 1.4.3 Ποια είναι η γενική μορφή μίας επαναληπτικής διαδικασίας; Τι εννοούμε όταν λέμε ότι η επαναληπτική διαδικασία αποκλίνει; Τι μπορεί να επηρεάσει τη σύγκλιση ή ή μίας επαναληπτικής διαδικασίας;

Ερώτηση 1.4.4 Τι ορίζουμε ως ακρίβεια (accuracy) και τι επακρίβεια ή προσεγγιστική ακρίβεια (precision) μίας επαναληπτικής διαδικασίας; Πότε επιλέγουμε να καταγράψουμε την προσεγγιστική ακρίβεια μίας επαναληπτικής διαδικασίας και πότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ακρίβεια;

Ερώτηση 1.4.5 Ποια κριτήρια μπορούν να επιλεγούν για τον τερματισμό μίας επαναληπτικής προσεγγιστικής διαδικασίας ;

Ερώτηση 1.4.6 Σε μία προσέγγιση μίας ακριβούς τιμής x_{true} από μία προσεγγιστική x_{eval} , πότε λέμε ότι το k -οστό δεκαδικό ψηφίο της προσεγγιστικής τιμής είναι σημαντικό (significant);

Ερώτηση 1.4.7 Έστω $x \in \mathbb{R}$, ο οποίος γενικά αναπαρίσταται με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Πότε λέμε ότι ο αριθμός αυτός στρογγυλοποιείται σε ένα αριθμό (τον οποίο συμβολίζουμε με $x^{(k)}$) με k δεκαδικά ψηφία;

Κεφάλαιο 2

Αριθμητική Επίλυση Μη Γραμμικών Εξισώσεων

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μεθόδους για την εύρεση ριζών εξισώσεων της μορφής:

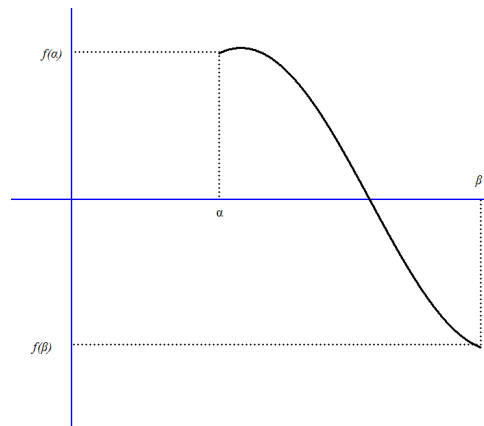
$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

όπου $f \in C[\alpha, \beta]$. Μία τέτοια εξίσωση μπορεί να έχει καμία, μία ή πολλές (πραγματικές ή μιγαδικές) ρίζες. Υποθέτουμε ότι έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας και με κάποιον τρόπο (γραφικά ή διαφορετικά) έχουμε βρει μία περιοχή του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στο οποίο υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα. Οι περισσότερες εξισώσεις της μορφής (2.1) δεν μπορούν να λυθούν με αναλυτικές (ακριβείς) μαθηματικές διαδικασίες. Έτσι, προσεγγιστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση των ριζών.

2.2 Μέθοδοι Εγκλεισμού

Στις ακόλουθες παραγράφους θα μας απασχολήσουν μέθοδοι εύρεσης ριζών οι οποίες με επαναληπτικό τρόπο, ξεκινώντας από ένα διάστημα στο οποίο γνωρίζουμε ότι υπάρχει μία ρίζα, δημιουργούν διαστήματα μικρότερου πλάτους από το αρχικό στα οποία περιέχεται η ρίζα.

Υποθέτουμε ότι έχουμε εντοπίσει ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο υπάρχει τουλάχιστο μία ρίζα. Σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε από την Μαθηματική Ανάλυση (Θεώρημα Θεώρημα Bolzano, Σχήμα 2.1), για συνεχείς συναρτήσεις, μία ικανή συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι η σχέση $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Θεωρούμε ότι αυτή η συνθήκη ισχύει και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η εξίσωση έχει μία μόνο πραγματική ρίζα r στο $[\alpha, \beta]$.



Σχήμα 2.1: Θεώρημα Bolzano

2.2.1 Μέθοδος διχοτόμησης

Η πιο απλή αντιπρόσωπος αυτής της κατηγορίας προσεγγιστικών διαδικασιών, είναι η μέθοδος της Διχοτόμησης. Η μέθοδος αυτή στο k βήμα της ($k = 1, 2, 3, \dots$) θεωρεί ένα διάστημα $[\alpha_k, \beta_k]$ και υπολογίζει το μέσο του $x_k = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}$. Εάν $f(x_k) = 0$ το μέσο είναι η ρίζα. Εάν δεν ισχύει αυτή και ισχύει ότι $f(\alpha_k) \cdot f(x_k) < 0$, η ρίζα θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_k, x_k]$ διαφορετικά η ρίζα θα βρίσκεται στο διάστημα $[x_k, \beta_k]$. Το ακόλουθο θεώρημα μας εξασφαλίζει τη σύγκλιση της μεθόδου.

Θεώρημα 2.2.1 (Θεώρημα Διχοτόμησης) Θεωρούμε μία συνάρτηση $f \in C[\alpha, \beta]$ για την οποία υπάρχει αριθμός $r \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(r) = 0$. Εάν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και συμβολίσουμε $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ την ακολουθία των μέσων των διαστημάτων που παράγει η μέθοδος της Διχοτόμησης τότε ισχύει

$$|r - x_k| \leq \frac{\beta - \alpha}{2^k}$$

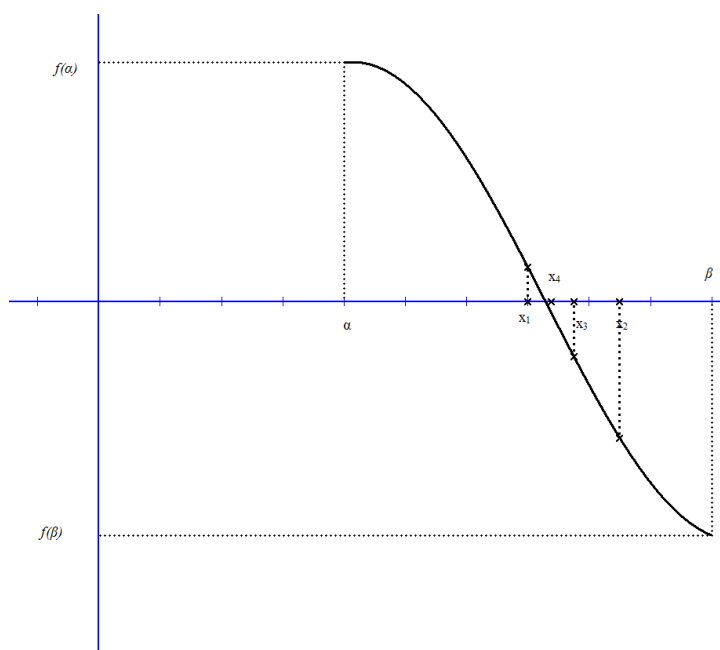
για $k = 1, 2, 3, \dots$ και η ακολουθία συγκλίνει στη ρίζα

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = r.$$

◇

Σχηματικά η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.2

Η επαναληπτική διαδικασία που ορίζεται από τα παραπάνω τερματίζεται στην πράξη όταν ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο διακοπής. Τα κριτήρια αυτά μπορεί να αφορούν κάποια **μέτρα του σφάλματος** ή έναν **μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων** της διαδικασίας.



Σχήμα 2.2: Μέθοδος Διχοτόμησης

Εφόσον συνήθως δεν γνωρίζουμε την ρίζα, όπως έχουμε αναφέρει, τα βασικά μέτρα σφάλματος βασίζονται στην επακρίβεια ή στο πόσο αποτυγχάνει η μέθοδος να ικανοποιήσει το ζητούμενο $f(x) = 0$. Έτσι τέτοια κριτήρια τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας είναι

$$|x_k - x_{k-1}| < tol \text{ ή } \frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < tol \text{ (} x_k \neq 0 \text{)} \text{ ή } |f(x_k)| < tol$$

όπου tol μία ανοχή η οποία καθορίζεται από αυτόν που λύνει το πρόβλημα. Για την επιτάχυνση της διαδικασίας μπορεί να συνδυαστούν και ένα από τα δύο πρώτα κριτήρια (συνήθως το δεύτερο) με το τρίτο. Τα βήματα της μεθόδου περιγράφονται στον ακόλουθο αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 2.2.1 Εφαρμογή μεθόδου Διχοτόμησης

$$a = \alpha, b = \beta$$

$$x = (a + b)/2$$

while Όσο δεν ικανοποιείται κάποιο από τα κριτήρια διακοπής **do**

if $f(x) = 0$ **then**

 Η ρίζα είναι το x

else if $f(a) \cdot f(x) < 0$ **then**

```

    b = x
    x = (a + b)/2
else
    a = x
    x = (a + b)/2
end if
end while
if 'Έχει ξεπεραστεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων, then
    η διαδικασία αποκλίνει.
else
    το x αποτελεί την προσέγγιση της ρίζας.
end if

```

◇

Παράδειγμα 2.2.1 Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο διχοτόμησης για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 3 = 0$ όταν το $x \in [1, 2]$ με τιμή της παραμέτρου ανοχής $tol = 0.03$ και κριτήριο διακοπής αυτό της επακρίθειας να γίνει μικρότερη από την παράμετρο ανοχής. Είναι φανερό ότι η ρίζα είναι η $\sqrt{3}$.

Βήμα 1 , Θέτουμε $\alpha_1 = 1$ και $\beta_1 = 2$ για τα οποία ισχύει $f(1) = -2 < 0$ και $f(2) = 1 > 0$.
Υπολογίζουμε το $x_1 = (1 + 2)/2 = 1.5$ και $f(x_1) = -0.75$.

Βήμα 2 Αφού $f(x_1) \cdot f(\beta_1) < 0$ θέτουμε $\alpha_2 = x_1 = 1.5$ και $\beta_2 = 2$.
Υπολογίζουμε $x_2 = (1.5 + 2)/2 = 1.75$ και $f(x_2) = 0.625$.
Εφόσον $|x_2 - x_1| = 0.25 > tol = 0.03$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 Αφού $f(x_2) \cdot f(\alpha_2) < 0$ θέτουμε $\alpha_3 = 1.5$ και $\beta_3 = x_2 = 1.75$.
Υπολογίζουμε $x_3 = (1.5 + 1.75)/2 = 1.625$ και $f(x_3) = -0.3594$.
Εφόσον $|x_3 - x_2| = 0.125 > tol$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 4 Αφού $f(x_3) \cdot f(\beta_3) < 0$ θέτουμε $\alpha_4 = x_3 = 1.625$ και $\beta_4 = 1.75$.
Υπολογίζουμε $x_4 = (1.625 + 1.75)/2 = 1.6875$ και $f(x_4) = -0.1523$.
Εφόσον $|x_4 - x_3| = 0.0625 > tol$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 5 Αφού $f(x_4) \cdot f(\beta_4) < 0$ θέτουμε $\alpha_5 = x_4 = 1.6875$ και $\beta_5 = 1.75$.
Υπολογίζουμε $x_5 = (1.6875 + 1.75)/2 = 1.71875$ και $f(x_5) = -0.0459$.
Εφόσον $|x_5 - x_4| = 0.0313 > tol$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 6 Αφού $f(x_5) \cdot f(\beta_5) < 0$ θέτουμε $\alpha_6 = x_5 = 1.71875$ και $\beta_6 = 1.75$.
Υπολογίζουμε $x_6 = (1.71875 + 1.75)/2 = 1.7344$ και $f(x_6) = 0.0081$.
Εφόσον $|x_6 - x_5| = 0.0157 < tol = 0.03$ η διαδικασία διακόπτεται.

Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας 1.7344 είναι μία ικανοποιητική (με βάση τα κριτήρια διακοπής) προσέγγιση της άγνωστης τιμής $\sqrt{3} \approx 1.73205$. Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$	$f(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $	tol	$f(x_k) \cdot f(a_k)$
1	1	2	-2	1	1.5	-0.75		0.03	+
2	1.5	2	-0.75	1	1.75	0.625	0.25	0.03	-
3	1.5	1.75	-0.75	0.625	1.625	-0.3594	0.125	0.03	+
4	1.625	1.75	-0.3594	0.625	1.6875	-0.1523	0.0625	0.03	+
5	1.6875	1.75	-0.1523	0.625	1.71875	-0.0459	0.0313	0.03	+
6	1.71875	1.75	-0.0459	0.625	1.7344	0.0081	0.0157	0.03	

◇

2.2.2 Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regula-Falsi)

Η μέθοδος Regula-Falsi μπορεί να θεωρηθεί ως παραλλαγή της μεθόδου Διχοτόμησης. Στην μέθοδο της Διχοτόμησης, χωρίζοντας το διάστημα της ρίζας $[\alpha_k, \beta_k]$ σε ίσα υποδιαστήματα, δεν λαμβάνεται καθόλου υπ' όψη το μέγεθος των ποσοτήτων $f(\alpha_k)$, $f(\beta_k)$. Έτσι, αν η ποσότητα $f(\alpha_k)$ είναι πολύ πιο κοντά στο μηδέν από την ποσότητα $f(\beta_k)$, είναι πολύ πιθανόν η ρίζα να είναι πλησιέστερα στο α_k από ότι το β_k . Μία εναλλακτική μέθοδος η οποία λαμβάνει υπ' όψη της αυτό το δεδομένο, είναι να ενώσουμε τα σημεία $(\alpha_k, f(\alpha_k))$ και $(\beta_k, f(\beta_k))$ με μία ευθεία γραμμή (δείτε το Σχήμα 2.3).

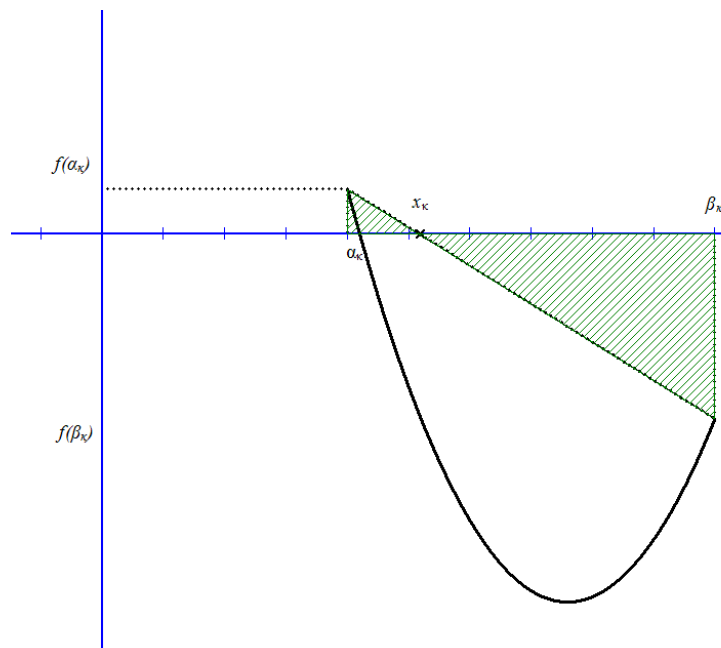
Η τομή της ευθείας αυτής με τον άξονα Ox , ορίζει μία βελτιωμένη τιμή x_k της υπό προσέγγιση ρίζας. Η αφετηρία για το όνομα της μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι η αντικατάσταση της καμπύλης με μία ευθεία γραμμή δίνει μία "εσφαλμένη θέση" της ρίζας. Από τα όμοια τρίγωνα που ορίζονται έχουμε την αναλογία:

$$\frac{f(\alpha_k)}{x_k - \alpha_k} = \frac{f(\beta_k)}{x_k - \beta_k},$$

από την οποία εύκολα προκύπτει η σχέση

$$x_k = \beta_k - \frac{f(\beta_k)(\beta_k - \alpha_k)}{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}.$$

Η τιμή x_k η οποία ορίζεται από τον παραπάνω τύπο, (ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται στην μέθοδο διχοτόμησης), αντικαθιστά μία από τις τιμές α_k ή β_k , ανάλογα με το αν ισχύει η σχέση εγκλεισμού



Σχήμα 2.3: k βήμα μεθόδου Regula-Falsi

$$f(x_k) \cdot f(\beta_k) < 0 \quad \text{ή} \quad f(x_k) \cdot f(\alpha_k) < 0$$

αντίστοιχα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι μέθοδος αυτή συγκλίνει. Τα κριτήρια διακοπής της επαναληπτικής διαδικασίας είναι τα ίδια με αυτά που εφαρμόζονται στην μέθοδο της Διχοτόμησης. Τα βήματα της μεθόδου περιγράφονται στον ακόλουθο αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 2.2.2 Εφαρμογή μεθόδου Regula-Falsi

$$a = \alpha, \quad b = \beta$$

$$x = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

while Όσο δεν ικανοποιείται κάποιο από τα κριτήρια διακοπής **do**

if $f(x) = 0$ **then**

 Η ρίζα είναι το x

else if $f(a) \cdot f(x) < 0$ **then**

$$b = x$$

$$x = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

else

$$a = x$$

$$x = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

end if

end while

if Έχει ξεπεραστεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων, **then**
η διαδικασία αποκλίνει.

else

το x αποτελεί την προσέγγιση της ρίζας.

end if

◇

Παράδειγμα 2.2.2 Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο Regula-Falsi για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 3 = 0$ όταν το $x \in [1, 2]$ με τιμή της παραμέτρου ανοχής $tol = 0.03$ και κριτήριο διακοπής αυτό του απόλυτου σφάλματος. Είναι φανερό ότι η ρίζα είναι η $\sqrt{3}$.

Βήμα 1 Θέτουμε $\alpha_1 = 1$ και $\beta_1 = 2$ για τα οποία ισχύει $f(1) = -2 < 0$ και $f(2) = 1 > 0$.

Υπολογίζουμε

$$x_1 = \beta_1 - f(\beta_1)(\beta_1 - \alpha_1)/(f(\beta_1) - f(\alpha_1)) = 2 - 1 \cdot (2 - 1)/(1 - (-2)) = 1.6667$$

$$\text{και } f(x_1) = -0.2222.$$

Βήμα 2 Αφού $f(x_1) \cdot f(\beta_1) < 0$ θέτουμε $\alpha_2 = x_1 = 1.6667$ και $\beta_2 = 2$.

Υπολογίζουμε

$$x_2 = 2 - 1 \cdot (2 - 1.6667)/(-0.2222 - (-2)) = 1.7273$$

$$\text{και } f(x_2) = -0.0165.$$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = 0.0606 > tol = 0.03$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 Αφού $f(x_2) \cdot f(\beta_2) < 0$ θέτουμε $\alpha_3 = x_2 = 1.7273$ και $\beta_3 = 2$.

Υπολογίζουμε

$$x_3 = 2 - 1 \cdot (2 - 1.7273)/(-0.0165 - (-2)) = 1.7317$$

$$\text{και } f(x_3) = -0.0012.$$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = 0.0044 < tol = 0.03$ η διαδικασία διακόπτεται.

Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας 1.7317 επιτεύχθηκε σε μόνο τρία βήματα (ουσιαστικά δύο επαναλήψεις). Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $	tol	$f(x_k) \cdot f(a_k)$
1	1	2	-2	1	1.667	-0.2222		0.03	+
2	1.667	2	-0.2222	1	1.7273	-0.0165	0.0606	0.03	+
3	1.7273	2	-0.0165	1	1.7317	-0.0012	0.0044	0.03	

◇

2.3 Μέθοδος Newton και οι παραλλαγές της

Η **μέθοδος Newton** είναι μία από τις πιο ικανές και δημοφιλείς επαναληπτικές μεθόδους για την προσέγγιση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$. Γενικά, αν x_n είναι η τρέχουσα προσέγγιση, τότε η επόμενη προσέγγιση δίνεται από τον επαναληπτικό τύπο:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ όπου } x_0 \text{ δοθέν, } k = 0, 1, 2, \dots$$

Η σύγκλιση της επαναληπτικής αυτής διαδικασίας μας εξασφαλίζεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.1 *Εάν $f \in C^2[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $p \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε $f(p) = 0$ και $f'(p) \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta \geq 0$ ώστε η μέθοδος Newton να συγκλίνει για κάθε αρχική προσέγγιση $x_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.* \diamond

Η Newton προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης με κέντρο ένα σημείο \hat{x} το οποίο ισούται με

$$f(x) = f(\hat{x}) + \frac{f'(\hat{x})}{1!} (x - \hat{x}) + \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - \hat{x})^2$$

όπου $\xi(x) \in [x, \hat{x}]$. Εάν το \hat{x} είναι μία προσέγγιση της ρίζας p κοντά σε αυτή για το οποίο $f'(\hat{x}) \neq 0$, τότε

$$0 = f(p) = f(\hat{x}) + \frac{f'(\hat{x})}{1!} (p - \hat{x}) + \frac{f''(\xi(p))}{2!} (p - \hat{x})^2.$$

Αποκόπτοντας τον όρο του σφάλματος έχουμε την προσέγγιση

$$0 \approx f(\hat{x}) + \frac{f'(\hat{x})}{1!} (p - \hat{x})$$

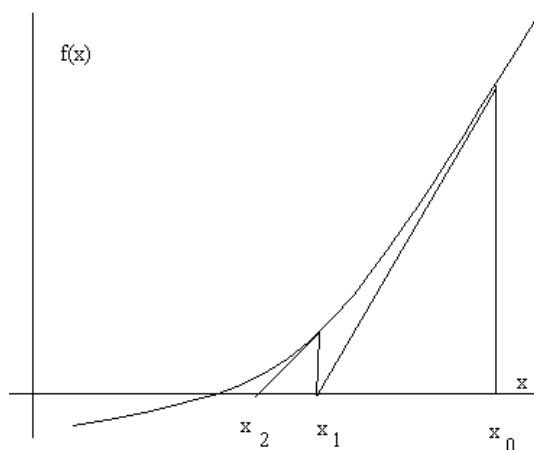
και λύνοντας ως προς p έχουμε

$$p \approx \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})}.$$

Το Σχήμα 2.4 δείχνει μία γεωμετρική εικόνα της επαναληπτικής διαδικασίας την οποία ορίζει η μέθοδος.

Τα κριτήρια διακοπής της επαναληπτικής διαδικασίας είναι τα ίδια με αυτά που εφαρμόζονται στην μέθοδο της Διχοτόμησης.

Παράδειγμα 2.3.1 *Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Newton για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 4x^2 - 3 = 0$ παίρνοντας ως αρχική τιμή $x_0 = 0.5$ και έχοντας ως κριτήριο διακοπής η επακρίδεια να είναι μικρότερη από την παράμετρο ανοχής*



Σχήμα 2.4: Σύγκλιση επαναληπτικής μεθόδου Newton.

$tol = 10^{-4}$. Είναι φανερό ότι η ρίζα είναι η $\sqrt{3}/2 = 0.8660254 \dots$. Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{4x_k^2 - 3}{8x_k} = \frac{4x_k^2 + 3}{8x_k}.$$

Βήμα 1 Υπολογίζουμε

$$x_1 = \frac{4 \cdot x_0^2 + 3}{8 \cdot x_0} = \frac{4 \cdot 0.5^2 + 3}{8 \cdot 0.5} = 1$$

Εφόσον $|x_1 - x_0| = |1 - 0.5| = 0.5 > tol = 0.0001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 2 Υπολογίζουμε

$$x_2 = \frac{4 \cdot x_1^2 + 3}{8 \cdot x_1} = \frac{4 \cdot 1^2 + 3}{8 \cdot 1} = 0.875$$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = |0.875 - 1| = 0.125 > tol = 0.0001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 Υπολογίζουμε

$$x_3 = \frac{4 \cdot x_2^2 + 3}{8 \cdot x_2} = \frac{4 \cdot 0.875^2 + 3}{8 \cdot 0.875} = 0.866071$$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = |0.866071 - 0.875| = 0.008928 > tol = 0.0001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 4 Υπολογίζουμε

$$x_4 = \frac{4 \cdot x_3^2 + 3}{8 \cdot x_3} = \frac{4 \cdot 0.866071^2 + 3}{8 \cdot 0.866071} = 0.866025$$

Εφόσον $|x_4 - x_3| = |0.866025 - 0.866071| = 0.000046 < tol = 0.0001$ η διαδικασία διακόπτεται.

Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας 0.866025 επιτεύχθηκε σε μόλις τέσσερις επαναλήψεις με βάση την παράμετρο ανοχής που έχουμε θεωρήσει. Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	tol
0	0.5		0.0001
1	1	0.5	0.0001
2	0.875	0.125	0.0001
3	0.866071	0.008928	0.0001
4	0.866025	0.000046	0.0001

◇

Ο υπολογισμός της αρχικής προσέγγισης x_0 μπορεί να γίνει γραφικά. Για τον γραφικό εντοπισμό της αρχικής προσέγγισης συνήθως η εξίσωση $f(x) = 0$ μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη $f_1(x) = f_2(x)$. Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των f_1 , f_2 και αν τέμνονται, τότε η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες οι οποίες προσεγγίζονται από τις προβολές των τομών στον άξονα Ox . Επίσης είναι συνηθισμένη τακτική, πριν εφαρμοσθεί η μέθοδος Newton, να υπολογίζουμε προσεγγίσεις της ρίζας με κάποιον αλγόριθμο ο οποίος συγκλίνει για κάθε αρχική προσέγγιση, όπως π.χ. η μέθοδος της Διχοτόμησης. Έτσι η μέθοδος Newton συχνά χρησιμοποιείται στην πράξη σαν μία γρήγορα συγκλίνουσα τελική διαδικασία που τερματίζει έναν άλλο, πιο αργό, αλλά πιο ασφαλή αλγόριθμο. Ο τερματισμός της επαναληπτικής διαδικασίας μπορεί να στηριχθεί στα κριτήρια που αναφέραμε για την μέθοδο της Διχοτόμησης.

Ένα μέτρο του πόσο γρήγορα συγκλίνει μία επαναληπτική μέθοδος είναι η τάξη σύγκλισης.

Ορισμός 2.3.2 Μία επαναληπτική μέθοδος λέμε ότι έχει **τάξη σύγκλισης** q αν ισχύει

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^q} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - p|}{|x_k - p|^q} = K \quad \text{για } K > 0$$

όπου $e_k = |x_k - p|$ το απόλυτο σφάλμα στο βήμα k . ◇

Η μέθοδος Newton έχει τετραγωνική σύγκλιση (δηλαδή $q = 2$) εάν $f'(p) \neq 0$. Δηλαδή, υπάρχει αριθμός $K > 0$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - p|}{|x_k - p|^2} = K.$$

Παράδειγμα 2.3.2 Για να διαπιστώσουμε το γεγονός αυτό μπορούμε, για την συγκεκριμένη εξίσωση, να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι γνωρίζουμε την ρίζα ($p = \frac{\sqrt{3}}{2}$) και να υπολογίσουμε σε κάθε βήμα το πηλίκο

$$\frac{|x_{k+1} - p|}{|x_k - p|^2}.$$

Υπολογίζουμε αρχικά τα απόλυτα σφάλματα σε κάθε βήμα:

$$\begin{aligned} |x_0 - p| &= |0.500000 - 0.866025| = 0.366025 \\ |x_1 - p| &= |1.000000 - 0.866025| = 0.133974 \\ |x_2 - p| &= |0.875000 - 0.866025| = 0.008974 \\ |x_3 - p| &= |0.866071 - 0.866025| = 0.000046 \\ |x_4 - p| &= |0.866025 \dots - 0.866025 \dots| = 0.000000001222925 \end{aligned}$$

και τις ποσότητες

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|^2} &= \frac{0.133974}{0.366025^2} = 1.000000 \\ \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|^2} &= \frac{0.008974}{0.133974^2} = 0.500000 \\ \frac{|x_3 - p|}{|x_2 - p|^2} &= \frac{0.000046}{0.008974^2} = 0.571428 \\ \frac{|x_4 - p|}{|x_3 - p|^2} &= \frac{0.000000001222925}{0.000046^2} = 0.577319626365575 \end{aligned}$$

Στον τελευταίο υπολογισμό αναγκαζόμαστε να κάνουμε πράξεις με πολύ περισσότερα ψηφία από τα 6 που κάναμε στους προηγούμενους. Ωστόσο είναι φανερό ότι τα πηλικά συγκλίνουν σε έναν αριθμό $K \approx 0.57 \dots$

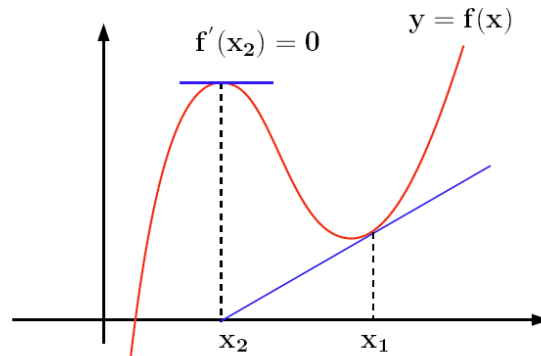
◇

Η βασική δυσκολία της μεθόδου είναι η επιλογή της αρχικής προσέγγισης x_0 ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.3.1. Αν το x_0 είναι εκτός της περιοχής $[p - \delta, p + \delta]$, οι διαδοχικές προσεγγίσεις της μεθόδου απομακρύνονται συνεχώς από το p και η ρίζα δεν μπορεί να προσεγγισθεί.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις η φύση του τρέχοντος (ή του αρχικού) σημείου προσέγγισης οδηγεί τη μέθοδο σε αποτυχία. Για παράδειγμα εάν έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 1 - x^2 = 0$, με προφανείς ρίζες τις ± 1 , η επαναληπτική διαδικασία είναι η

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 - x_k^2}{-2x_k}.$$

Εάν επιλέξουμε $x_0 = 0$ οδηγούμαστε σε κλάσμα $\frac{1}{0}$. Έχουμε δηλαδή μία περίπτωση όπου η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο προσέγγισης είναι 0. Σχηματικά αυτό φαίνεται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Αποτυχία της μεθόδου Newton.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x^3 - 2x + 2 = 0$, η επαναληπτική διαδικασία είναι η

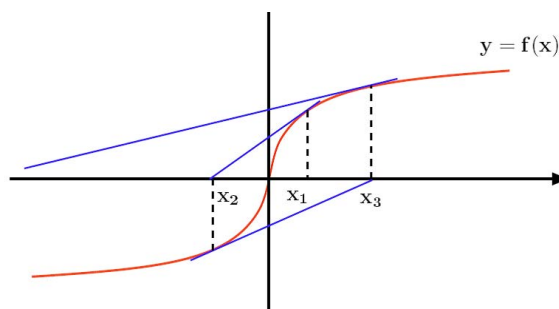
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k + 2}{3x_k^2 - 2} = \frac{2x_k^3 - 2}{3x_k^2 - 2}.$$

Εάν επιλέξουμε $x_0 = 0$ οδηγούμαστε φανερά στο $x_1 = 1$ η οποία δίνει $x_2 = 0$ από όπου παίρνουμε $x_3 = 1, x_4 = 0, \dots$ και η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται στο ίδιο μοτίβο.

Ένα άλλο πρόβλημα εμφανίζεται σε συναρτήσεις για τις οποίες η παράγωγος δεν ορίζεται στο σημείο της ρίζας. Μία τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = \sqrt[3]{x}$ για την οποία η παράγωγος δεν ορίζεται στο 0 (που είναι η ρίζα). Εφαρμόζοντας τη μέθοδο έχουμε την επαναληπτική διαδικασία

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_k^{\frac{1}{3}-1}} = x_k - \frac{x_k^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_k^{-\frac{2}{3}}} = x_k - 3x_k^{\frac{2}{3}}x_k^{\frac{1}{3}} = x_k - 3x_k = -2x_k.$$

Παρατηρούμε ότι η κάθε επανάληψη αλλάζει το πρόσημο της προσέγγισης αλλά και την απομακρύνει από το μηδέν, που είναι η ρίζα. Έτσι είναι φανερό ότι η μέθοδος αποτυγχάνει. Σχηματικά αυτό φαίνεται στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Απόκλιση της μεθόδου Newton.

Παρόμοια προβλήματα έχουμε και σε περιπτώσεις τις οποίες η παράγωγος δεν είναι συνεχής στη ρίζα.

Η υψηλή ταχύτητα σύγκλισης αποτελεί ένα μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου Newton. Ωστόσο, κύριο μειονέκτημα της αποτελεί ότι απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης κάτι που δεν είναι πάντοτε εύκολο ή δυνατό.

Επίσης, ο υπολογισμός της παραγώγου σε κάθε βήμα της μεθόδου Newton επιβαρύνει το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου. Για να μειώσουμε τον αριθμό υπολογισμού των παραγώγων μπορούμε να υιοθετήσουμε την τεχνική **Quasi Newton** με βάση την οποία δεν υπολογίζουμε την παράγωγο σε κάθε επανάληψη, αλλά την κρατάμε σταθερή για κάποιο αριθμό βημάτων. Βέβαια, αφού υπολογίζουμε την παράγωγο κάθε n -βήματα μπορεί να κερδίσει η μέθοδος υπολογιστικό κόστος, χάνει όμως σε ταχύτητα σύγκλισης και χρειάζονται περισσότερα βήματα για να επιτύχει την επιθυμητή ακρίβεια. Το αν χρησιμοποιήσουμε την τεχνική αυτή εξαρτάται από τη φύση του κάθε προβλήματος, σταθμίζοντας τα θετικά και τα αρνητικά μίας τέτοιας επιλογής.

Όταν η παράγωγος είναι δύσκολο (ή δεν μπορεί) να υπολογιστεί αναλυτικά μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με μία προσέγγισή της. Θα δούμε δύο τέτοιες παραλλαγές της μεθόδου Newton.

Η πρώτη ονομάζεται **διακριτή μέθοδος Newton** όπου, η παράγωγος της f προσεγγίζεται από τη διακριτή παράγωγο της σε ένα σημείο x , η οποία ορίζεται ως:

$$\delta_h f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

για δεδομένο μικρό $h > 0$ (της τάξης του 10^{-3}). Η προσέγγιση αυτή της παραγώγου έχει σφάλμα τάξης $\mathcal{O}(h)$ (δηλαδή είναι μικρότερο από $K \cdot h$). Τα σφάλματα αυτά δρουν συσσωρευτικά στο συνολικό σφάλμα της μεθόδου.

Η διακριτή μέθοδος Newton ορίζεται από τον επαναληπτικό τύπο:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\delta_h f(x_k)} \quad n \geq 0.$$

Μία άλλη μέθοδος που δεν απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου είναι η **Secant** όπου, η παράγωγος τώρα προσεγγίζεται από τον τύπο

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Η Secant έχει επαναληπτικό τύπο

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k \geq 1$$

όπου τώρα απαιτούνται δύο αρχικές τιμές x_0, x_1 . Η τάξη σύγκλισης της Secant είναι $q = 1.62$ δηλαδή ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^{1.62}} = K \neq 0.$$

Στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων όταν προσεγγίζουμε ρίζες με πολλαπλότητα $m > 1$ η Newton χάνει τη τετραγωνική σύγκλιση της. Για παράδειγμα εάν έχουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = x^2 = 0$$

με προφανή διπλή ρίζα το 0, η επαναληπτική διαδικασία είναι η

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{x_k}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - 0|}{|x_k - 0|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{x_k}{2}|}{|x_k|} = \frac{1}{2},$$

δηλαδή η σύγκλιση είναι γραμμική μιας και $q = 1$.

Για να διατηρήσουμε την τετραγωνική σύγκλιση χρησιμοποιούμε την **μέθοδο Schrodor** με επαναληπτικό τύπο

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Οι παραλλαγές αυτές έχουν κυρίως προγραμματιστικό ενδιαφέρον.

2.4 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.1 Λύστε την εξίσωση

$$8x^2 - 50x + 50 = 0$$

με τη μέθοδο Διχοτόμησης στο διάστημα $[1, 3]$ και διακόψετε τη διαδικασία όταν $|f(x_k)| < tol$ όπου $tol = 10^{-4}$.

Λύση

Θεωρούμε $f(x) = 8x^2 - 50x + 50 = 0$

Βήμα 1 , Θέτουμε $\alpha_1 = 1$ και $\beta_1 = 3$ για τα οποία ισχύει $f(1) = 8 > 0$ και $f(3) = -28 < 0$.

Οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα σε αυτό το διάστημα.

Υπολογίζουμε το $x_1 = (1 + 3)/2 = 2$ και $f(x_1) = -18$.

Βήμα 2 Αφού $f(x_1) \cdot f(\alpha_1) < 0$ θέτουμε $\alpha_2 = \alpha_1 = 1$ και $\beta_2 = x_1 = 2$.

Υπολογίζουμε $x_2 = (1 + 2)/2 = 1.5$ και $f(x_2) = -7$.

Εφόσον $|f(x_2)| = -7 > tol = 0.0001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 Αφού $f(x_2) \cdot f(\alpha_2) < 0$ θέτουμε $\alpha_3 = \alpha_2 = 1$ και $\beta_3 = x_2 = 1.5$.

Υπολογίζουμε $x_3 = (1 + 1.5)/2 = 1.25$ και $f(x_3) = 0$.

Εφόσον $|f(x_3)| = 0 < tol = 0.0001$ η διαδικασία τερματίζεται.

Οπότε η προσεγγιστική (αλλά και ακριβής σε αυτήν την περίπτωση) τιμή της ρίζας σε αυτό το διάστημα είναι η $x_3 = 1.25$. Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$f(x_k)$	tol	$f(x_k) \cdot f(a_k)$
1	1	3	8	-28	2	-18	0.0001	-
1	1	2	8	-18	1.5	-7	0.0001	-
3	1	1.5	8	-7	1.25	0	0.0001	

◇

Άσκηση 2.4.2 Λύστε την εξίσωση

$$5x^2 - 14x + 45 = 0$$

με τη μέθοδο Εσφαλημένης Θέσης Regula Falsi στο διάστημα $[1, 2]$ και διακόψετε τη διαδικασία όταν $|x_{k+1} - x_k| < tol$ όπου $tol = 0.005$.

Λύση

Θεωρούμε $f(x) = 5x^2 - 14x + 45 = 0$

Βήμα 1 Θέτουμε $\alpha_1 = 1$ και $\beta_1 = 2$ για τα οποία ισχύει $f(\alpha_1) = f(1) = 36 > 0$ και $f(\beta_1) = f(2) = -3 < 0$.

Οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα σε αυτό το διάστημα.

Υπολογίζουμε

$$x_1 = \beta_1 - f(\beta_1)(\beta_1 - \alpha_1)/(f(\beta_1) - f(\alpha_1)) = 2 - (-3) \cdot (2 - 1)/(-3 - 36) = 1.8421$$

$$\text{και } f(x_1) = -0.6647.$$

Βήμα 2 Αφού $f(x_1) \cdot f(\alpha_1) < 0$ θέτουμε $\alpha_2 = \alpha_1 = 1$ και $\beta_2 = x_1 = 1.8421$.

Υπολογίζουμε

$$x_2 = \beta_2 - f(\beta_2)(\beta_2 - \alpha_2)/(f(\beta_2) - f(\alpha_2)) = 1.8085$$

$$\text{και } f(x_2) = -0.1356.$$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = 0.0336 > tol = 0.005$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 Αφού $f(x_2) \cdot f(\alpha_2) < 0$ θέτουμε $\alpha_3 = \alpha_2 = 1$ και $\beta_3 = x_2 = 1.8085$.

Υπολογίζουμε

$$x_3 = \beta_3 - f(\beta_3)(\beta_3 - \alpha_3)/(f(\beta_3) - f(\alpha_3)) = 1.8017$$

$$\text{και } f(x_3) = -0.0272.$$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = 0.0068 > tol = 0.005$ η διαδικασία διακόπτεται.

Βήμα 4 Αφού $f(x_3) \cdot f(\alpha_3) < 0$ θέτουμε $\alpha_4 = \alpha_3 = 1$ και $\beta_4 = x_3 = 1.8017$.

Υπολογίζουμε

$$x_4 = \beta_4 - f(\beta_4)(\beta_4 - \alpha_4)/(f(\beta_4) - f(\alpha_4)) = 1.8003$$

$$\text{και } f(x_4) = -0.0048.$$

Εφόσον $|x_4 - x_3| = 0.0014 < tol = 0.005$ η διαδικασία διακόπτεται.

Οπότε η προσεγγιστική τιμή της ρίζας σε αυτό το διάστημα είναι η $x_4 = 1.8003$. Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $	tol	$f(x_k) \cdot f(a_k)$
1	1	2	36	-3	1.8421	-0.6647		0.005	-
2	1	1.8421	36	-0.6647	1.8085	-0.1356	0.0336	0.005	-
3	1	1.8085	36	-0.1356	1.8017	-0.0272	0.0068	0.005	-
4	1	1.8017	36	-0.0272	1.8003	-0.0048	0.0014	0.005	



Άσκηση 2.4.3 Λύστε την εξίσωση

$$x - 0.8 - 0.2\sin(x) = 0$$

με τη μέθοδο Newton. Χρησιμοποιήστε $x_0 = 0$ και διακόψετε τη διαδικασία όταν $|x_{k+1} - x_k| < tol$ όπου $tol = 10^{-3}$.

Λύση

Θεωρούμε $f(x) = x - 0.8 - 0.2\sin(x) = 0$ οπότε $f'(x) = 1 - 0.2\cos(x)$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - 0.8 - 0.2\sin(x_k)}{1 - 0.2\cos(x_k)}.$$

Βήμα 1 Υπολογίζουμε

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - 0.8 - 0.2\sin(x_0)}{1 - 0.2\cos(x_0)} = 0 - \frac{-0.8}{1 - 0.2} = 1$$

Εφόσον $|x_1 - x_0| = |1 - 0| = 1 > tol = 0.001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 2 Υπολογίζουμε

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - 0.8 - 0.2\sin(x_1)}{1 - 0.2\cos(x_1)} = 1 - \frac{1 - 0.8 - 0.2\sin(1)}{1 - 0.2\cos(1)} = 0.9645$$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = |0.9645 - 1| = 0.0355 > tol = 0.001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 Υπολογίζουμε

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - 0.8 - 0.2\sin(x_2)}{1 - 0.2\cos(x_2)} = 0.9645 - \frac{0.9645 - 0.8 - 0.2\sin(0.9645)}{1 - 0.2\cos(0.9645)} = 0.9643$$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = |0.9643 - 0.9645| = 0.0002 < tol = 0.001$ η διαδικασία διακόπτεται.

Οπότε η προσεγγιστική τιμή της ρίζας σε αυτό το διάστημα είναι η $x_3 = 0.9643$. Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	tol
0	0		0.001
1	1	1	0.001
2	0.9645	0.0355	0.001
3	0.9643	0.0002	0.001

◇

Άσκηση 2.4.4 Λύστε την εξίσωση

$$x - \cos(x) = 0$$

με τη μέθοδο Secant. Χρησιμοποιήστε $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ και διακόψετε τη διαδικασία όταν $|x_{k+1} - x_k| < tol$ όπου $tol = 0.005$.

Λύση

$$\text{Θεωρούμε } f(x) = x - \cos(x)$$

Βήμα 1 Υπολογίζουμε

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - \frac{f(1)(1 - 0)}{f(1) - f(0)} = 1 - \frac{0.4597}{(0.4597 - (-1))} = 0.6851$$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = |0.6851 - 1| = 0.3149 > tol = 0.005$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 2 Υπολογίζουμε

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.7363$$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = |0.7363 - 0.6851| = 0.0512 > tol = 0.005$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 Υπολογίζουμε

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.7391$$

Εφόσον $|x_4 - x_3| = |0.7391 - 0.7363| = 0.0028 < tol = 0.005$ η διαδικασία διακόπτεται.

Οπότε η προσεγγιστική τιμή της ρίζας σε αυτό το διάστημα είναι η $x_4 = 0.7391$. Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	tol
0	0		0.005
1	1		0.005
2	0.6851	0.3149	0.005
3	0.7363	0.0512	0.005
4	0.7391	0.0028	0.005

◇

2.5 Ερωτήσεις

Ερώτηση 2.5.1 Ποια είναι η γενική ιδέα μίας μεθόδου εγκλιτισμού για την εύρεση ρίζας εξίσωσης;

Ερώτηση 2.5.2 Περιγράψτε την μέθοδο της διχοτόμησης. Στη χρήση ποιου γνωστού θεωρήματος της Μαθηματικής Ανάλυσης βασίζομαστε σε αυτήν ;

Ερώτηση 2.5.3 Πότε τερματίζεται μία επαναληπτική προσεγγιστική διαδικασία επίλυσης Μη Γραμμικών Εξισώσεων ;

Ερώτηση 2.5.4 Ποια μέτρα σφάλματος χρησιμοποιούμε για τον τερματισμό της μεθόδου διχοτόμησης ή άλλων επαναληπτικών μεθόδων προσέγγισης ρίζας εξισώσεων;

Ερώτηση 2.5.5 Πως διαφοροποιείται η μέθοδος Εσφαλισμένης Θέσης (Regula Falsi) σε σχέση με την μέθοδο διχοτόμησης;

Ερώτηση 2.5.6 Εξηγήστε με γεωμετρικό τρόπο την σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου Newton.

Ερώτηση 2.5.7 Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική προσέγγιση που χρειάζεται η επαναληπτική μέθοδος Newton;

Ερώτηση 2.5.8 Πότε λέμε ότι μία επαναληπτική μέθοδος έχει τάξη σύγκλισης q ; Ποια η τάξη σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου Newton ;

Ερώτηση 2.5.9 Σε ποιες περιπτώσεις μπορεί η η επαναληπτική μέθοδος Newton να αποτύχει ;

Ερώτηση 2.5.10 Πότε θα χρησιμοποιούσαμε την τεχνική Quasi Newton; Τι υιοθετούμε όταν την εφαρμόζουμε και τι επίπτωση έχει στην επαναληπτική διαδικασία ;

Ερώτηση 2.5.11 Με τι αντικαθιστούμε την παράγωγο στη μέθοδο Secant; Ποια η τάξη σύγκλισης της συγκεκριμένης μεθόδου ;

Ερώτηση 2.5.12 Πότε επιλέγουμε και γιατί την μέθοδο Schroder; Ποιος ο τύπος της;

- Στις **άμεσες μεθόδους** συνήθως το γραμμικό σύστημα μετασχηματίζεται σε ένα ισοδύναμο σύστημα το οποίο όμως εύκολα επιλύεται.
- Και στις **επαναληπτικές μεθόδους** που βασίζονται στην κατασκευή ενός επαναληπτικού τύπου ο οποίος υπολογίζει μία ακολουθία διανυσμάτων της λύσης η οποία θα πρέπει να συγκλίνει στην λύση του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις άμεσες μεθόδους.

3.1.1 Βασικές έννοιες στους πίνακες.

Ένας **πραγματικός (μιγαδικός) πίνακας** A διάστασης $m \times n$ είναι μία διάταξη $n \cdot m$ πραγματικών (μιγαδικών αριθμών) σε m γραμμές και n στήλες.

Συχνά συμβολίζουμε τον πίνακα ως $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ και το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης με a_{ij} ή ij -στοιχείο του πίνακα. Συνήθως για τα ονόματα των πινάκων χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα και για τα ονόματα των διανυσμάτων πεζά. Από εδώ και πέρα όταν αναφερόμαστε σε πίνακες θα εννοούμε πραγματικούς πίνακες.

Αν $m = n$, τότε ο πίνακας A είναι ένας **τετραγωνικός** πίνακας τάξης n . Η **κύρια διαγώνιος** ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης n αποτελείται από τα στοιχεία $a_{ii} \forall 1 \leq i \leq n$. Ένας πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά ονομάζεται μηδενικός και συμβολίζεται συνήθως με $O_{m \times n}$. Ένας τετραγωνικός πίνακας D που έχει στοιχεία μόνο στη διαγώνιο του ονομάζεται **διαγώνιος** (diagonal).

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & d_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Διαγώνιος πίνακας $d_{ij} = 0$ για $i \neq j$

Ένας διαγώνιος πίνακας I_n του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 1, ονομάζεται **μοναδιαίος**.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μοναδιαίος πίνακας $I_{ii} = 1$ για $i = j$, $I_{ij} = 0$ για $i \neq j$

Ένας τετραγωνικός πίνακας U που έχει όλα τα στοιχεία κάτω από την κυρία διαγώνιο μηδενικά ονομάζεται **άνω-τριγωνικός** (upper triangular). Εάν και τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μηδενικά ο πίνακας ονομάζεται αυστηρά άνω-τριγωνικός (strictly upper triangular).

$$U = \begin{bmatrix} u_{1\ 1} & u_{2\ 2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1\ n-1} & u_{1\ n} \\ 0 & u_{2\ 2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2\ n-1} & u_{2\ n} \\ \cdot & 0 & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & u_{n-1\ n-1} & u_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & u_{n\ n} \end{bmatrix}$$

Άνω τριγωνικός $U_{ij} = 0$ για $i > j$,

Ένας τετραγωνικός πίνακας L που έχει όλα τα στοιχεία πάνω από την κυρία διαγώνιο μηδενικά ονομάζεται **κάτω-τριγωνικός** (lower triangular). Εάν και τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μηδενικά ο πίνακας ονομάζεται αυστηρά κάτω-τριγωνικός (strictly lower triangular).

$$L = \begin{bmatrix} l_{1\ 1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ l_{2\ 1} & l_{2\ 2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{n-1\ 1} & l_{n-1\ 2} & \cdot & \cdot & \cdot & l_{n-1\ n-1} & 0 \\ l_{n\ 1} & l_{n\ 2} & \cdot & \cdot & \cdot & l_{n\ n-1} & l_{n\ n} \end{bmatrix}$$

Κάτω τριγωνικός $L_{ij} = 0$ για $i < j$,

Ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει μη μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο και σε ίσο αριθμό άνω και κάτω διαγωνίων, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν, ονομάζεται **πίνακας δέσμη** (banded). Όταν ο αριθμός των μη μηδενικών γειτονικών προς την κύρια διαγώνιο είναι ένα τότε ο πίνακας λέγεται **τριδιαγώνιος** (tridiagonal).

$$T = \begin{bmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & a_{2\ 3} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_{3\ 2} & a_{3\ 3} & a_{3\ 4} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{n-1\ n-2} & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{n\ n-1} & a_{n\ n} \end{bmatrix}$$

Τριδιαγώνιος πίνακας T

Ορίζεται το **γινόμενο (πραγματικού ή μιγαδικού) αριθμού επί πίνακα** ως ένας πίνακας που έχει ως στοιχεία το γινόμενο του αριθμού επί το στοιχείο του πίνακα σε κάθε θέση.

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]$$

Δύο πίνακες μπορούν να προστεθούν εάν είναι της ίδιας διάστασης. Το **άθροισμα** δύο πινάκων (ίδιας διάστασης) είναι ένας πίνακας ίδιας διάστασης που έχει ως στοιχεία το άθροισμα (στην αντίστοιχη θέση) των στοιχείων των προσθετέων.

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Η **διαφορά πινάκων** ορίζεται ως $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Για την πρόσθεση πινάκων (εννοείται κατάλληλων πινάκων ώστε να γίνεται η πράξη) ισχύει:

- $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (προσεταιριστική)
- $A + O = A$ (ουδέτερο στοιχείο)
- $A + (-A) = O$

Για το γινόμενο αριθμού επί πίνακα ισχύει:

- $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$
- $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- $k \cdot (l \cdot A) = (kl) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$
- Αν $l \cdot A = O$ τότε ή $l = 0$ ή $A = O$

(Εννοείται ότι οι πίνακες είναι κατάλληλης διάστασης ώστε να γίνεται η πράξη.)

Παράδειγμα 3.1.1

$$3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 9 & -12 & 3 \\ 6 & 0 & -75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

◇

Ορίζουμε το γινόμενο **πίνακα-γραμμή (ή διάνυσμα γραμμή)** $1 \times n$ **επί πίνακα-στήλη (διανύσματος)** $n \times 1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n-1,1} \\ b_{n,1} \end{bmatrix} &= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1,n-1}b_{n-1,1} + a_{1,n}b_{n,1}] \\ &= \left[\sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} \right] \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι ένας πίνακας στοιχείο. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο θα ορίσουμε το στοιχείο του πίνακα αυτού ως **εσωτερικό γινόμενο** των δύο διανυσμάτων.

Παράδειγμα 3.1.2

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} &= [3 \times 1 + 0 \times 9 + 9 \times (-1) + (-1) \times 2] \\ &= [3 + 0 - 9 - 2] = [-8] \end{aligned}$$

◇

Ορίζουμε το γινόμενο **πίνακα** $m \times n$ **επί πίνακα-στήλη (διάνυσμα)** $n \times 1$ ως τον πίνακα-στήλη (διάνυσμα) που στην i -συνιστώσα του έχει το εσωτερικό γινόμενο της i -γραμμής του πίνακα το διάνυσμα.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n-1,1} \\ b_{n,1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1,n}b_{n,1} \\ a_{21}b_{11} + \dots + a_{2,n}b_{n,1} \\ \vdots \\ a_{m-1,1}b_{11} + \dots + a_{m-1,n}b_{n,1} \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n,1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{n-1,i}b_{i1} \\ \sum_{i=1}^n a_{n,i}b_{i1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1.3

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 9 \\ 23 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 9 + 9 \times (-1) + (-1) \times 2 \\ -1 \times 3 + 0 \times 9 + 2 \times (-1) + 9 \times 2 \\ 23 \times 3 - 4 \times 9 - 5 \times (-1) + 0 \times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 \\ 13 \\ 38 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

Ορίζουμε το γινόμενο **πίνακα** A $m \times n$ **επί** **πίνακα** B $n \times k$ ως τον πίνακα $m \times k$ για τον οποίο το (i, j) - **στοιχείο προκύπτει από το γινόμενο της i -γραμμής του πίνακα A επί της j -στήλης του πίνακα B .**

$$C = AB \Rightarrow [c_{ij}] = \left[\sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj} \right]$$

Δηλαδή, για να ορίζεται το γινόμενο ο αριθμός των στηλών του πίνακα A θα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B .

Παράδειγμα 3.1.4 Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, όπου

$x \in \mathbb{R}$. Να υπολογισθούν οι παραστάσεις: AB , BA , AA^T , CB , BC , B^2 , $A+B$, εφόσον έχουν νόημα ως πράξεις:.

Έχουμε

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + x \times 0 & 1 \times 3 + x \times 0 & -2 \times 1 + 3 \times x \\ 0 \times 1 + 2 \times 0 & 3 \times 1 + 2 \times 0 & -2 \times 0 + 2 \times 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 + 3x \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + x \times x & 1 \times 0 + x \times 2 \\ 1 \times 0 + x \times 2 & 0 \times 0 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x^2 & 2x \\ 2x & 4 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 3 \times 2 - 2 \times 4 \\ -1 \times 0 + 2 \times 0 + 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Οι υπόλοιπες παραστάσεις δεν έχουν νόημα. Για παράδειγμα, το πλήθος των στηλών του B δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του A και επομένως δεν ορίζεται το γινόμενο BA . Το άθροισμα $A+B$ δεν ορίζεται γιατί οι πίνακες A , B είναι διαφορετικού μεγέθους

◇

Για το γινόμενο πινάκων (εφόσον ορίζεται η πράξη) ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες :

- $(AB)C = A(BC)$ (προσεταιριστική)
- $A(B + C) = AB + AC$ (επιμεριστική από αριστερά ιδιότητα)
- $(B + C)A = BA + CA$ (επιμεριστική από δεξιά ιδιότητα)
- $AO = O$ ή $OA = O$
- γενικά $AI = A$ ή $IA = A$ και για τετραγωνικούς $IA = AI = A$
- $k \cdot (AB) = (k \cdot A)B = A(k \cdot B)$

Γενικά, ακόμη και αν ορίζεται το γινόμενο στους πίνακες δεν ισχύει η πάντα αντιμεταθετικότητα $AB \neq BA$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ορίζεται και η **κ-δύναμη τετραγωνικού πίνακα** ως $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ φορές}}$ και $A^0 = I$.

Παράδειγμα 3.1.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

◇

Για έναν διαγώνιο τετραγωνικό πίνακα η κ-δύναμη του είναι ένας διαγώνιος τετραγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις κ-δυνάμεις των διαγώνιων στοιχείων του αρχικού.

Παράδειγμα 3.1.6

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix}.$$

◇

3.2 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Η άμεση μέθοδος της απαλοιφής του Gauss είναι μία από τις πλέον αποτελεσματικές μεθόδους. Η μέθοδος βασίζεται στην μετατροπή του αρχικού συστήματος, μετά την εφαρμογή επιτρεπτών πράξεων, σε ένα **ισοδύναμο** σύστημα, του οποίου ο πίνακας των συντελεστών είναι **άνω τριγωνικός**. Η εφαρμογή της μεθόδου βασίζεται σε δύο στάδια:

- την **τριγωνοποίηση** και
- την **πίσω-αντικατάσταση** (backward substitution).

Η **τριγωνοποίηση** του πίνακα A των συντελεστών συστήματος βασίζεται στην απαλοιφή (μηδενισμό) όλων των συντελεστών κάτω από κάθε στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του πίνακα. Η αντίστοιχες πράξεις γίνονται παράλληλα και για το διάνυσμα σταθερών όρων του συστήματος b , έτσι ώστε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα με πίνακες συντελεστών της μορφής

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \dots \\ \dots \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Οι εκθέτες στους παραπάνω πίνακες αφορούν το κάθε από τα n βήματα της τριγωνοποίησης. Κατά το i βήμα δεν μεταβάλλονται οι συντελεστές που έχουν υπολογιστεί στα προηγούμενα βήματα.

Το νέο ισοδύναμο σύστημα λύνεται εύκολα με διαδοχικές αντικαταστάσεις, από την τελευταία εξίσωση προς την πρώτη. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται προς τα **πίσω αντικατάσταση** backward substitution:

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} \left\{ b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)} x_j \right\}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Παράδειγμα 3.2.1 Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Αρχικά απαλείφουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που βρίσκονται κάτω από το διαγώνιο στοιχείο a_{11} :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 & 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 & 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 & 2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) \\ -3 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2 & 2 + \frac{3}{2} \cdot 1 & 4 + \frac{3}{2} \cdot 3 & -2 + \frac{3}{2} \cdot (-1) \\ 2 - \frac{2}{2} \cdot 2 & -1 - 1 \cdot 1 & -1 - 1 \cdot 3 & 3 - \frac{2}{2} \cdot (-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 - \frac{1}{2} \cdot 5 \\ 1 + \frac{3}{2} \cdot 5 \\ 3 - 5 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 7/2 & 17/2 & -7/2 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11/2 \\ 17/2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια απαλείφουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης που βρίσκονται κάτω από το διαγώνιο στοιχείο a_{22} :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 7/2 - \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{2} & 17/2 - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2} & -7/2 - \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{2} \\ 0 & -2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} & -4 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} & 4 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11/2 \\ 17/2 - \frac{7}{5} \cdot \frac{11}{2} \\ -2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 39/5 & -7 \\ 0 & 0 & -18/5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11/2 \\ 4/5 \\ 12/5 \end{bmatrix}.$$

Και τέλος απαλείφουμε τα στοιχεία της τρίτης στήλης που βρίσκονται κάτω από το διαγώνιο στοιχείο a_{33} :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 39/5 & -7 \\ 0 & 0 & -18/5 + \frac{18}{39} \cdot \frac{39}{5} & 6 - 7 \cdot \frac{18}{39} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11/2 \\ 4/5 \\ 12/5 + \frac{4}{5} \cdot \frac{18}{39} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 39/5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{108}{39} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11/2 \\ 4/5 \\ \frac{108}{39} \end{bmatrix}.$$

Το τελικό σύστημα έχει άνω τριγωνικό πίνακα οπότε μπορούμε να λύσουμε την τελευταία εξίσωση $\frac{108}{39}x_4 = \frac{108}{39}$ προς x_4 , και διαπιστώνουμε εύκολα ότι $x_4 = 1$. Μετά αντικαθιστούμε το x_4 στην προτελευταία εξίσωση και έχουμε:

$$39x_3/5 - 7 \cdot 1 = 4/5$$

ή ισοδύναμα

$$39x_3/5 = 7 + 4/5 = 39/5,$$

οπότε $x_3 = 1$.

Συνεχίζοντας στη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$5x_2/2 + x_3/2 + 5x_4/2 = 11/2$$

από όπου αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές έχουμε

$$5x_2/2 + 1/2 + 5/2 = 11/2$$

ή ισοδύναμα $5x_2/2 = 5/2$ και $x_2 = 1$.

Τέλος, από την πρώτη εξίσωση

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$$

βύνοντας λαμβάνουμε $x_1 = 1$. ◇

Όταν η μέθοδος προγραμματιστεί σε έναν υπολογιστή, δεν είναι αναγκαίο, σε κάθε βήμα της απαλοιφής, να αποθηκεύουμε την νέα κατάσταση των πινάκων του ισοδύναμου συστήματος σε διαφορετική θέση από την προηγούμενη.

Η διαδικασία μπορεί να γίνει στο χαρτί και με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα των συντελεστών του συστήματος.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} & b_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

Σε αυτόν τον πίνακα εφαρμόζουμε **γραμμοπράξεις πινάκων** όπως η αντικατάσταση μίας γραμμής j με το άθροισμα αυτής της γραμμής και ενός πολλαπλασίου μίας άλλης ($\Gamma_j \rightarrow \Gamma_j + m_{ji}\Gamma_i$). Μετά την πράξη αυτή οδηγούμαστε σε **γραμμοϊσοδύναμους** πίνακες. **Τα συστήματα που αντιστοιχούν σε γραμμοϊσοδύναμους πίνακες είναι ισοδύναμα (έχουν τις ίδιες λύσεις).**

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Gauss ξεκινάμε από την πρώτη γραμμή του επαυξημένου πίνακα. Στο πρώτο βήμα, εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις, μηδενίζουμε τα στοιχεία του επαυξημένου πίνακα που βρίσκονται στην πρώτη στήλη κάτω από το διαγώνιο στοιχείο της πρώτης γραμμής.

Στο δεύτερο βήμα, συνεχίζουμε στη δεύτερη γραμμή όπου, με τη χρήση γραμμοπράξεων κάνουμε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη με το διαγώνιο στοιχείο της δεύτερης γραμμής και κάτω από αυτό μηδενικά. Και συνεχίζουμε στην επόμενη γραμμή.

Έτσι, σε καθένα από τα $n - 1$ πρώτα βήματα της μεθόδου, μηδενίζουμε με γραμμοπράξεις τα στοιχεία που υπάρχουν κάτω από το διαγώνιο στοιχείο της γραμμής στην οποία εργαζόμαστε. Δηλαδή, στο i βήμα μηδενίζουμε τα στοιχεία κάτω από το διαγώνιο στοιχείο $a_{ii}^{(i-1)}$, το οποίο ονομάζεται **οδηγό στοιχείο του βήματος**, κάνοντας τις γραμμοπράξεις

$$\Gamma_j^{(i)} \rightarrow \Gamma_j^{(i-1)} - m_{ji} \Gamma_i^{(i-1)}, \text{ για } j = i + 1, \dots, n - 1,$$

όπου $m_{ji} = \frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}$ και δεν μεταβάλλουμε την i γραμμή ($a_{ik}^{(i)} = a_{ik}^{(i-1)}$ για $k = i, i + 1, \dots, n$).

Εάν σε κάποιο βήμα i από τα $n - 1$ πρώτα βήματα της μεθόδου **το διαγώνιο στοιχείο είναι μηδέν, η μέθοδος αποτυγχάνει**. Το ίδιο ισχύει εάν και στο n -οστό βήμα στο οποίο απλά εξετάζουμε εάν το διαγώνιο στοιχείο της n γραμμής είναι μηδέν. Εάν η μέθοδος δεν αποτύχει στη φάση της τριγωνοποίησης προχωράμε στη φάση της προς τα πίσω αντικατάστασης για να βρούμε την λύση.

Παράδειγμα 3.2.2 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας και οι γραμμοπράξεις του πρώτου βήματος είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - (1/1)\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (2/1)\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Στους υπολογισμούς αυτούς $m_{21} = \frac{1}{1}$ και $m_{31} = \frac{2}{1}$. Αφού μηδενίσαμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, συνεχίζουμε με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (1/1)\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

Στους υπολογισμούς αυτούς $m_{32} = \frac{1}{1}$. Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι το αντίστοιχο σύστημα

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\y + 4z &= 7 \\-2z &= -2\end{aligned}$$

επιλύεται εύκολα. Πράγματι, από την τρίτη εξίσωση βρίσκουμε $z = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $y = 3$, και από την πρώτη $x = 1$. Τελικά, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x, y, z) = (1, 3, 1)$. \diamond

Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου βελτιώνεται σημαντικά αν εφαρμόσουμε την τεχνική της **μερικής οδήγησης**. Σύμφωνα με την τεχνική αυτή, στο κάθε βήμα της διαδικασίας, βρίσκουμε το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο από τα στοιχεία από το διαγώνιο στοιχείο και κάτω στη στήλη του. Εάν το στοιχείο αυτό δεν είναι το διαγώνιο στοιχείο, εναλλάσσουμε την αντίστοιχη γραμμή του επαυξημένου πίνακα (δηλαδή εξίσωση) με την γραμμή του διαγώνιου στοιχείου. Δηλαδή, στο i -βήμα εναλλάσσουμε την i -οστή γραμμή με την k -οστή ($i < k$) γραμμή, για την οποία ισχύει

$$|a_{ki}^{(i-1)}| > |a_{ji}^{(i-1)}|, j = i + 1, i + 2, \dots, n.$$

Η εφαρμογή της τεχνικής αυτής είναι χρήσιμη στην περίπτωση που κάποιο μηδενικό στοιχείο ευρεθεί στην κυρία διαγώνιο. Εφόσον ο πίνακας του συστήματος δεν είναι αντιστρέψιμος (έχει μηδενική ορίζουσα, είναι ιδιάζων όπως λέμε οπότε και το σύστημα δεν έχει λύση ή έχει άπειρες λύσεις) η μέθοδος θα αποτύχει είτε εφαρμόσουμε την μερική οδήγηση είτε όχι. Ωστόσο η εύρεση μηδενικού οδηγού στοιχείου στη διαγώνιο σε ένα από τα i βήματα της μεθόδου δεν συνεπάγεται και ότι ο πίνακας του συστήματος είναι ιδιάζων. Η εναλλαγή των γραμμών και η τοποθέτηση ενός μη μηδενικού "οδηγού στοιχείου" στην διαγώνιο (εφόσον αυτό υπάρχει ανάμεσα στα στοιχεία που είναι στην στήλη του διαγώνιου στοιχείου και κάτω από αυτό) αποτρέπει την αποτυχία της μεθόδου όταν το σύστημα έχει λύση. Επιπλέον η αποφυγή διαίρεσης με "μικρούς αριθμούς" οδηγεί στην ελάττωση των σφαλμάτων αποκοπής, τα οποία σε ειδικές περιπτώσεις είναι όντως σημαντικά σε μέγεθος.

Παράδειγμα 3.2.3 Εάν θέλουμε να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Η απλή εφαρμογή της μεθόδου του Gauss φανερά αποτυγχάνει διότι, δεν μπορούμε να απαλείψουμε την πρώτη στήλη διότι το a_{11} είναι μηδέν. Σε αυτό το παράδειγμα

η εφαρμογή της μερικής οδήγησης είναι αναγκαία για να συνεχίσουμε την εφαρμογή του αλγόριθμου. Ωστόσο, όπως αναφέραμε παραπάνω η εφαρμογή της τεχνικής αυτής ελαττώνει την επιρροή των σφαλμάτων αποκοπής στα αποτελέσματα της διαδικασίας και για αυτό εφαρμόζεται άσχετα με το εάν είναι ή δεν είναι μηδέν το διαγώνιο στοιχείο. το δοθέν σύστημα βλέπουμε πως από τα στοιχεία της πρώτης στήλης το $a_{21} = 5$ είναι το μεγαλύτερο. Ανταλλάσσουμε λοιπόν τα στοιχεία της πρώτης και δεύτερης γραμμής.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Μετά την απαλοιφή έχουμε

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2.6 & 5.2 & -0.8 \\ 0 & -1.4 & -1.8 & 2.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Από τα στοιχεία της δεύτερης στήλης έχουμε μεγαλύτερο το $a_{32} = 2.6$, οπότε ανταλλάσσουμε την δεύτερη και την τρίτη εξίσωση έχοντας

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2.6 & 5.2 & -0.8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1.4 & -1.8 & 2.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Απαλείφοντας έχουμε,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2.6 & 5.2 & -0.8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1.8 + \frac{1.4}{2.6} \cdot 5.2 & 2.2 - \frac{1.4}{2.6} \cdot 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \\ -1 + \frac{1.4}{2.6} \cdot 7 \end{bmatrix} \quad \eta$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2.6 & 5.2 & -0.8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \\ \frac{36}{13} \end{bmatrix}.$$

Στο τέλος δεν χρειάζεται αναδιάταξη αφού για τα στοιχεία της τρίτης στήλης έχουμε $|a_{33}| > |a_{43}|$. Κάνουμε απλά την απαλοιφή και:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2.6 & 5.2 & -0.8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{13} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \\ \frac{36}{13} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Από την τέταρτη εξίσωση παίρνουμε $82x_4/39 = 82/39$, άρα $x_4 = 1$. Μετά αντικαθιστώ το x_4 στην προτελευταία εξίσωση και έχουμε :

$$39x_3/5 - 7 \cdot 1 = 4/5,$$

οπότε

$$39x_3/5 = 7 + 4/5 = 39/5,$$

από όπου $x_3 = 1$. Συνεχίζοντας έχουμε

$$5x_2/2 + x_3/2 + 5x_4/2 = 11/2,$$

άρα $5x_2/2 + 1/2 + 5/2 = 11/2$ ή $5x_2/2 = 5/2$ και $x_2 = 1$.

Τέλος, από την πρώτη εξίσωση

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$$

αντικαθιστώντας τις προηγούμενες υπολογισμένες τιμές λαμβάνουμε $x_1 = 1$.

◇

Παράδειγμα 3.2.4 Ας δούμε ένα ανάλογο παράδειγμα, λημένο με τον επαυξημένο. Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ 4u - 6v &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9 \end{aligned}$$

Το οποίο έχει επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array} \right]$$

Εφαρμόζουμε την μερική οδήγηση:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array} \right]$$

Και λαμβάνοντας $m_{21} = \frac{2}{4}$, $m_{31} = \frac{-2}{4}$ εφαρμόζουμε τις γραμμοπράξεις.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (-2/4)\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - (2/4)\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

Στο επόμενο βήμα δεν χρειάζεται εναλλαγή γραμμών και άμεσα, λαμβάνοντας $m_{32} = \frac{4}{4}$ εφαρμόζουμε τις γραμμοπράξεις

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (4/4)\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί με το ακόλουθο, ισοδύναμο προς το αρχικό, σύστημα:

$$\begin{aligned} 4u - 6v &= -2 \\ 4v + w &= 6 \\ w &= 2 \end{aligned}$$

Από όπου έχουμε τη λύση

$$\begin{aligned} w &= 2 \\ 4v &= 6 - w \Leftrightarrow v = 1 \\ 4u - 6v &= -2 \Leftrightarrow 4u = 6v - 2 \Leftrightarrow u = 1 \end{aligned}$$

◇

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- 1 Το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάθε διάνυσμα b .
- 2 $\det(A) \neq 0$ (όπου $\det(A)$ η ορίζουσα του πίνακα).
- 3 Ο πίνακας είναι μη ιδιάζων, δηλαδή υπάρχει ο A^{-1} .

Συμπληρώνουμε επίσης την επόμενη ισοδύναμη πρόταση:

- 4 Η απαλοιφή Gauss με εναλλαγή γραμμών μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε διάνυσμα b .

Είναι γνωστό ότι ένα σύστημα του οποίου ο πίνακας των συντελεστών έχει ορίζουσα 0, είτε είναι ασυμβίβαστο (δεν έχει λύση), είτε δεν έχει μοναδική λύση. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις όλες οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης συστημάτων αποτυγχάνουν. Ωστόσο και πίνακες οι οποίοι δεν έχουν μηδενική ορίζουσα, αλλά για παράδειγμα ορίζουσα κοντά στο μηδέν, οδηγούν τη μέθοδο Gauss σε κακά αποτελέσματα.

Παράδειγμα 3.2.5 Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 0.780x + 0.563y &= 0.217 \\ 0.913x + 0.659y &= 0.254 \end{aligned}$$

με προφανή λύση το $(x, y) = (1, -1)$ και ορίζουσα του πίνακα που ισούται με 10^{-6} . Ας δούμε πιο αναλυτικά τι υπολογίζει η μέθοδος Gauss. Κάνοντας το πρώτο (και μοναδικό βήμα) αποκοπής το σύστημα έχει την ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{aligned} 0.780x + 0.563y &= 0.217 \\ 0x + \left(0.659 - \frac{0.913 \cdot 0.563}{0.780}\right)y &= 0.254 - \frac{0.913 \cdot 0.217}{0.780} \end{aligned}$$

ή τελικά κάνοντας τις πράξεις

$$\begin{aligned} 0.780x + 0.563y &= 0.217 \\ 0x + \frac{0.659 \cdot 0.780 - 0.913 \cdot 0.563}{0.780}y &= 0.254 - \frac{0.913 \cdot 0.217}{0.780} \end{aligned}$$

Ο συντελεστής του y στην τελευταία εξίσωση έχει αριθμητή ίσο με την ορίζουσα του πίνακα A , δηλαδή 10^{-6} . Είναι δηλαδή ένας πολύ μικρός αριθμός. Όταν, στην προς τα πίσω αντικατάσταση, για να υπολογίσουμε το y , ο συντελεστής αυτός διαιρεί το σταθερό όρο υπάρχει μεγάλο σφάλμα αποκοπής (το οποίο εξαρτάται από τον αριθμό των ψηφίων και με τη σειρά με την οποία γίνονται οι πράξεις). \diamond

Τέλος, υπάρχουν πίνακες για τους οποίους η δομή του μας εξασφαλίζει τόσο η ορίζουσά τους δεν είναι μηδέν όσο και ότι η μέθοδος Gauss δεν θα χρειαστεί να κάνει εναλλαγές γραμμών. Μία τέτοια κατηγορία πινάκων είναι οι **αυστηρά διαγώνια υπερτερόντες** πίνακες για τους οποίους ισχύει ότι

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Ένα παράδειγμα ενός πίνακα που είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερόντων, είναι ο ακόλουθος πίνακας:

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 10 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 8 & -3 \\ 6 & 5 & -2 & 15 \end{bmatrix}.$$

3.3 Μέθοδος παραγοντοποίησης LU Doolittle

Όταν το γραμμικό σύστημα μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο απαλοιφής Gauss κατά μοναδικό τρόπο, δηλαδή χωρίς υποχρεωτικές εναλλαγές γραμμών

(οδήγηση λόγω μηδενικών οδηγών στοιχείων διαγωνίου σε κάποια φάση της εφαρμογής της μεθόδου), τότε ο πίνακας A μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα L και έναν άνω τριγωνικό πίνακα U .

Επίσης ανάλογα με την επιλογή των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα L ή U προκύπτει και μία συγκεκριμένη μέθοδος αυτής της κατηγορίας. Όταν επιλέγουμε όλα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα L ίσα με 1 τότε προκύπτει η μέθοδος **LU Doolittle**. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα $Ax = b$, γράφεται:

$$LUx = b,$$

Πιο αναλυτικά αναλύουμε τον πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου **LU Doolittle** έχει τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1.

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του με την 1^η γραμμή του L και εξισώνοντας με την πρώτη στήλη του πίνακα A . Δηλαδή έχουμε

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης του πίνακα L πολλαπλασιάζοντας 1^η στήλη U με την κάθε γραμμή του L και καταλήγουμε στη σχέση: Δηλαδή έχουμε

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Βήμα 2 έως $n - 1$.

Συνεχίζουμε, και για $i = 2, 3, \dots, n - 1$ υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της $i^{\text{οστης}}$ γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την $i^{\text{οστη}}$ και μετά) με την $i^{\text{οστη}}$ γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A . Δηλαδή έχουμε

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, n.$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της $i^{\text{οστης}}$ στήλης του πίνακα L πολλαπλασιάζοντας $i^{\text{οστη}}$ στήλη U με την κάθε γραμμή του L (από τη με $i + 1$ και μετά) και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A . Δηλαδή έχουμε

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right), \quad j = i + 1, i + 2, \dots, n.$$

Βήμα n .

Τέλος, μένει να υπολογίσουμε το u_{nn} πολλαπλασιάζοντας τη $n^{\text{οστη}}$ στήλη του U με την $n^{\text{οστη}}$ γραμμή του L και εξισώνοντας με το a_{nn} έχουμε $u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}l_{kn}$

Εάν κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης των $n-1$ πρώτων βημάτων υπολογίσουμε $u_{ii} = 0$ ο αλγόριθμος αποτυγχάνει και δεν είναι δυνατό να γίνει παραγοντοποίηση. Εάν το $u_{nn} = 0$ τότε ο πίνακας είναι ιδιάζοντας (δηλαδή έχει ορίζουσα 0, δεν αντιστρέφεται).

Για έναν 3×3 πίνακα η παραπάνω παραγοντοποίηση είναι η ακόλουθη

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Βήμα 1.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη του του U με την πρώτη γραμμή του L και, λόγω της ειδικής μορφής των L και U , μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικά τις τιμές των στοιχείων της γραμμής του U εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A . Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11} \\ u_{12} &= a_{12} \\ u_{13} &= a_{13} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του U με κάθε γραμμή του L και υπολογίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του L .

$$\begin{aligned} l_{21}u_{11} &= a_{21} \Leftrightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31}u_{11} &= a_{31} \Leftrightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{aligned}$$

Βήμα 2.

Υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της δεύτερης γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την από τη δεύτερη και μετά) με την δεύτερη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} \Leftrightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= a_{23} \Leftrightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του πίνακα L (δηλαδή το l_{32} πολλαπλασιάζοντας δεύτερη στήλη U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \Leftrightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{2,2}}$$

Βήμα 3.

Υπολογίζουμε το $u_{3,3}$ πολλαπλασιάζοντας την τρίτη στήλη του U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με το a_{33} έχουμε

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \Leftrightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

Παράδειγμα 3.3.1 Εφαρμόζουμε τον παραπάνω αλγόριθμο στον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη του U με την πρώτη γραμμή του L και, λόγω της ειδικής μορφής των L και U , μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικά τις τιμές των στοιχείων της γραμμής του U εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A . Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 25 \\ u_{12} &= 5 \\ u_{13} &= 1 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του U με κάθε γραμμή του L και υπολογίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του L .

$$\begin{aligned} l_{21} \cdot 25 &= 64 \Leftrightarrow l_{21} = \frac{64}{25} \\ l_{31} \cdot 25 &= 144 \Leftrightarrow l_{31} = \frac{144}{25} \end{aligned}$$

Η παραγοντοποίηση μέχρι τώρα είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Βήμα 2.

Υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της δεύτερης γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την από τη δεύτερη και μετά) με την δεύτερη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$\begin{aligned}\frac{64}{25} \cdot 5 + u_{22} &= 8 \Leftrightarrow u_{22} = 8 - \frac{64}{25} \cdot 5 = -\frac{24}{5} \\ \frac{64}{25} \cdot 1 + u_{23} &= 1 \Leftrightarrow u_{23} = 1 - \frac{64}{25} \cdot 1 = -\frac{39}{25}\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του πίνακα L (δηλαδή το l_{32}) πολλαπλασιάζοντας δεύτερη στήλη U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$\frac{144}{25} \cdot 5 + l_{32} \cdot \left(-\frac{24}{5}\right) = 12 \Leftrightarrow l_{32} = \frac{12 - \frac{144}{25} \cdot 5}{-\frac{24}{5}} = \frac{7}{2}$$

Η παραγοντοποίηση μετά το δεύτερο βήμα είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & \frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{39}{25} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Βήμα 3.

Υπολογίζουμε το $u_{3,3}$ πολλαπλασιάζοντας την τρίτη στήλη του U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με το a_{33} έχουμε

$$\frac{144}{25} \cdot 1 + \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{39}{25}\right) + u_{33} = a_{33} \Leftrightarrow u_{33} = 1 - \frac{144}{25} \cdot 1 - \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{39}{25}\right) = \frac{7}{10}$$

Τελικά, η παραγοντοποίηση είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & \frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{39}{25} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

◇

Παράδειγμα 3.3.2 Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο LU Doolittle στον 4×4 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη του του U με την πρώτη γραμμή του L και, λόγω της ειδικής μορφής των L και U , μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικά τις τιμές των στοιχείων της γραμμής του U εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A . Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned}u_{11} &= 6 \\u_{12} &= 2 \\u_{13} &= 1 \\u_{14} &= -1\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του U με κάθε γραμμή του L και υπολογίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του L .

$$\begin{aligned}l_{21} \cdot 6 &= 2 \Leftrightarrow l_{21} = \frac{1}{3} \\l_{31} \cdot 6 &= 1 \Leftrightarrow l_{31} = \frac{1}{6} \\l_{41} \cdot 6 &= -1 \Leftrightarrow l_{41} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Η παραγοντοποίηση μέχρι τώρα είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & l_{32} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Βήμα 2.

Υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της δεύτερης γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την από τη δεύτερη και μετά) με την δεύτερη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot 2 + u_{22} &= 4 \Leftrightarrow u_{22} = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot 1 + u_{23} &= 1 \Leftrightarrow u_{23} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot (-1) + u_{24} &= 0 \Leftrightarrow u_{24} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του πίνακα L πολλαπλασιάζοντας δεύτερη στήλη U με την τρίτη και την τέταρτη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα

στοιχεία του πίνακα A .

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} \cdot 2 + l_{32} \cdot \frac{10}{3} &= 1 \Leftrightarrow l_{32} = \frac{1 - \frac{2}{6}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} \cdot 2 + l_{42} \cdot \frac{10}{3} &= 0 \Leftrightarrow l_{42} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Η παραγοντοποίηση μετά το δεύτερο βήμα είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Βήμα 3.

Υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της τρίτης γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την από την τρίτη και μετά) με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + u_{33} &= 4 \Leftrightarrow u_{33} = 4 - \frac{1}{6} - \frac{2}{15} = \frac{37}{10} \\ \frac{1}{6} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + u_{34} &= -1 \Leftrightarrow u_{34} = -1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = -\frac{9}{10}\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της τρίτης στήλης του πίνακα L (δηλαδή το l_{43}) πολλαπλασιάζοντας τρίτη στήλη U με την τέταρτη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$-\frac{1}{6} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} + l_{43} \cdot \frac{37}{10} = -1 \Leftrightarrow l_{43} = \frac{-1 + \frac{1}{6} - \frac{2}{30}}{\frac{37}{10}} = -\frac{9}{37}$$

Η παραγοντοποίηση μετά το δεύτερο βήμα είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Βήμα 4.

Υπολογίζουμε το u_{44} πολλαπλασιάζοντας την τέταρτη στήλη του U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με το a_{44} έχουμε

$$-1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \left(-\frac{9}{10}\right) \cdot \left(-\frac{9}{37}\right) + u_{44} = 3 \Leftrightarrow u_{44} = 3 - \frac{2}{6} - \frac{3}{30} - \frac{81}{370} = \frac{191}{74}$$

Τελικά, η παραγοντοποίηση είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{bmatrix}$$

◇

Μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου της μεθόδου LU Doolittle, το αρχικό σύστημα ανάγεται στην επίλυση των δύο ακόλουθων γραμμικών συστημάτων

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας προς τα **εμπρός αντικατάσταση** και προς τα **πίσω αντικατάσταση** αντίστοιχα.

Παράδειγμα 3.3.3 Έστω ότι έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 73 \\ 157 \end{bmatrix}.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & \frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{39}{25} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 73 \\ 157 \end{bmatrix}.$$

Λύνουμε αρχικά το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & \frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 73 \\ 157 \end{bmatrix}.$$

Από όπου παίρνουμε με προς τα εμπρός αντικατάσταση

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 73 - \frac{64}{25}x' \\ 157 - \frac{144}{25}x' - \frac{7}{2}y' \end{bmatrix} \text{ και τελικά } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -\frac{159}{25} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια λύνουμε το

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{39}{25} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -\frac{159}{25} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} \text{ από όπου παίρνω με προς τα πίσω αντικατά-}$$

σταση

$$\begin{bmatrix} 25x \\ -\frac{24}{5}y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 - 5x - z \\ -\frac{159}{25} + \frac{39}{25}z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και έχουμε τελικά } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

◇

Όπως έχουμε αναφέρει, η μέθοδος παραγοντοποίησης LU που περιγράφουμε παραπάνω δεν μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία πάντα.

Παράδειγμα 3.3.4 Για παράδειγμα εάν προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε με LU στον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη του U με την πρώτη γραμμή του L και, λόγω της ειδικής μορφής των L και U , μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικά τις τιμές των στοιχείων της γραμμής του U εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A . Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1 \\ u_{12} &= 1 \\ u_{13} &= 1 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του U με κάθε γραμμή του L και υπολογίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του L .

$$\begin{aligned} l_{21} \cdot 1 &= 2 \Leftrightarrow l_{21} = 2 \\ l_{31} \cdot 1 &= 4 \Leftrightarrow l_{31} = 4 \end{aligned}$$

Βήμα 2.

Υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της δεύτερης γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την από τη δεύτερη και μετά) με την δεύτερη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$2 \cdot 1 + u_{22} = 2 \Leftrightarrow u_{22} = 0$$

Δεν μπορούμε να συνεχίσουμε διότι $u_{22} = 0$ και σε επόμενο βήμα το στοιχείο αυτό εμφανίζεται σε παρονομαστή. \diamond

Η μέθοδος παραγοντοποίησης LU Doolittle αποτυγχάνει όταν κατά την εφαρμογή της μεθόδου Gauss στο ίδιο σύστημα κάνουμε αναγκαστικές εναλλαγές γραμμών. Είναι γεγονός ότι η μέθοδος Gauss και η παραγοντοποίηση LU Doolittle συνδέονται. Ο πίνακας L έχει ως στοιχεία τα $m_{ij} = \frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}$ που υπολογίζουμε για την

Εάν για παράδειγμα, στην εφαρμογή με τη μέθοδο Gauss αρχικά εναλλάξουμε την 1^η με τη 2^η γραμμή και στη συνέχεια στο δεύτερο βήμα της μεθόδου τη 2^η με την 3^η γραμμή, ο συνολικός μεταθετικός πίνακας που εφαρμόζει τις εναλλαγές είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η θεωρία λέει ότι το ισοδύναμο προς το αρχικό σύστημα $PAx = Pb$ μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο παραγοντοποίησης LU Doolittle.

Παράδειγμα 3.3.6 Εάν συνεχίσουμε το παραπάνω παράδειγμα και εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο LU Doolittle αφού εναλλάξουμε την 2^η με την 3^η γραμμή. Τότε έχουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη του του U με την πρώτη γραμμή του L και, λόγω της ειδικής μορφής των L και U , μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικά τις τιμές των στοιχείων της γραμμής του U εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A . Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1 \\ u_{12} &= 1 \\ u_{13} &= 1 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του U με κάθε γραμμή του L και υπολογίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του L .

$$\begin{aligned} l_{21} \cdot 1 &= 4 \Leftrightarrow l_{21} = 4 \\ l_{31} \cdot 1 &= 2 \Leftrightarrow l_{31} = 2 \end{aligned}$$

Βήμα 2.

Υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της δεύτερης γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την από τη δεύτερη και μετά) με την δεύτερη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$\begin{aligned} 4 \cdot 1 + u_{22} &= 6 \Leftrightarrow u_{22} = 6 - 4 = 2 \\ 4 \cdot 1 + u_{23} &= 8 \Leftrightarrow u_{23} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του πίνακα L (δηλαδή το l_{32}) πολλαπλασιάζοντας δεύτερη στήλη U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$1 \cdot 2 + l_{32} \cdot 2 = 2 \Leftrightarrow l_{32} = 0$$

Βήμα 3.

Υπολογίζουμε το $u_{3,3}$ πολλαπλασιάζοντας την τρίτη στήλη του U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με το a_{33} έχουμε

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + u_{33} = 5 \Leftrightarrow u_{33} = 3$$

Παρατηρούμε ότι τώρα υπάρχει παραγοντοποίηση LU Doolittle η

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

◇

3.4 Αντιστροφή πίνακα

Όπως είπαμε, η μέθοδος της παραγοντοποίησης LU Doolittle είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο Gauss, ωστόσο υπερτερεί στην περίπτωση όπου έχουμε πολλά συστήματα με τον ίδιο πίνακα συντελεστών και με διαφορετικά δεξιά μέρη. Σε μία τέτοια περίπτωση, αρκεί να παραγοντοποιήσουμε τον πίνακα του συστήματος μία φορά και να λύσουμε με την παραγοντοποιημένη μορφή κάθε σύστημα που έχουμε. Αυτό είναι πολύ πιο οικονομικό από το να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gauss για κάθε σύστημα. Ως μία τέτοια περίπτωση επίλυσης πολλών συστημάτων είναι μπορεί να θεωρηθεί και η την αντιστροφή ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, μιας και απαιτεί τη λύση των n συστημάτων τα οποία εκφράζονται με την εξίσωση

$$AX = I, \quad I \text{ μοναδιαίος πίνακας}$$

όπου οι στήλες του πίνακα X , ορίζουν τις στήλες του πίνακα A^{-1} . Μπορούμε να υλοποιήσουμε την πράξη της αντιστροφής αν παραγοντοποιήσουμε τον πίνακα A στην μορφή $A = LU$, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$LUX = I,$$

και εφαρμόσουμε διαδοχικά την διαδικασία της προς τα εμπρός και πίσω αντικατάστασης για την επίλυση των συστημάτων:

$$Ly = e_1, \quad Ux_1 = y$$

$$Ly = e_2, \quad Ux_2 = y$$

$$\vdots$$

$$Ly = e_n, \quad Ux_n = y$$

όπου x_1, x_2, \dots, x_n οι στήλες του αντίστροφου πίνακα και e_1, e_2, \dots, e_n οι αντίστοιχες στήλες του μοναδιαίου πίνακα.

Παράδειγμα 3.4.1 Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω για να βρούμε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ξέρουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & \frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{39}{25} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

Θα βρούμε την πρώτη στήλη του αντιστρόφου λύνοντας το

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & \frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{39}{25} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύνουμε το

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & \frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{64}{25} \\ -\frac{144}{25} - \frac{7}{2} \left(-\frac{64}{25}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{64}{25} \\ \frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

Και στη συνέχεια το

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{39}{25} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{64}{25} \\ \frac{16}{5} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{21} \\ -\frac{20}{21} \\ \frac{32}{7} \end{bmatrix}$$

Θα βρούμε την δεύτερη στήλη του αντιστρόφου, με την ίδια διαγωνιοποίηση, λύνοντας το

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{17}{12} \\ -\frac{5}{1} \end{bmatrix}$$

Και τελικά θα βρούμε την τρίτη στήλη του αντιστρόφου, με την ίδια διαγωνιοποίηση, λύνοντας το

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} \\ -\frac{13}{28} \\ \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

Οπότε ο αντίστροφος είναι ο

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{28} \\ -\frac{20}{21} & \frac{17}{12} & -\frac{13}{28} \\ \frac{32}{7} & -\frac{5}{1} & \frac{10}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.04762 & -0.08333 & 0.03571 \\ -0.9524 & 1.417 & -0.4643 \\ 4.571 & -5.000 & 1.429 \end{bmatrix}.$$

◇

3.5 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 3.5.1 Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss χωρίς οδήγηση το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ 6x + 6y + 2z &= 2 \\ -x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας και για τον μηδενισμό των στοιχείων της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο έχουμε $m_{21} = \frac{6}{3} = 2$ και $m_{31} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - (2)\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (-1/3)\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array} \right]$$

Αφού μηδενίσαμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, συνεχίζουμε με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης όπου $m_{32} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (5/6)\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right]$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι το αντίστοιχο σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ 2y + 4z &= 2 \\ -\frac{2}{3}z &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

επιλύεται εύκολα με την προς τα πίσω αντικατάσταση. Πράγματι, από την τρίτη εύκολα εξίσωση βρίσκουμε $z = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $2y + 4 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow y = -1$, και από την πρώτη $3x + 2 \cdot (-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Τελικά, το σύστημα έχει την μοναδική λύση $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.

Άσκηση 3.5.2 Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση το σύστημα

$$\begin{aligned} 6x + 10y &= 2 \\ 12x + 26y + 4z &= 2 \\ 9y + 12z &= 3 \end{aligned}$$

Λύση

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 10 & 0 & 2 \\ 12 & 26 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \end{array} \right]$$

και παρατηρούμε ότι το $a_{21} = 12$ είναι το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο της στήλης του οπότε κάνουμε εναλλαγή γραμμών για την εφαρμογή της μερικής οδήγησης. Ο πίνακας τώρα είναι

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 26 & 4 & 2 \\ 6 & 10 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \end{array} \right]$$

Οπότε για τον μηδενισμό των στοιχείων της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο έχουμε $m_{21} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ και $m_{31} = \frac{0}{12} = 0$ (δηλαδή στην ουσία δεν είναι απαραίτητη η απαλοιφή για τον δεύτερο πολλαπλασιαστή).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 26 & 4 & 2 \\ 6 & 10 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 26 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 0\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 26 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \end{array} \right]$$

Αφού μηδενίσαμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, συνεχίζουμε με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης. Το $a_{32} = 9$ είναι το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο στη δεύτερη στήλη κάτω από τη διαγώνιο.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 26 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 26 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Αφού Οπότε τώρα συνεχίζουμε την απαλοιφή υπολογίζοντας το όπου $m_{32} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 26 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (-1/3)\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 26 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι το αντίστοιχο σύστημα

$$\begin{aligned} 12x + 26y + 4z &= 2 \\ 9y + 12z &= 3 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

επιλύεται εύκολα με την προς τα πίσω αντικατάσταση. Πράγματι, από την τρίτη εύκολα εξίσωση βρίσκουμε $z = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $9y + 12 \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow y = -1$, και από την πρώτη $12x + 26 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow x = 2$. Τελικά, το σύστημα έχει την μοναδική λύση $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

Άσκηση 3.5.3 Να ηλυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x + y + 4z &= 7 \\ \frac{x}{2} - y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Λύση

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα και παρατηρούμε ότι το $a_{11} = 1$ είναι το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο της στήλης του (ίσο με το a_{21} αλλά όχι μικρότερο) οπότε δεν χρειάζεται να κάνουμε εναλλαγή γραμμών με την εφαρμογή της μερικής οδήγησης. Οπότε για τον μηδενισμό των στοιχείων της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο έχουμε $m_{21} = \frac{1}{2} = 1$ και $m_{31} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (1/2)\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{array} \right]$$

Αφού μηδενίσαμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, συνεχίζουμε με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης. Μιας και το $a_{11} = 0$ η μέθοδος

απαλοιφής Gauss χωρίς μερική οδήγηση θα αποτύγχανε. Οπότε υποχρεωτικά κάνουμε εναλλαγή γραμμών με την τρίτη γραμμή (εφαρμόζοντας την μερική οδήγηση, το a_{32} είναι το μεγαλύτερο στοιχείο στη δεύτερη στήλη κάτω από τη διαγώνιο).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

Αφού Οπότε τώρα συνεχίζουμε την απαλοιφή υπολογίζοντας το όπου $m_{32} = \frac{0}{\frac{5}{2}} = 0$, δηλαδή στην ουσία δεν είναι απαραίτητη η απαλοιφή.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 0\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι το αντίστοιχο σύστημα

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z &= 1 \\ 5z &= 5 \end{aligned}$$

επιλύεται εύκολα με την προς τα πίσω αντικατάσταση. Πράγματι, από την τρίτη εύκολα εξίσωση βρίσκουμε $z = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $-\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow y = 1$, και από την πρώτη $x + 1 - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 2$. Τελικά, το σύστημα έχει την μοναδική λύση $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

Άσκηση 3.5.4 Να *λυθεί* με τη μέθοδο παραγοντοποίησης LU Doolittle το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ 6x + 6y + 2z &= 2 \\ -x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Λύση

Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη του του U με την πρώτη γραμμή του L και, λόγω της ειδικής μορφής των L και U , μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικά τις τιμές των

στοιχείων της γραμμής του U εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A . Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned}u_{11} &= 3 \\u_{12} &= 2 \\u_{13} &= -1\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του U με κάθε γραμμή του L και υπολογίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του L .

$$\begin{aligned}l_{21} \cdot 3 &= 6 \Leftrightarrow l_{21} = 2 \\l_{31} \cdot 3 &= -1 \Leftrightarrow l_{31} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Βήμα 2.

Υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της δεύτερης γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την από τη δεύτερη και μετά) με την δεύτερη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$\begin{aligned}2 \cdot 2 + u_{22} &= 6 \Leftrightarrow u_{22} = 6 - 4 = 2 \\-1 \cdot 2 + u_{23} &= 2 \Leftrightarrow u_{23} = 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του πίνακα L (δηλαδή το l_{32}) πολλαπλασιάζοντας δεύτερη στήλη U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$-\frac{1}{3} \cdot 2 + l_{32} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow l_{32} = \frac{5}{6}$$

Βήμα 3.

Υπολογίζουμε το $u_{3,3}$ πολλαπλασιάζοντας την τρίτη στήλη του U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με το a_{33} έχουμε

$$-\frac{1}{3} \cdot (-1) + 4 \cdot \frac{5}{6} + u_{33} = 3 \Leftrightarrow u_{33} = -\frac{2}{3}$$

Τελικά, η παραγοντοποίηση είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Τώρα, το αρχικό σύστημα ανάγεται στην επίλυση των δύο ακόλουθων γραμμικών συστημάτων

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας προς τα **εμπρός αντικατάσταση** και προς τα **πίσω αντικατάσταση** αντίστοιχα. Το σύστημα είναι ισοδύναμο με

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Λύνουμε αρχικά το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Από όπου παίρνουμε με προς τα εμπρός αντικατάσταση

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 - 2x' \\ 1 + \frac{1}{3}x' - \frac{5}{6}y' \end{bmatrix} \text{ και τελικά } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια λύνουμε το

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ από όπου παίρνω με προς τα πίσω αντικατάσταση}$$

$$\begin{bmatrix} 3x \\ 2y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y + z \\ 2 - 4z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και έχουμε τελικά } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.5.5 Να ληθεί με τη μέθοδο παραγοντοποίησης LU Doolittle το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + 5y + 8z &= -1 \\ 3x + 8y + 14z &= -3 \end{aligned}$$

Λύση

Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη του του U με την πρώτη γραμμή του L και, λόγω της ειδικής μορφής των L και U , μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικά τις τιμές των στοιχείων της γραμμής του U εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A . Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned}u_{11} &= 1 \\u_{12} &= 2 \\u_{13} &= 3\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του U με κάθε γραμμή του L και υπολογίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του L .

$$\begin{aligned}l_{21} \cdot 1 &= 2 \Leftrightarrow l_{21} = 2 \\l_{31} \cdot 1 &= 3 \Leftrightarrow l_{31} = 3\end{aligned}$$

Βήμα 2.

Υπολογίζουμε τα (μη μηδενικά) στοιχεία της δεύτερης γραμμής του πίνακα U πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη του (από την από τη δεύτερη και μετά) με την δεύτερη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$\begin{aligned}2 \cdot 2 + u_{22} &= 5 \Leftrightarrow u_{22} = 5 - 4 = 1 \\3 \cdot 2 + u_{23} &= 8 \Leftrightarrow u_{23} = 8 - 6 = 2\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του πίνακα L (δηλαδή το l_{32}) πολλαπλασιάζοντας δεύτερη στήλη U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A .

$$2 \cdot 3 + l_{32} \cdot 1 = 8 \Leftrightarrow l_{32} = 2$$

Βήμα 3.

Υπολογίζουμε το $u_{3,3}$ πολλαπλασιάζοντας την τρίτη στήλη του U με την τρίτη γραμμή του L και εξισώνοντας με το a_{33} έχουμε

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + u_{33} = 14 \Leftrightarrow u_{33} = 3$$

Τελικά, η παραγοντοποίηση είναι η παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τώρα, το αρχικό σύστημα ανάγεται στην επίλυση των δύο ακόλουθων γραμμικών συστημάτων

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας προς τα **εμπρός αντικατάσταση** και προς τα **πίσω αντικατάσταση** αντίστοιχα. Το σύστημα είναι ισοδύναμο με

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Λύνουμε αρχικά το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Από όπου παίρνουμε με προς τα εμπρός αντικατάσταση

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 - 2x' \\ -3 - 3x' - 2y' \end{bmatrix} \text{ και τελικά } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια λύνουμε το

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ από όπου παίρνω με προς τα πίσω αντικατάσταση}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y - 3z \\ -1 - 2z \\ -1 \end{bmatrix} \text{ και έχουμε τελικά } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3.6 Ερωτήσεις

Ερώτηση 3.6.1 Ποια είναι τα δύο βήματα που αποτελούν τη μέθοδο απαλοιφής Gauss;

Ερώτηση 3.6.2 Πότε η μέθοδος απαλοιφής Gauss αποτυγχάνει;

Ερώτηση 3.6.3 Τι εφαρμόζουμε στην τεχνική της μερικής οδήγησης; Τι έχει ως αποτέλεσμα η εφαρμογή της;

Ερώτηση 3.6.4 Πότε μπορεί ένας πίνακας να αναλυθεί σε γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού και ενός πάνω τριγωνικού πίνακα;

Ερώτηση 3.6.5 Ποια μορφή έχουν οι πίνακες στην μέθοδο παραγοντοποίησης LU Doolittle;

Ερώτηση 3.6.6 Σε τί ανάγεται η επίλυση του αρχικού συστήματος όταν εφαρμόζουμε την μέθοδο παραγοντοποίησης LU Doolittle;

Ερώτηση 3.6.7 Πότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος παραγοντοποίησης LU Doolittle;

Ερώτηση 3.6.8 Τι εφαρμογή βρίσκει η μέθοδος παραγοντοποίησης LU Doolittle στην αντιστροφή πινάκων;

Κεφάλαιο 4

Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων

4.1 Εισαγωγή

Και σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μεθόδους για την επίλυση συστημάτων n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους. Οι μέθοδοι που θα εξετάσουμε είναι, σε αντίθεση με τις άμεσες μεθόδους, που γνωρίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο επαναληπτικές διαδικασίες της μορφής

$$x^{(n+1)} = F(x^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

όπου δίδεται η αρχική εκτίμηση του διανύσματος λύσης $x^{(0)}$.

Οι ποσότητες στις διαδικασίες αυτές είναι διανυσματικές και όχι βαθμωτές. Επίσης οι μέθοδοι εμπλέκουν πίνακες συντελεστών του προβλήματος. Έτσι, στο κεφάλαιο αυτό θα χειριστούμε κάποιες βασικές έννοιες πάνω στις νόρμες διανυσμάτων και πινάκων.

Έστω ότι έχουμε ένα διάνυσμα x του χώρου \mathbb{R}^n , $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$

Ορισμός 4.1.1 Μία **νόρμα** είναι μία συνάρτηση $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες

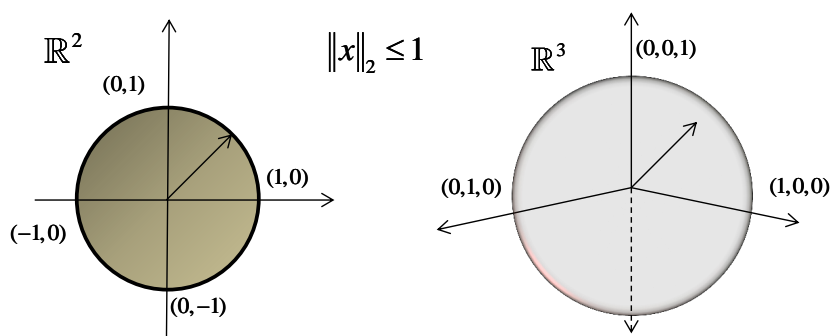
$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

◇

Η νόρμα ενός διανύσματος δίνει ένα μέτρο της απόστασης του διανύσματος από το μηδενικό διάνυσμα. Συνήθεις νόρμες διανυσμάτων είναι οι ακόλουθες:

$$l_2 - \text{νόρμα} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad l_\infty - \text{νόρμα} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Στα Σχήματα ;; μπορούμε να δούμε σχηματικά ποια είναι τα διανύσματα που ικανοποιούν $\|\cdot\| \leq 1$ επίπεδο και το χώρο για την l_2 -νόρμα και την l_∞ -νόρμα.



Σχήμα 4.1: l_2 -νόρμα ≤ 1

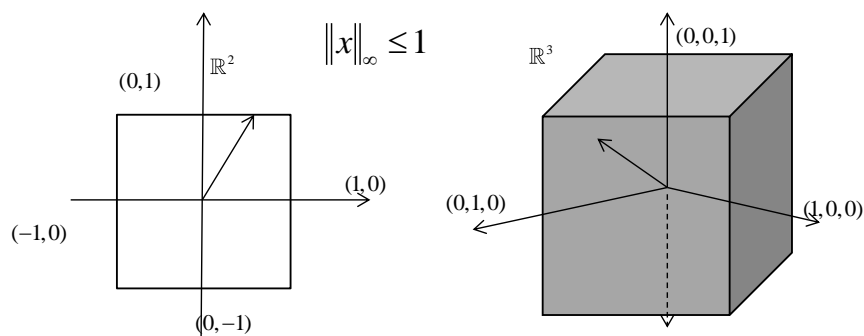
Η νόρμα της διαφοράς δύο διανυσμάτων $\|x - y\|$ είναι ένα **μέτρο της απόστασης των δύο διανυσμάτων**. Για τις δύο αυτές νόρμες ισχύει

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Παράδειγμα 4.1.1 Για το διάνυσμα $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ η $l_2(x) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ και η $l_\infty(x) = \max\{|1|, |2|, |3|\} = 3$. ◇

Με την συνάρτηση *norm* στις διάφορες μορφές κλίσης της υπολογίζουμε την l_2 -νόρμα και την l_∞ -νόρμα ενός διανύσματος στο Matlab ή στο FreeMat.

Παράδειγμα 4.1.2 Για το διάνυσμα του προηγούμενου παραδείγματος οι υπολογισμοί το Matlab ή στο FreeMat είναι οι ακόλουθοι.

Σχήμα 4.2: l_∞ -νόρμα ≤ 1

```

1 >> x=[1, 2, 3]
2 >> norm(x)
3 >> norm(x,inf)

```

◇

Ορισμός 4.1.2 Έστω ότι έχουμε έναν πίνακα A $n \times n$, τότε μία **νόρμα** $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση η οποία όταν εφαρμοστεί στον πίνακα επιστρέφει έναν πραγματικό αριθμό και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
 \|A\| &\geq 0 \\
 \|A\| = 0 &\Leftrightarrow A = 0 \text{ ο μηδενικός πίνακας} \\
 \|\alpha A\| &= |\alpha| \|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
 \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\
 \|A \cdot B\| &\leq \|A\| \cdot \|B\|
 \end{aligned}$$

Η απόσταση μεταξύ δύο $n \times n$ πινάκων A, B ως προς μία νόρμα πινάκων ισούται με $\|A - B\|$.

Εάν $\| \cdot \|$ είναι μία νόρμα διανυσμάτων τότε η συνάρτηση:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

είναι μία νόρμα πινάκων η οποία ονομάζεται και **φυσική νόρμα**. Για κάθε τέτοια νόρμα πινάκων ισχύει:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Για τις γνωστές νόρμες διανυσμάτων ορίζονται οι παρακάτω φυσικές νόρμες:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ και } \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

Μία (όχι φυσική νόρμα) είναι η Frobenius νόρμα πινάκων:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Παράδειγμα 4.1.3 Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ισχύει

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}.$$

◇

Όπως είναι γνωστό από την γραμμική άλγεβρα, για κάθε $n \times n$ πίνακα A με πραγματικά στοιχεία ο πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ είναι **ιδιοτιμή** του πίνακα A εάν και μόνο εάν

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Το πολυώνυμο $p(\lambda)$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**, η παραπάνω εξίσωση, **χαρακτηριστική εξίσωση**. Οι ρίζες λοιπόν της χαρακτηριστική εξίσωσης του πίνακα είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα. Η μεγαλύτερη σε μέτρο ιδιοτιμή ονομάζεται **φασματική ακτίνα** και συμβολίζεται με $\rho(A)$. Για τη φασματική ακτίνα ισχύει $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$, $\rho(A) \leq A$ για κάθε φυσική νόρμα.

Για κάθε μη ιδιάζοντα $n \times n$ πίνακα A ορίζουμε τον **δείκτη κατάστασης** που συνδέεται με μία νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ ως την ποσότητα:

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Εάν ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα είναι κοντά στη μονάδα, τότε ο πίνακας λέμε ότι είναι **καλής κατάστασης** και σε μία τέτοια περίπτωση μικρή τιμή στο μέτρο σφάλματος $\|Ax - b\|$ αντιστοιχεί σε μία ακριβή προσεγγιστική λύση (θυμηθείτε τι είχαμε πει στο προηγούμενο εργαστήριο). Όταν η τιμή $K(A)$ είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μονάδα τότε ο πίνακας λέμε ότι είναι **κακής κατάστασης** και οι αριθμητικοί υπολογισμοί επίλυσης του συστήματος πιθανά να μην είναι ακριβείς.

Η εντολή $norm(A, p)$, όπου A είναι πίνακας και p μία από τις τιμές 1, 2 ή 'fro', επιστρέφει την αντίστοιχη νόρμα πίνακα στο Matlab ή στο FreeMat. Η εντολή $cond(A, p)$ όπου πάλι A είναι πίνακας και p μία από τις τιμές 1, 2 ή 'fro' επιστρέφει τον αντίστοιχη δείκτη κατάστασης του πίνακα στο Matlab ή στο FreeMat.

Παράδειγμα 4.1.4 Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{bmatrix}$ του οποίου η οριζουσα είναι ίση με 10^{-6} .

```

1 >> A=[0.780, 0.563; 0.913, 0.659];
2 >> det(A)
3 >> cond(A, 'fro')
4 >> norm(A, 'fro') * norm(inv(A), 'fro')

```

Εντολή $\det(A)$ υπολογίζει την ορίζουσα. Και οι δύο υπολογισμοί του δείκτη κατάστασης (με τον ορισμό ή με τη χρήση συνάρτησης του Matlab) είναι $2.1932e + 006$, κάτι που μας προειδοποιεί ότι ο συγκεκριμένος πίνακας είναι ένας κακός πίνακας για να υπολογίσουμε λύση συστημάτων. \diamond

4.2 Γενική Επαναληπτική Μέθοδος

Για την κατασκευή της **Γενικής Επαναληπτικής Μεθόδου** αριθμητικής επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, ο πίνακας συντελεστών του συστήματος A γράφεται ως διαφορά δύο άλλων πινάκων Q και P ,

$$A = Q - P$$

με τους περιορισμούς ότι ο πίνακας Q είναι μη ιδιάζων, δηλαδή υπάρχει ο πίνακας Q^{-1} και ο πίνακας Q^{-1} υπολογίζεται εύκολα.

Έτσι, Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{aligned}
 Ax &= b \Leftrightarrow \\
 (Q - P)x &= b \Leftrightarrow \\
 Qx - Px &= b \Leftrightarrow Qx = Px + b \Leftrightarrow \\
 Q^{-1}Qx &= Q^{-1}Px + Q^{-1}b \Leftrightarrow x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b \Leftrightarrow \\
 x &= Bx + c
 \end{aligned}$$

όπου $B = Q^{-1}P$, και $c = Q^{-1}b$. Τότε μπορούμε να γράψουμε τον επαναληπτικό τύπο της μορφής:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k=0, 1, \dots,$$

με $x^{(0)}$ δοθέν αρχικό διάνυσμα της λύσης.

Ο αλγόριθμος της **Γενικής Επαναληπτικής Μεθόδου** ορίζει μία ακολουθία διανυσμάτων,

$$\{x^{(k)}\}, \quad k=0, 1, \dots$$

η οποία, αν συγκλίνει, θα συγκλίνει στην μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος.

Για την **σύγκλιση** της μεθόδου υπάρχουν διάφορα κριτήρια, με πιο ισχυρό το

$$\rho(B) < 1.$$

Τα **κριτήρια διακοπής της επαναληπτικής διαδικασίας** τα οποία συνήθως εφαρμόζουμε στην πράξη είναι αυτό του μέγιστου αριθμού επαναλήψεων και της επακρίβειας:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < TOL \quad \text{ή} \quad \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} < TOL,$$

όπου TOL είναι μία ανοχή η οποία ορίζεται από τον χρήστη. Ένα άλλο μέτρο σφάλματος είναι το $\|Ax - b\| < TOL$.

Για την **εκτίμηση σφάλματος** ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Με βάση την μέθοδο αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε επαναληπτικές μεθόδους, ορίζοντας κατάλληλα τους πίνακες Q ή P .

4.2.1 Επαναληπτική Μέθοδος Jacobi

Θεωρούμε το $n \times n$ γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου ο πίνακας A είναι ομαλός (μη ιδιάζοντας) και ικανοποιεί τους περιορισμούς $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Στην επαναληπτική μέθοδο **Jacobi** γράφουμε τον πίνακα A στην μορφή:

$$A = D + (L + U)$$

όπου ο πίνακας D είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα διαγώνια στοιχεία του A και L, U αυστηρά άνω και κάτω τριγωνικός αντίστοιχα (το άνω και κάτω τριγωνικό τμήμα του A).

Ο **επαναληπτικός τύπος** της μεθόδου είναι

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k=0, 1, \dots$$

όπου $B = -D^{-1}(L + U)$, $c = D^{-1}b$ και $x^{(0)}$ δοθέν αρχικό διάνυσμα της λύσης.

Σε αναλυτική μορφή η μέθοδος γράφεται:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος Jacobi μπορεί να εκφραστεί επίσης και με τις αλγεβρικές σχέσεις :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ικανή συνθήκη για την **σύγκλιση** της μεθόδου Jacobi είναι να ισχύει για κάθε φυσική νόρμα πίνακα η ανισότητα

$$\| -D^{-1} (L + U) \| < 1,$$

ενώ **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για την σύγκλιση είναι :

$$\rho (-D^{-1} (L + U)) < 1.$$

Το ότι η $\rho (-D^{-1} (L + U)) < 1$ είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για την σύγκλιση σημαίνει ότι όταν η συνθήκη αυτή ισχύει τότε η μέθοδος συγκλίνει και αντίστροφα όταν η μέθοδος συγκλίνει τότε συνεπάγεται η συνθήκη αυτή ισχύει.

Το ότι η $\| -D^{-1} (L + U) \| < 1$ είναι ικανή (μόνο) συνθήκη για την σύγκλιση σημαίνει ότι όταν η μέθοδος συγκλίνει τότε συνεπάγεται ότι ισχύει η συνθήκη ισχύει ενώ όταν η συνθήκη αυτή ισχύει δεν συνεπάγεται πάντα ότι η μέθοδος συγκλίνει. Βέβαια όταν η συγκεκριμένη (αναγκαία) συνθήκη δεν ισχύει τότε δεν μπορεί η μέθοδος να συγκλίνει. Επίσης όταν ο πίνακας A είναι **αυστηρά διαγώνια υπερτερών** τότε η μέθοδος Jacobi συγκλίνει (**ικανή συνθήκη**).

Τα συμπεράσματα για την εκτίμηση σφάλματος τα οποία ισχύουν για την Γενική Επαναληπτική Μέθοδο, μπορούν να εφαρμοστούν και στη μέθοδο αυτή. Το ίδιο ισχύει και για τον τρόπο διακοπής της επαναληπτικής διαδικασίας.

Παράδειγμα 4.2.1 Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

με λύση $x_1 = 1, x_2 = 2$ με τη μέθοδο Jacobi και $x^0 = [0, 0]^T$. Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι διαγώνια υπερτερών ($|3| > 1$ και $|2| > 1$) οπότε είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της μεθόδου.

Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη :

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{5}{3} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \\x_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{5}{6} \\x_2^{(2)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Στο τρίτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{9} \\x_2^{(3)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{2} = \frac{25}{12}\end{aligned}$$

Η επαναληπτική μέθοδος φαίνεται να συγκλίνει στη λύση (κάτι το οποίο θα γίνει πιο φανερό στις επόμενες επαναλήψεις).

Για την εφαρμογή των κριτηρίων διακοπής θα πρέπει να θεωρούμε τις νόρμες των διαφορών των διαδοχικών επαναλήψεων. Για την άπειρο νόρμα οι τιμές που υπολογίζουμε είναι:

$$\begin{aligned}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty} &= \max \left[\begin{array}{l} \left| \frac{5}{3} - 0 \right| \\ \left| \frac{5}{2} - 0 \right| \end{array} \right] = \frac{5}{2} \\ \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_{\infty} &= \max \left[\begin{array}{l} \left| \frac{5}{6} - \frac{5}{3} \right| \\ \left| \frac{5}{3} - \frac{5}{2} \right| \end{array} \right] = \frac{5}{6} \\ \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_{\infty} &= \max \left[\begin{array}{l} \left| \frac{10}{9} - \frac{5}{6} \right| \\ \left| \frac{25}{12} - \frac{5}{3} \right| \end{array} \right] = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

όπου παρατηρούμε ότι η αποστάσεις διαδοχικών επαναλήψεων μικραίνουν.

◇

Παράδειγμα 4.2.2 Με μία απλή αναδιάταξη των εξισώσεων το ίδιο σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 &= 5\end{aligned}$$

με λύση $x_1 = 1, x_2 = 2$ με τη μέθοδο Jacobi και $x^0 = [0, 0]^T$. Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος τώρα δεν είναι διαγώνια ώστε να είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της μεθόδου. Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= -2x_2^{(k)} + 5 \\x_2^{(k+1)} &= -3x_1^{(k)} + 5\end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -2 \cdot 0 + 5 = 5 \\x_2^{(1)} &= -3 \cdot 0 + 5 = 5\end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -2 \cdot 5 + 5 = -5 \\x_2^{(2)} &= -3 \cdot 5 + 5 = -10\end{aligned}$$

Στο τρίτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= -2 \cdot (-10) + 5 = 25 \\x_2^{(3)} &= -3 \cdot (-5) + 5 = 20\end{aligned}$$

Η επαναληπτική μέθοδος φανερά αποκλίνει.

◇

Παράδειγμα 4.2.3 Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}8x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12 \\x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4\end{aligned}$$

με λύση $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ με τη μέθοδο Jacobi και $x^0 = [0, 0, 0]^T$. Οι πράξεις θα γίνουν με τρία ψηφία ακρίβεια.

Για να κάνουμε τον πίνακα αυστηρά διαγώνια υπερτερών αντιμεταθέτουμε την δεύτερη με την τρίτη εξίσωση και το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned}8x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4 \\2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12\end{aligned}$$

Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{8}{8} \\x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{-7}x_1^{(k)} - \frac{2}{-7}x_3^{(k)} - \frac{4}{-7} \\x_3^{(k+1)} &= -\frac{2}{9}x_1^{(k)} - \frac{1}{9}x_2^{(k)} + \frac{12}{9}\end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{8}{8} \approx 1.000 \\x_2^{(1)} &= -\frac{1}{-7} \cdot 0 - \frac{2}{-7} \cdot 0 - \frac{4}{-7} \approx 0.571 \\x_3^{(1)} &= -\frac{2}{9} \cdot 0 - \frac{1}{9} \cdot 0 + \frac{12}{9} \approx 1.333\end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -0.125 \cdot 0.571 + 0.125 \cdot 1.333 + 1 \approx 1.095 \\x_2^{(2)} &= 0.143 \cdot 1.000 + 0.286 \cdot 1.333 + 0.571 \approx 1.095 \\x_3^{(2)} &= -0.222 \cdot 1.000 - 0.111 \cdot 0.571 + 1.333 \approx 1.048\end{aligned}$$

Και συνεχίζουμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Η επαναληπτική μέθοδος μετά από 8 επαναλήψεις θα συγκλίνει στη λύση (με την ακρίβεια των τριών ψηφίων) όπως φαίνεται και στον ακόλουθο πίνακα.

	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	0	1.000	1.095	0.995	0.993	1.002	1.001	1.000
x_2	0	0.571	1.095	1.026	0.990	0.998	1.001	1.000
x_3	0	1.333	1.048	0.969	1.000	1.004	1.001	1.000

◇

4.3 Επαναληπτική Μέθοδος Gauss-Seidel

Θεωρούμε το $n \times n$ γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου ο πίνακας A είναι ομαλός και ικανοποιεί τους περιορισμούς $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου **Gauss-Seidel** γράφεται:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k=0, 1, \dots$$

όπου $B = -(L + D)^{-1}U$, $c = (L + D)^{-1}b$ και $x^{(0)}$ δοθέν αρχικό διάνυσμα της λύσης. Όπως και στην Jacobi, ο πίνακας D είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα διαγώνια στοιχεία του A και L, U αυστηρά άνω και κάτω τριγωνικός αντίστοιχα (το άνω και κάτω τριγωνικό τμήμα του A).

Σε αναλυτική μορφή η μέθοδος γράφεται:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdot & \cdot & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot x^{(k+1)} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdot & \cdot & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{a_{n-1n}}{a_{n-1n-1}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος Gauss-Seidel μπορεί να εκφραστεί επίσης και με τις αλγεβρικές σχέσεις:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ικανή συνθήκη για την σύγκλιση της μεθόδου Gauss-Seidel είναι

$$\| -(L + D)^{-1} U \| < 1,$$

για κάποια φυσική νόρμα πίνακα, ενώ **ικανή και αναγκαία συνθήκη** είναι

$$\rho(-(L + D)^{-1} U) < 1.$$

Επίσης όταν ο πίνακας A είναι **αυστηρά διαγώνια υπερτερών** τότε η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει (**ικανή συνθήκη**).

Γενικά, η μέθοδος Gauss-Seidel φαίνεται να υπερτερεί της μεθόδου Jacobi. Στην πραγματικότητα υπάρχουν γραμμικά συστήματα για τα οποία η μέθοδος Jacobi συγκλίνει ενώ η μέθοδος Gauss-Seidel αποκλίνει και αντιστρόφως.

Τα συμπεράσματα για την εκτίμηση σφάλματος τα οποία ισχύουν για την Γενική Επαναληπτική Μέθοδο, μπορούν να εφαρμοστούν και στη μέθοδο αυτή. Το ίδιο ισχύει και για τον τρόπο διακοπής της επαναληπτικής διαδικασίας.

Παράδειγμα 4.3.1 Θα λύσουμε ξανά το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

με λύση $x_1 = 1, x_2 = 2$ με την μέθοδο Gauss-Seidel και $x^0 = [0, 0]^T$.

Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{5}{3} \\x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \\x_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{9} \\x_2^{(2)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} + \frac{5}{2} = \frac{35}{18}\end{aligned}$$

Στο τρίτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{35}{18} + \frac{5}{3} = \frac{55}{54} \\x_2^{(3)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{55}{54} + \frac{5}{2} = \frac{215}{108}\end{aligned}$$

Η επαναληπτική μέθοδος φαίνεται να συγκλίνει στη λύση (κάτι το οποίο θα γίνει πιο εμφανές στις επόμενες επαναλήψεις).

Για την εφαρμογή των κριτηρίων διακοπής θα πρέπει να θεωρούμε τις νόρμες των διαφορών των διαδοχικών επαναλήψεων. Για την άπειρο νόρμα οι τιμές που υπολογίζουμε είναι:

$$\begin{aligned}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty &= \max \left[\begin{array}{c} |\frac{5}{3} - 0| \\ |\frac{5}{3} - 0| \end{array} \right] = \frac{5}{3} \\ \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty &= \max \left[\begin{array}{c} |\frac{10}{9} - \frac{5}{3}| \\ |\frac{35}{18} - \frac{5}{3}| \end{array} \right] = \frac{5}{9} \\ \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty &= \max \left[\begin{array}{c} |\frac{55}{54} - \frac{10}{9}| \\ |\frac{215}{108} - \frac{35}{18}| \end{array} \right] = \frac{5}{54}\end{aligned}$$

όπου παρατηρούμε ότι η απόσταση διαδοχικών επαναλήψεων μικραίνουν.

Παράδειγμα 4.3.2 Θα λύσουμε ξανά το σύστημα

$$\begin{aligned}8x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4 \\2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12\end{aligned}$$

με λύση $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ τώρα με τη μέθοδο Gauss-Seidel και $x^0 = [0, 0, 0]^T$. Οι πράξεις θα γίνουν με τρία ψηφία ακρίβεια.

Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{8}{8} \\x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{-7}x_1^{(k+1)} - \frac{2}{-7}x_3^{(k)} - \frac{4}{-7} \\x_3^{(k+1)} &= -\frac{2}{9}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{9}x_2^{(k+1)} + \frac{12}{9}\end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{8}{8} \approx 1.000 \\x_2^{(1)} &= -\frac{1}{-7} \cdot 1.000 - \frac{2}{-7} \cdot 0 - \frac{4}{-7} \approx 0.714 \\x_3^{(1)} &= -\frac{2}{9} \cdot 1.000 - \frac{1}{9} \cdot 0.714 + \frac{12}{9} \approx 1.032\end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -0.125 \cdot 0.714 + 0.125 \cdot 1.032 + 1 \approx 1.041 \\x_2^{(2)} &= 0.143 \cdot 1.041 + 0.286 \cdot 1.3032 + 0.571 \approx 1.014 \\x_3^{(2)} &= -0.222 \cdot 1.041 - 0.111 \cdot 1.014 + 1.333 \approx 0.990\end{aligned}$$

Και συνεχίζουμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Η επαναληπτική μέθοδος μετά από 6 επαναλήψεις θα συγκλίνει στη λύση (με την ακρίβεια των τριών ψηφίων) όπως φαίνεται και στον ακόλουθο πίνακα.

	1	2	3	4	5	6
x_1	0	1.000	1.041	0.997	1.001	1.000
x_2	0	0.714	1.014	0.996	1.000	1.000
x_3	0	1.032	0.990	1.002	1.000	1.000

◇

4.4 Επαναληπτική Μέθοδος SOR

Θεωρούμε το $n \times n$ γραμμικό σύστημα $Ax = b$, και το ισοδύναμο προς αυτό σύστημα $\omega Ax = \omega b$. Υποθέτουμε ότι

$$\omega A = Q_\omega - P_\omega \quad \text{όπου} \quad Q_\omega = D - \omega L, \quad \text{και} \quad P_\omega = (1 - \omega)D + \omega U.$$

Η μέθοδος αυτή για $\omega = 1$ συμπίπτει με την μέθοδο Gauss-Seidel και ονομάζεται **μέθοδος της διαδοχικής υπερχαλάρωσης** αλλά διεθνώς είναι γνωστή με τα αρχικά **SOR** (successive over relaxation).

Οι πίνακες D , L και U είναι αντίστοιχα ο διαγώνιος, κάτω τριγωνικός και άνω τριγωνικός του πίνακα A . Ο αλγόριθμος που αντιστοιχεί στην γενική επαναληπτική μέθοδο SOR γράφεται:

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U] x^{(k)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b, \quad k = 0, 1, \dots$$

με $x^{(0)}$ αυθαίρετο αρχικό διάνυσμα. Η αναλυτική μορφή της μεθόδου είναι:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Την μέθοδο αυτή την αναφέρουμε απλά και δεν θα μας απασχολήσει παραπάνω.

4.5 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 4.5.1 Να εξεταστεί εάν ο πίνακας του ακόλουθου συστήματος είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών.

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4$$

Εάν όχι, να εξεταστεί εάν υπάρχει ισοδύναμο σύστημα του οποίου ο πίνακας είναι είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών. Στην περίπτωση αυτή να γίνουν δύο επαναλήψεις της λύσης του συστήματος αυτού με την μέθοδο απαλοιφής Jacobi, θεωρώντας ως αρχική προσέγγιση το $x^0 = [0, 0, 0]^T$.

Λύση

Η μέθοδος Jacobi μπορεί να εκφραστεί επίσης και με τις αλγεβρικές σχέσεις:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ο πίνακας του συγκεκριμένου συστήματος είναι Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

ο οποίος δεν είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών διότι $|3| < |6| + |2|$. Εναλλάσσοντας την πρώτη με τη δεύτερη εξίσωση έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι Ο

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

ο οποίος είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών διότι $|3| > |-1| + |1|$, $|6| > |3| + |2|$ και $|7| > |3| + |3|$. Οπότε ισχύει η ικανή συνθήκη σύγκλισης.

Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}x_2^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{1}{3} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{3}{6}x_1^{(k)} - \frac{2}{6}x_3^{(k)} + \frac{0}{6} \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{3}{7}x_1^{(k)} - \frac{3}{7}x_2^{(k)} + \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \\ x_2^{(1)} &= -\frac{3}{6} \cdot 0 - \frac{2}{6} \cdot 0 + \frac{0}{6} = 0 \\ x_3^{(1)} &= -\frac{3}{7} \cdot 0 - \frac{3}{7} \cdot 0 + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \approx 0.5714 \end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \approx 0.1429 \\ x_2^{(2)} &= -\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{3} - \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{0}{6} = \frac{-15}{42} \approx -0.35714 \\ x_3^{(2)} &= -\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{7} \cdot 0 + \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \approx 0.4286 \end{aligned}$$

Άσκηση 4.5.2 Να εξεταστεί εάν ο πίνακας του ακόλουθου συστήματος είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών.

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Εάν όχι, να εξεταστεί εάν υπάρχει υσοδύναμο σύστημα του οποίου ο πίνακας είναι είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών. Στην περίπτωση αυτή να γίνουν τρεις επαναλήψεις της λύσης του συστήματος αυτού με την μέθοδο απαλοιφής Jacobi, θεωρώντας ως αρχική προσέγγιση το $x^0 = [0, 0, 0]^T$.

Λύση

Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

ο οποίος δεν είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών διότι για την 2η γραμμή έχουμε $|-2| < |-1| + |4|$. Εναλλάσσοντας την δεύτερη με την τρίτη εξίσωση έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι 0

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

ο οποίος είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών διότι $|4| > |1| + |-1|$, $|3| > |1| + |1|$ και $|4| > |-1| + |-2|$. Οπότε ισχύει η ικανή συνθήκη σύγκλισης.

Η μέθοδος Gauss-Seidel μπορεί να εκφραστεί επίσης με τις αλγεβρικές σχέσεις:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}(4 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(5 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}(1 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}) \end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(4 - x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(4 - 0 + 0) = 1 \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(5 - x_1^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{3}(5 - 0 - 0) = \frac{5}{3} \approx 1.6667 \\x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}(1 + x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}) = \frac{1}{4}(1 + 0 + 2 \cdot \frac{5}{3}) = \frac{13}{12} \approx 1.0833\end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(4 - x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(4 - \frac{5}{3} + \frac{13}{12}) = \frac{41}{48} \approx 0.8542 \\x_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(5 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{3}(5 - 1 - \frac{13}{12}) = \frac{35}{36} \approx 0.9722 \\x_3^{(2)} &= \frac{1}{4}(1 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) = \frac{1}{4}(1 + 1 + 2 \cdot \frac{5}{3}) = \frac{4}{3} \approx 1.3333\end{aligned}$$

Στο τρίτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= \frac{1}{4}(4 - x_2^{(2)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{4}(4 - \frac{35}{36} + \frac{4}{3}) = \frac{157}{144} \approx 1.0903 \\x_2^{(3)} &= \frac{1}{3}(5 - x_1^{(2)} - x_3^{(2)}) = \frac{1}{3}(5 - \frac{41}{48} - \frac{4}{3}) = \frac{15}{16} \approx 0.9375 \\x_3^{(3)} &= \frac{1}{4}(1 + x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{41}{48} + 2 \cdot \frac{35}{36}) = \frac{547}{576} \approx 0.9496\end{aligned}$$

Άσκηση 4.5.3 Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4\end{aligned}$$

Να γίνουν δύο επαναλήψεις της λύσης του συστήματος αυτού με την μέθοδο απαλοιφής Gauss Seidel, θεωρώντας ως αρχική προσέγγιση το $x^0 = [0, 0, 0]^T$.

Λύση

Η μέθοδος Gauss-Seidel μπορεί να εκφραστεί επίσης με τις αλγεβρικές σχέσεις:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}x_2^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{1}{3} \\x_2^{(k+1)} &= -\frac{3}{6}x_1^{(k+1)} - \frac{2}{6}x_3^{(k)} + \frac{0}{6} \\x_3^{(k+1)} &= -\frac{3}{7}x_1^{(k+1)} - \frac{3}{7}x_2^{(k+1)} + \frac{4}{7}\end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \\x_2^{(1)} &= -\frac{3}{6} \cdot 0 - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{0}{6} = -\frac{1}{6} \approx -0.1667 \\x_3^{(1)} &= -\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{4}{7} = \frac{1}{2} = 0.5000\end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \approx 0.1111 \\x_2^{(2)} &= -\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{0}{6} = -\frac{2}{9} \approx -0.2222 \\x_3^{(2)} &= -\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{9} - \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{4}{7} = \frac{39}{63} \approx 0.6190\end{aligned}$$

Άσκηση 4.5.4 Να εξεταστεί εάν ο πίνακας του ακόλουθου συστήματος είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών.

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\-x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

Εάν όχι, να εξεταστεί εάν υπάρχει υσοδύναμο σύστημα του οποίου ο πίνακας είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών. Στην περίπτωση αυτή να γίνουν δύο επαναλήψεις της λύσης του συστήματος αυτού με την μέθοδο απαλοιφής Gauss-Seidel, θεωρώντας ως αρχική προσέγγιση το $x^0 = [0, 0, 0]^T$.

Λύση

Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

ο οποίος δεν είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών διότι για την 2η γραμμή έχουμε $|-2| < |-1| + |4|$. Εναλλάσσοντας την δεύτερη με την τρίτη εξίσωση έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι 0

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

ο οποίος είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών διότι $|4| > |1| + |-1|$, $|3| > |1| + |1|$ και $|4| > |-1| + |-2|$. Οπότε ισχύει η ικανή συνθήκη σύγκλισης.

Η μέθοδος Gauss-Seidel μπορεί να εκφραστεί επίσης με τις αλγεβρικές σχέσεις:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}(4 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(5 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}(1 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}) \end{aligned}$$

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(4 - x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(4 - 0 + 0) = 1 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(5 - x_1^{(1)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{3}(5 - 1 - 0) = \frac{4}{3} \approx 1.3333 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}(1 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) = \frac{1}{4}(1 + 1 + 2 \cdot \frac{4}{3}) = \frac{14}{12} \approx 1.1667 \end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(4 - x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(4 - 1 + \frac{14}{12}) = \frac{25}{24} \approx 1.0417 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(5 - x_1^{(2)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{3}(5 - \frac{25}{24} - \frac{14}{12}) = \frac{67}{72} \approx 0.9306 \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{4}(1 + x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{25}{24} + 2 \cdot \frac{67}{72}) = \frac{281}{288} \approx 0.9757 \end{aligned}$$

4.6 Ερωτήσεις

Ερώτηση 4.6.1 *Τι είναι μία νόρμα διανυσμάτων; Ποιες είναι οι πιο συνηθισμένες νόρμες διανυσμάτων;*

Ερώτηση 4.6.2 *Τι υπολογίζει μία νόρμα της διαφοράς δύο διανυσμάτων;*

Ερώτηση 4.6.3 *Τι είναι μία νόρμα πινάκων; Ποιες είναι οι πιο συνηθισμένες νόρμες πινάκων;*

Ερώτηση 4.6.4 *Τι γνωρίζετε για τον δείκτη κατάστασης;*

Ερώτηση 4.6.5 *Πως κατασκευάζεται η γενική επαναληπτική μέθοδος;*

Ερώτηση 4.6.6 *Ποια τα κριτήρια διακοπής μίας επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης συστημάτων;*

Ερώτηση 4.6.7 *Τι ισχύει για την εκτίμηση σφάλματος σε μία επαναληπτική μέθοδο επίλυσης συστημάτων;*

Ερώτηση 4.6.8 *Τι σημαίνει ότι μία συνθήκη είναι ικανή για τη σύγκλιση και τι ότι είναι ικανή και αναγκαία;*

Ερώτηση 4.6.9 *Ποια συνθήκη είναι ικανή και ποια ικανή και αναγκαία για τη σύγκλιση της μεθόδου Jacobi;*

Ερώτηση 4.6.10 *Ποια συνθήκη είναι ικανή και ποια ικανή και αναγκαία για τη σύγκλιση της μεθόδου Gauss Seidel;*

Ερώτηση 4.6.11 *Πότε λέμε ότι ένας πίνακας είναι αυστηρά διαγώνια υπερερών; Τι ισχύει, όσο αφορά τις επαναληπτικές μεθόδους, για πίνακες με αυτό το χαρακτηριστικό;*

Κεφάλαιο 5

Προσέγγιση συναρτήσεων με παρεμβολή

5.1 Εισαγωγή

Είναι συνηθισμένο να γνωρίζουμε τις τιμές μίας συνάρτησης σε κάποια σημεία αλλά να μην ξέρουμε τον τύπο της. Από την άλλη ακόμη, και όταν γνωρίζουμε τον τύπο μίας συνάρτησης, για να μελετήσουμε την συμπεριφορά της αναζητούμε μία «απλούστερη» η οποία τοπικά, με κάποιο σφάλμα, να συμπεριφέρεται όπως η προς μελέτη συνάρτηση. Τα πολυώνυμα αποτελούν μία καλή κατηγορία απλών συναρτήσεων για να λύσουμε τα παραπάνω προβλήματα.

Μία συνάρτηση μπορεί σε κάποιο διάστημα να προσεγγιστεί από κάποιο πολυώνυμο.

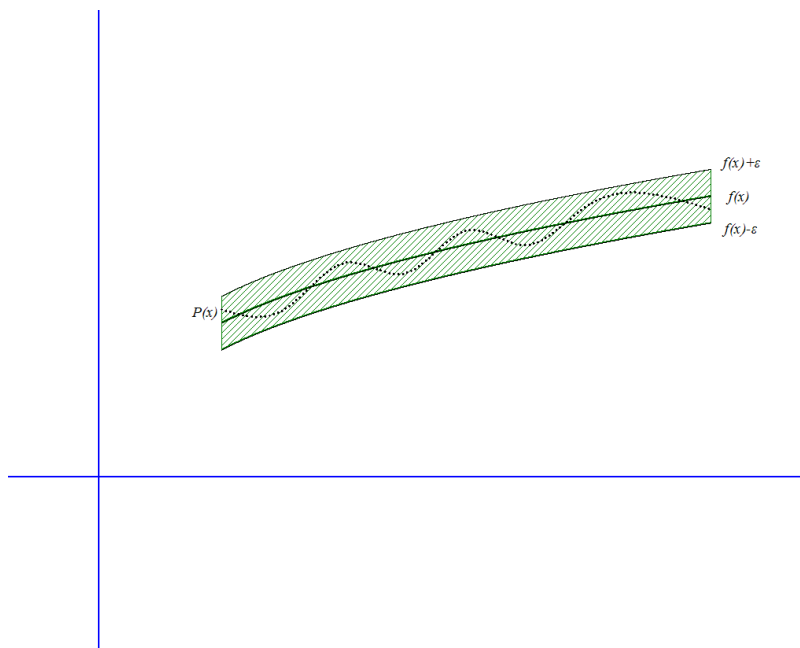
Θεώρημα 5.1.1 (Θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass) *Εάν η f ορίζεται και είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:*

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b].$$

(Δείτε Σχήμα 5.1)

◇

Στον Απειροστικό Λογισμό έχουμε γνωρίσει την προσέγγιση μίας συνάρτησης με το πολυώνυμο Taylor. Αυτή η μεθοδολογία μας δίνει μία τοπικά αποδεκτή λύση. Ωστόσο για προσεγγίσεις σε μεγαλύτερα διαστήματα καταλληλότερη είναι η **παρεμβολή** (polynomial interpolation ή fitting) μιας συνάρτησης $f(x)$ από κάποιο πολυώνυμο $P(x)$ κατά την οποία το πολυώνυμο περνά (παρεμβάλλει) από γνωστά σημεία της συνάρτησης.



Σχήμα 5.1: Θεώρημα Weierstrass

5.2 Προσέγγιση Taylor

Αν η συνάρτηση f είναι απείρως παραγωγίσιμη με συνεχείς παραγώγους στην περιοχή ενός πραγματικού αριθμού x_0 τότε μπορούμε να θερίσουμε την άπειρη σειρά (δυναμοσειρά) της συνάρτησης:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

η οποία ονομάζεται σειρά **Taylor** της συνάρτησης με κέντρο το x_0 .

Αν $x_0 = 0$ τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται και ανάπτυγμα σε σειρά **Maclaurin**.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας εξασφαλίζει το πότε μία συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως ένα πολυώνυμο με άπειρους όρους.

Θεώρημα 5.2.1 (Σύγκλιση σειράς Taylor) Εάν η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα $(x_0 - r, x_0 + r)$ και εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά K τέτοια ώστε

$$|f^{(n)}(x)| \leq K^n, n = 1, 2, 3, \dots$$

$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ τότε η σειρά Taylor 5.1 της f συγκλίνει στο $f(x)$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. \diamond

Παράδειγμα 5.2.1 Για την $f(x) = \sin(x)$ η σειρά Maclaurin είναι η ακόλουθη:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(0) = \sin(0) = 0 \\ f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(0) = -\sin(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\sin(x) = 0 + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Για την $f(x) = \cos(x)$ η σειρά Maclaurin είναι η ακόλουθη:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \cos(x) \Rightarrow f(0) = \cos(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(0) = -\sin(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''(0) = -\cos(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1 \\ f^{(5)}(x) = -\sin(x) \Rightarrow f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0 \\ f^{(6)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

Για την $f(x) = e^x$ η σειρά Maclaurin είναι η ακόλουθη:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \\ f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Για την $f(x) = \ln(x)$ η σειρά Taylor με κέντρο το 1 είναι η ακόλουθη:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x) \Rightarrow f(1) = \ln(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(1) = 1^{-1} = 1 \\ f''(x) = (x^{-1})' = -x^{-2} \Rightarrow f''(1) = -1 \\ f^{(3)}(x) = (-x^{-2})' = 2x^{-3} \Rightarrow f^{(3)}(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = (2x^{-3})' = -6x^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6 \\ f^{(5)}(x) = (-6x^{-4})' = 24x^{-5} \Rightarrow f^{(5)}(x) = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + 2\frac{(x-1)^3}{3!} - 6\frac{(x-1)^4}{4!} + 24\frac{(x-1)^5}{5!} \dots =$$

$$\Rightarrow \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} \dots$$

◇

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τη δυνατότητα να εξισώσουμε μία συνάρτηση με ένα πεπερασμένου διάστασης πολυώνυμο.

Θεώρημα 5.2.2 (Θεώρημα Taylor) Αν η συνάρτηση $f \in C^n[a, b]$ και υπάρχει η $f^{(n+1)}$ σε ένα διάστημα $[a, b]$ τότε $\forall x \in [a, b]$ η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως σειρά

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + R_n(x) = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

για κάποιο $\xi(x) \in (x_0, x)$.

◇

Με τη χρήση του θεωρήματος αυτού μπορούμε να προσεγγίσουμε συναρτήσεις στην περιοχή του x_0 με πολυώνυμο $P_n(x)$ (Taylor ή MacLaurin) βαθμού n , εάν αποκόψουμε τον τελευταίο όρο, ο οποίος αποτελεί και το σφάλμα της προσέγγισης. Δηλαδή:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

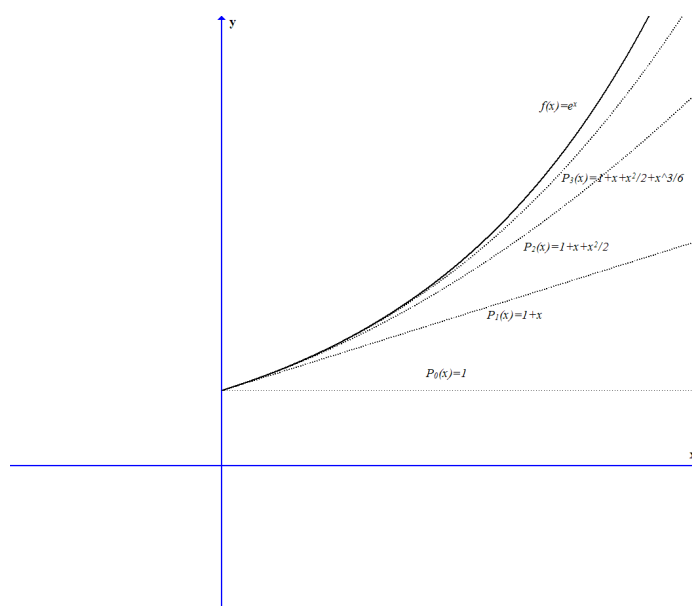
ή

$$f(x) \approx f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

Το υπόλοιπο (σφάλμα) της πολυωνυμικής προσέγγισης n -βαθμού είναι :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

για κάποιο $\xi \in (x_0, x)$.



Σχήμα 5.2: Προσέγγιση της $f(x) = e^x$ από πολυώνυμο Taylor με κέντρο το 0.

Παράδειγμα 5.2.2 α) Συνεπώς, στην προσέγγιση του $\sin(x)$ με πολυώνυμο βαθμού 2 στο 0, θα έχουμε ότι $P_2(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 = x$ και συνεπώς το σφάλμα θα είναι :

$$|R_2(x)| = \left| \frac{(\sin(x))_{x=\xi}^{(3)}}{3!} x^3 \right| = \left| \frac{-\cos(\xi)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{|x^3|}{6}.$$

Στις προσεγγιστικές διαδικασίες μας ενδιαφέρει να βρούμε άνω φράγματα των σφαλμάτων έτσι ώστε να μπορούμε να αξιολογούμε τις προσεγγίσεις. Στην περίπτωση αυτή, για

$$|x| \leq 0.1 \Rightarrow |R_2(x)| \leq \frac{0.1^3}{6} = 0.00017.$$

β) Επίσης, στην προσέγγιση του e^x με πολυώνυμο βαθμού 3 στο 0, θα έχουμε ότι $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ και συνεπώς το σφάλμα θα είναι :

$$|R_3(x)| = \left| \frac{(e^x)_{x=\xi}^{(4)}}{4!} x^4 \right| = \left| \frac{e^\xi}{4!} x^4 \right|.$$

Εάν μας ενδιαφέρει να φράξουμε την ποσότητα αυτή όταν $|x| \leq 0.1 \Leftrightarrow x^4 \leq 10^{-4}$ οπότε η παραπάνω ποσότητα φράσσεται:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{4!} x^4 \right| = \frac{e^\xi}{4!} x^4 \leq \frac{e^\xi}{4!} 10^{-4}.$$

Εφόσον $\xi \in (a, x)$ και $|x| \leq 0.1$, η ποσότητα e^ξ στο διάστημα $[-0.1, 0.1]$ παίρνει τη μικρότερη τιμή στο -0.1 και τη μεγαλύτερη στη 0.1 (μιας και η e^x είναι αύξουσα συνάρτηση), οπότε ισχύει:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{4!} x^4 \right| = \frac{e^\xi}{4!} x^4 \leq \frac{e^\xi}{4!} 10^{-4} \leq \frac{e^{0.1} 10^{-4}}{24} \approx 0.0000046049.$$

γ) Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από το $x_0 = 0$ τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$ μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τουλάχιστον 6 ψηφίων την ποσότητα $\sqrt{1.01}$.

Πράγματι, ισχύουν

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{0+1} = 1, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)' = \left(\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (x+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= \left(-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} \right)' = -\frac{1}{4} \left(-\frac{3}{2} \right) (x+1)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

και η σειρά Taylor στο x είναι

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots \Rightarrow \\ \sqrt{x+1} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας όπου $x = 0.01$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{0,01+1} &= 1 + \frac{1}{2}0.01 - \frac{1}{8}0.01^2 + \frac{1}{16}0.01^3 + \dots \Rightarrow \\ \sqrt{1,01} &\approx 1.004987. \end{aligned}$$

Σταματάμε στον τρίτο όρο του πολυωνύμου γιατί ο επόμενος όρος και κάθε επόμενος όρος είναι της μορφής

$$k \cdot 0.01^a = k \cdot 10^{-2a}$$

όπου $k < 1$ και $a \geq 3$. και επηρεάζει την προσέγγιση από το όγδοο ψηφίο και μετά. Συγκεκριμένα για τον 4^ο όρο έχουμε

$$\frac{1}{16} \cdot 0.01^3 = 6.25 \times 10^{-8}.$$

◇

5.3 Παρεμβολή Lagrange

Το πολυώνυμο που προσεγγίζει μία συνάρτηση σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της μπορεί να ικανοποιεί τη συνάρτηση σε κάποια σημεία. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.3.1 Έστω ότι η $f \in C^{k+1} [\alpha, \beta]$ και ότι δίνονται οι τιμές

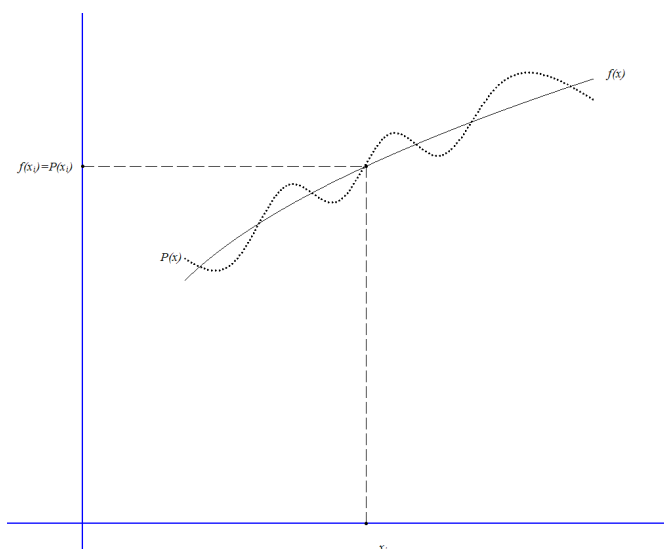
$$f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

αυτής σε $k + 1$ διακεκριμένα σημεία του $[a, \beta]$. Τότε, υπάρχει πολυώνυμο $P_k(x)$ βαθμού το πολύ k έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι **παρεμβολικές συνθήκες**

$$f(x_i) = P_k(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, k.$$

◇

Τα σημεία $x_i \in [\alpha, \beta]$, ονομάζονται **σημεία παρεμβολής** και το πολυώνυμο $P_k(x)$ **πολυώνυμο παρεμβολής**, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνάρτηση η οποία προσεγγίζει την $f(x)$ σε ολόκληρο το διάστημα $[\alpha, \beta]$.



Σχήμα 5.3: Πολυωνυμική προσέγγιση με συνθήκες παρεμβολής.

Στην παρεμβολή με τη μέθοδο Lagrange, ζητάμε να υπολογίσουμε μία πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ της μορφής:

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k f(x_i) \cdot L_i(x)$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω παρεμβολικές συνθήκες. Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange βαθμού k , που πληροί τις παραπάνω συνθήκες, βασίζεται σε ένα σύνολο βασικών πολυωνύμων $L_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, k$, καθένα βαθμού k , τα οποία πληρούν τις σχέσεις:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \ i = j \\ 0 & \alpha\nu \ i \neq j \end{cases}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι τα πολυώνυμα της μορφής:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

ή πιο αναλυτικά

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_k)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_{k-1}) \cdot (x_0 - x_k)}$$

...

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_k)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{k-1}) \cdot (x_i - x_k)}$$

...

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{k-2}) \cdot (x - x_{k-1})}{(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-2}) \cdot (x_k - x_{k-1})},$$

είναι βαθμού k και πληρούν τις παρεμβολικές συνθήκες.

Ορισμός 5.3.2 Το βαθμού k πολυώνυμο

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k f(x_i) \cdot L_i(x) = \sum_{i=0}^k f(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

ονομάζεται **πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange**. ◇

Για το σφάλμα της παρεμβολής Lagrange ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.3 (Θεώρημα παρεμβολής Lagrange) Εφόσον ισχύουν τα παραπάνω, $\forall x \in [a, b]$ υπάρχει $\xi(x) \in (a, b)$ ώστε η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως :

$$f(x) = P_k(x) + \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_k)}{k!} f^{(k+1)}(\xi(x)).$$

◇

Παράδειγμα 5.3.1 α) Δίνεται ο πίνακας τιμών μίας συνάρτησης:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	2	3
f_i	-6	-4	-6	2

Για το μοναδικό πολυώνυμο 3^{ov} το πολύ βαθμού που τα παρεμβάλει κατασκευάζουμε τους συντελεστές του Lagrange,

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2) \cdot (x_0-x_3)} = \frac{(x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(-1-0) \cdot (-1-2) \cdot (-1-3)} \\ &= -\frac{1}{12} \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-3) = -\frac{1}{12} \cdot (x^3 - 5x^2 + 6x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3)} = \frac{(x-(-1)) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(0-(-1)) \cdot (0-2) \cdot (0-3)} \\ &= \frac{1}{6} \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - 4x^2 + x + 6), \end{aligned}$$

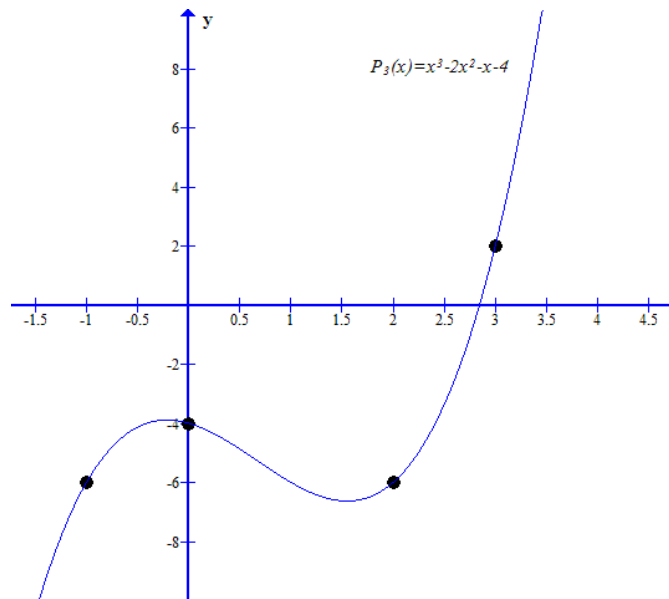
$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_3)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3)} = \frac{(x-(-1)) \cdot (x-0) \cdot (x-3)}{(2-(-1)) \cdot (2-0) \cdot (2-3)} \\ &= -\frac{1}{6} \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-3) = -\frac{1}{6} \cdot (x^3 - 2x^2 - 3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_3-x_0) \cdot (x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2)} = \frac{(x-(-1)) \cdot (x-0) \cdot (x-2)}{(3-(-1)) \cdot (3-0) \cdot (3-2)} \\ &= \frac{1}{12} \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-2) = \frac{1}{12} \cdot (x^3 - x^2 - 2x) \end{aligned}$$

Από όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned} P_3(x) &= L_0(x) \cdot (-6) + L_1(x) \cdot (-4) + L_2(x) \cdot (-6) + L_3(x) \cdot 2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right) + \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 4 \right) \\ &+ (x^3 - 2x^2 - 3x) + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} \right) \\ &= x^3 - 2x^2 - x - 4 \end{aligned}$$

β) Δίνεται ο πίνακας τιμών μίας συνάρτησης:



Σχήμα 5.4: Πολυωνυμική παρεμβολή παράδειγμα α)

i	0	1	2
x_i	0	2	3
f_i	1	3	4

Για το μοναδικό πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού που τα παρεμβάλλει κατασκευάζουμε τους συντελεστές του Lagrange,

$$L_0(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(0-2) \cdot (0-3)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-0) \cdot (x-3)}{(2-0) \cdot (2-3)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-0) \cdot (x-2)}{(3-0) \cdot (3-2)}$$

Από όπου έχουμε

$$L_0(x) = (x^2 - 5x + 6)/6,$$

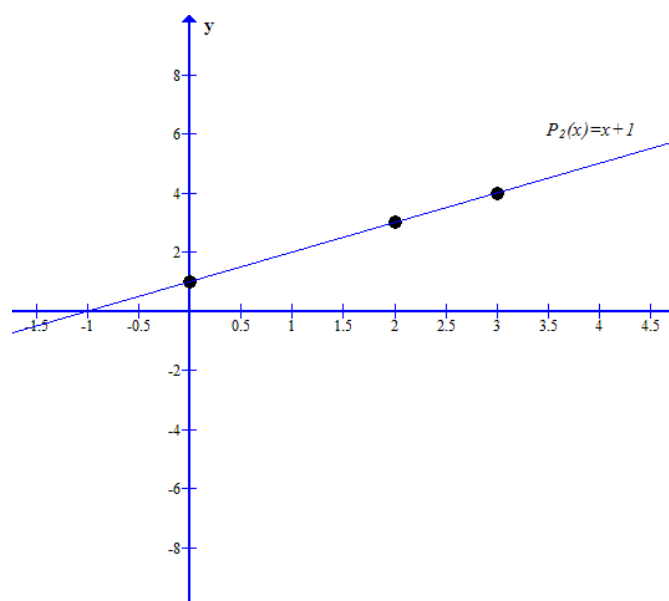
$$L_1(x) = -(x^2 - 3x)/2,$$

$$L_2(x) = (x^2 - 2x)/3.$$

$$\text{Οπότε, } P_2(x) = L_0(x) \cdot 1 + L_1(x) \cdot 3 + L_2(x) \cdot 4 = x + 1.$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του x^2 είναι μηδέν οπότε μία ευθεία περνάει και από τα τρία σημεία.

◇



Σχήμα 5.5: Πολυωνυμική παρεμβολή παράδειγμα β)

5.4 Παρεμβολή Newton

Πολλές φορές, π.χ. όταν επιλύουμε διαφορικές εξισώσεις, συνεχώς πηγαίνουμε από την παρεμβολή σε ένα σύνολο τιμών στην παρεμβολή σε ένα άλλο σύνολο τιμών, που προκύπτει διαγράφοντας ή προσθέτοντας ένα σημείο παρεμβολής ή και τα δύο μαζί. Από τον τρόπο κατασκευής του πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange είναι φανερό ότι, κάθε φορά που το σύνολο των σημείων παρεμβολής μεταβάλλεται, ο τύπος του Lagrange πρέπει να υπολογιστεί εξ ολοκλήρου από την αρχή. Μπορούμε να έχουμε οικονομία υπολογισμών αν κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής που να λαμβάνει υπ' όψιν του ότι οι περισσότερες τιμές παραμένουν ίδιες. Το πολυώνυμο παρεμβολής Newton επιτυγχάνει αυτόν τον σκοπό.

5.4.1 Παρεμβολή Newton με Διηρημένες Διαφορές

Ο τελεστής των διηρημένων διαφορών τάξης από 0 έως n ορίζεται από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
 &\vdots = \vdots \\
 f[x_0, x_1, x_3, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις διηρημένες διαφορές η νέα μορφή του πολυωνύμου παρεμβολής βαθμού k γράφεται:

$$\begin{aligned}
 P_k(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\
 &\dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_k].
 \end{aligned}$$

Τις τιμές των διηρημένων διαφορών μίας συνάρτησης μπορούμε να τις συμπληρώσουμε σε έναν πίνακα της μορφής:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

Παράδειγμα 5.4.1 Να γραφεί σε μορφή Newton με διηρημένες διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-2.0	4.0
1	0.0	2.0
2	2.0	8.0

Συμπληρώνουμε τον πίνακα των διηρημένων διαφορών:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-2.0	4		
		$\frac{2-4}{0-(-2)} = -1$	
0.0	2		$\frac{3-(-1)}{2-(-2)} = 1$
		$\frac{8-2}{2-0} = 3$	
2.0	8		

Οπότε το τετραγωνικό πολυώνυμο είναι το

$$P_2(x) = 4 - 1 \cdot (x - (-2.0)) + 1 \cdot (x - 0.0)(x - (-2)) = 4 - (x + 2) + x(x + 2) = x^2 + x + 2.$$

Στο ίδιο πολυώνυμο καταλήγουμε και όταν ορίσουμε το πολυώνυμο ως πολυώνυμο Lagrange. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-0) \cdot (x-2)}{(-2-0) \cdot (-2-2)} = \frac{x(x-2)}{8} \\ L_1(x) &= \frac{(x-(-2)) \cdot (x-2)}{(0-(-2)) \cdot (0-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{-4} \\ L_2(x) &= \frac{(x-(-2)) \cdot (x-0)}{(2-(-2)) \cdot (2-0)} = \frac{x(x+2)}{8} \end{aligned}$$

και τελικά

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x) \cdot 4 + L_1(x) \cdot 2 + L_2(x) \cdot 8 = 4 \frac{x(x-2)}{8} + 2 \frac{x^2-4}{-4} + 8 \frac{x(x+2)}{8} \\ &= \frac{x^2-2x}{2} - \frac{x^2-4}{2} + x^2 + 2x = -x + 2 + x^2 + 2x = x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

◇

Παράδειγμα 5.4.2 Να γραφεί σε μορφή Newton με διηρημένες διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης $f(x) = 2 + \ln(x+1)$ στα σημεία $x_0 = 2.0, x_1 = 2.2, x_2 = 2.5, x_3 = 2.7$. Συμπληρώνουμε τον πίνακα των διηρημένων διαφορών:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
2.0	<u>3.09861</u>			
		<u>0.32270</u>		
2.2	3.16315		<u>-0.04800</u>	
		0.29870		<u>0.00900</u>
2.5	3.25276		-0.04170	
		0.27785		
2.7	3.30833			

Οπότε το κυβικό πολυώνυμο είναι το

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 3.09861 + 0.32270(x-2.0) - 0.04800(x-2.0)(x-2.2) + \\ &+ 0.00900(x-2.0)(x-2.2)(x-2.5) \\ &= 0.009x^3 - 0.1083x^2 + 0.6584x + 2.14301. \end{aligned}$$

◇

Παράδειγμα 5.4.3 Να γραφεί σε μορφή Newton με διηρημένες διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.0	14.2
1	2.7	17.8
2	3.2	22.0
3	4.8	38.3
4	5.6	51.7

Συμπληρώνουμε τον πίνακα των διηρημένων διαφορών:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	1.0	14.2				
			2.118			
1	2.7	17.8		2.856		
			8.400		-0.535	
2	3.2	22.0		0.821		0.267
			10.125		0.687	
3	4.8	38.3		2.812		
			16.875			
4	5.6	51.7				

Οπότε το κυβικό πολυώνυμο είναι το

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= 14.2 + 2.118(x - 1.0) + 2.856(x - 1.0)(x - 2.7) - \\
 &\quad - 0.535(x - 1.0)(x - 2.7)(x - 3.2) \\
 &= -0.535x^3 + 0.8355x^2 + 4.9063x + 8.9932.
 \end{aligned}$$

ενώ το παρεμβολικό πολυώνυμο τετάρτου βαθμού

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= P_3(x) + 0.267(x - 1.0)(x - 2.7)(x - 3.2)(x - 4.8) \\
 &= 0.267x^4 - 16.035x^3 + 13.5607x^2 - 3.6589x^3 + 20.0662
 \end{aligned}$$

◇

5.4.2 Παρεμβολή Newton με Πεπερασμένες Διαφορές

Όταν τα σημεία παρεμβολής είναι ισαπέχοντα, με απόσταση μεταξύ τους h , είναι ευκολότερο να εκφράσουμε τους τύπους των πολυωνύμων παρεμβολής με τις πεπερασμένες διαφορές παρά με τις διηρημένες διαφορές και οι αντίστοιχοι τύποι απλοποιούνται. Οι εκφράσεις αυτών των πολυωνύμων προκύπτουν από την παραπάνω μορφή του πολυωνύμου παρεμβολής αν θεωρήσουμε τους τελεστές των πεπερασμένων διαφορών.

Ο τελεστής των προς τα εμπρός πεπερασμένων διαφορών Δ τάξης k ορίζεται από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned}\Delta^0 f(x_n) &= f(x_n) \\ \Delta^1 f(x_n) &= f(x_{n+1}) - f(x_n) \\ \Delta^2 f(x_n) &= \Delta^1 f(x_{n+1}) - \Delta^1 f(x_n) \\ \Delta^3 f(x_n) &= \Delta^2 f(x_{n+1}) - \Delta^2 f(x_n) \\ &\vdots \\ \Delta^k f(x_n) &= \Delta^{k-1} f(x_{n+1}) - \Delta^{k-1} f(x_n)\end{aligned}$$

Τις τιμές των προς τα εμπρός πεπερασμένων διαφορών μίας συνάρτησης μπορούμε να τις συμπληρώσουμε σε έναν πίνακα της μορφής:

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$\Delta^1 f(x_0)$		
x_2	$f(x_2)$	$\Delta^1 f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$
x_3	$f(x_3)$	$\Delta^1 f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_1)$	

Για ισαπέχοντα σημεία όπου $h = x_{i+1} - x_i$ όταν $i = 0, 1, 2, \dots, k$, ο τελεστής Δ των προς τα εμπρός διαφορών k τάξης συνδέεται με τον αντίστοιχο τελεστή των διηρημένων διαφορών με την σχέση

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k},$$

οπότε το πολυώνυμο παρεμβολής αρχικά γράφεται:

$$\begin{aligned}P_k(x) &= f_0 + (x - x_0) \frac{\Delta f_0}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2} + \dots + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}\end{aligned}$$

και ονομάζεται **πολυώνυμο παρεμβολής Newton με προς τα εμπρός διαφορές**. Εάν θεωρήσουμε την νέα μεταβλητή

$$s = \frac{(x - x_0)}{h} \leftrightarrow x = x_0 + sh,$$

τότε θα ισχύει η σχέση $x - x_k = h(s - k)$, και το πολυώνυμο γράφεται:

$$P_k(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!} \cdot \Delta^k f_0.$$

Τα πολυώνυμα αυτά μπορούν να γραφούν και με τις παρακάτω εκφράσεις:

$$P_k(s) = \sum_{n=0}^k \binom{s}{n} \Delta^n f_0$$

χρησιμοποιώντας τους διωνυμικούς συντελεστές

$$\binom{s}{n} = \frac{s!}{n!(s-n)!} = \frac{s \cdot (s-1) \cdots (s-n) \cdot (s-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}.$$

Παράδειγμα 5.4.4 Να γραφεί σε μορφή Newton με προς τα εμπρός διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-2.0	4.0
1	0.0	2.0
2	2.0	8.0

Τα σημεία είναι ισαπέχοντα με $h = 2$ οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο με τις προς τα εμπρός διαφορές. Συμπληρώνουμε τον πίνακα των προς τα εμπρός διαφορών:

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
-2.0	<u>4</u>		
		<u>2 - 4 = -2</u>	
0.0	2		<u>6 - (-2) = 8</u>
		<u>8 - 2 = 6</u>	
2.0	8		

Οπότε το τετραγωνικό πολυώνυμο είναι το

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 4 + \frac{-2}{1! \cdot 2} (x - (-2.0)) + \frac{8}{2! \cdot 2^2} (x - 0.0)(x - (-2)) = \\ &= 4 - (x + 2) + x(x + 2) = x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.4.5 Να γραφεί σε μορφή Newton με προς τα εμπρός διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης $f(x) = e^{2x}$ στα σημεία $x_0 = 0.0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.6, x_3 = 0.9$.

Για το παράδειγμά μας έχουμε $h = 0.3$. Συμπληρώνουμε τον πίνακα προς τα εμπρός διαφορών:

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
0.0	<u>$e^{0.0} = 1.0$</u>			
		<u>0.82212</u>		
0.3	$e^{0.6} = 1.82212$		<u>0.67588</u>	
		1.49800		<u>0.55565</u>
0.6	$e^{1.2} = 3.32012$		1.23153	
		2.72953		
0.9	$e^{1.8} = 6.04965$			

Οπότε το κυβικό πολυώνυμο είναι το

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= 1.0 + \frac{0.82212}{1! \cdot 0.3}(x - 0.0) + \frac{0.67588}{2! \cdot 0.3^2}(x - 0.0)(x - 0.3) + \\
 &+ \frac{0.55565}{3! \cdot 0.3^3}(x - 0.0)(x - 0.3)(x - 0.6) \\
 &= 1 + 2.7404x + 3.75489x(x - 0.3) + 3.4299x(x - 0.3)(x - 0.6) \\
 &= 3.4299x^3 + 0.66798x^2 + 2.23132x + 1
 \end{aligned}$$

◇

Παράδειγμα 5.4.6 Να γραφεί σε μορφή Newton με προς τα εμπρός διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης $f(x) = x + \sin(x)$ στα σημεία $x_0 = 0.0, x_1 = 0.5, x_2 = 1.0, x_3 = 1.5$.

Για το παράδειγμά μας έχουμε $h = 0.5$. Συμπληρώνουμε τον πίνακα προς τα εμπρός διαφορών:

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
0.0	0.0			
		0.97943		
0.5	0.97943		-0.11739	
		0.86204		-0.08863
1.0	1.84147		-0.20602	
		0.65602		
1.5	2.49749			

Οπότε το κυβικό πολυώνυμο είναι το

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= 0.0 + \frac{0.97943}{1! \cdot 0.5}(x - 0.0) - \frac{0.11739}{2! \cdot 0.5^2}(x - 0.0)(x - 0.5) - \\
 &- \frac{0.08863}{3! \cdot 0.5^3}(x - 0.0)(x - 0.5)(x - 1.0) \\
 &= 1.95886x - 0.23478x(x - 0.5) - 0.11739x(x - 0.5)(x - 1.0) \\
 &= -0.11739x^3 - 0.058695x^2 + 2.01755x
 \end{aligned}$$

◇

5.5 Παρεμβολή Hermite

Η **κυβική Hermite παρεμβολή** μπορεί να εφαρμοστεί όταν εκτός από τις τιμές μίας συνάρτησης σε κάποια σημεία και γνωρίζουμε και τις τιμές της παραγώγου της. Όταν γνωρίζουμε τα $f(x_0) = f_0, f'(x_0) = f'_0, f(x_1) = f_1, f'(x_1) = f'_1$ μπορούμε να ορίσουμε το πολυώνυμο τρίτου βαθμού

$$p(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

που να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$p(x_0) = f_0, p'(x_0) = f'_0, p(x_1) = f_1, p'(x_1) = f'_1.$$

Από τις συνθήκες αυτές κατασκευάζουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} c_1x_0^3 + c_2x_0^2 + c_3x_0 + c_4 &= f_0 \\ 3c_1x_0^2 + 2c_2x_0 + c_3 &= f'_0 \\ c_1x_1^3 + c_2x_1^2 + c_3x_1 + c_4 &= f_1 \\ 3c_1x_1^2 + 2c_2x_1 + c_3 &= f'_1 \end{aligned}$$

η λύση του οποίου καθορίζει τα c_1, c_2, c_3, c_4 . Ομαδοποιώντας ανά ζεύγη τα δεδομένα μας μπορούμε να υλοποιήσουμε την κατά τμήματα κυβική Hermite παρεμβολή.

Παράδειγμα 5.5.1 Να βρεθεί το κυβικό πολυώνυμο Hermite που παρεμβάλλει τα σημεία που δίνονται στον πίνακα:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	0	0	0
1	1	1	0

Οι παρεμβολικές συνθήκες ορίζουν το σύστημα:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot 0^3 + c_2 \cdot 0^2 + c_3 \cdot 0 + c_4 &= 0 \\ 3c_1 \cdot 0^2 + 2c_2 \cdot 0 + c_3 &= 0 \\ c_1 \cdot 1^3 + c_2 \cdot 1^2 + c_3 \cdot 1 + c_4 &= 1 \\ 3c_1 \cdot 1^2 + 2c_2 \cdot 1 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Από όπου έχουμε

$$\begin{aligned} c_4 &= 0 \\ c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} c_4 &= 0 \\ c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 1 \\ 3c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση:

$$c_1 = -2$$

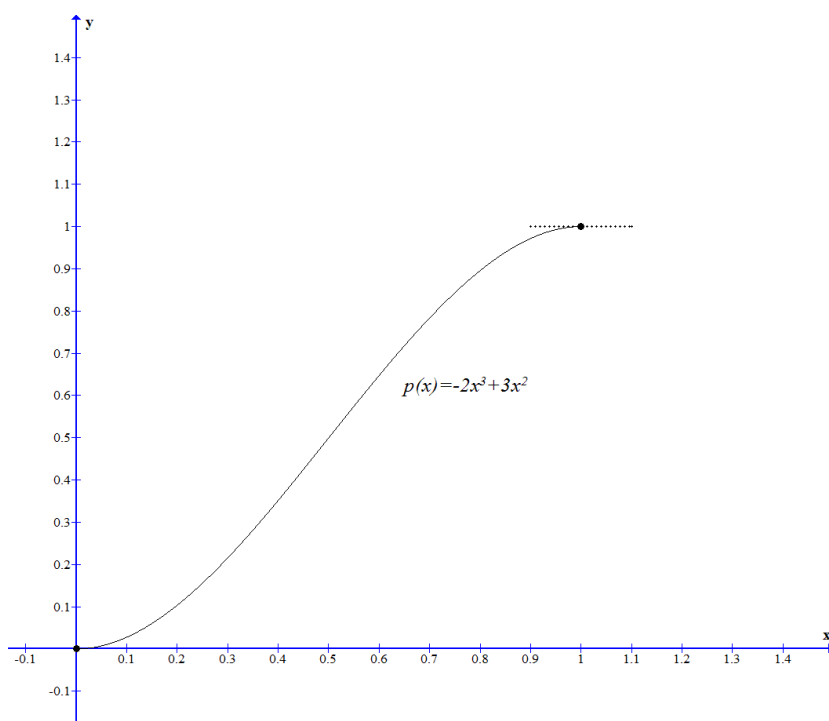
$$c_2 = 3$$

$$c_4 = 0$$

$$c_3 = 0$$

Δηλαδή το πολυώνυμο είναι το

$$p(x) = -2x^3 + 3x^2.$$



Σχήμα 5.6: Κυβική παρεμβολή Hermite στα δεδομένα του παραδείγματος.

Όταν έχουμε $k + 1$ σημεία και στις συνθήκες παρεμβολής λάβουμε υπ' όψιν και την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης, προκύπτουν πολυώνυμα παρεμβολής Hermite βαθμού $2k + 1$. Έτσι για δεδομένη συνάρτηση $f(x)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο Hermite του οποίου οι τιμές του και οι τιμές της πρώτης του παραγώγου συμφωνούν με την $f(x)$ και την $f'(x)$ αντίστοιχα στα σημεία x_0, x_1, \dots, x_k .

Το πολυώνυμο Hermite βαθμού $2k + 1$

$$P_{2k+1}^H = \sum_{i=0}^k f(x_i) H_{k,i}(x) + \sum_{i=0}^k f'(x_i) H_{k,i}^*(x)$$

, είναι το μοναδικό πολυώνυμο που πληροί τις συνθήκες:

$$P_{2k+1}^H(x_i) = f(x_i), \quad \frac{d}{dx} P_{2k+1}^H(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, k$$

Τα πολυώνυμα $H_{k,i}(x)$, $H_{k,i}^*(x)$ είναι βαθμού k και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} H_{k,i}(x) &= \left(1 - 2(x - x_i) L'_{k,i}(x_i)\right) L_{k,i}^2(x), \\ H_{k,i}^*(x) &= (x - x_i) L_{k,i}^2(x) \end{aligned}$$

όπου $L_{k,i}(x)$, $i = 0, 1, \dots, k$ πολυώνυμα Lagrange βαθμού k .

Δηλαδή το πολυώνυμο Hermite είναι το

$$P_{2k+1}^H = \sum_{i=0}^k \left(f(x_i) \left(1 - 2(x - x_i) L'_{k,i}(x_i)\right) + f'(x_i) (x - x_i) \right) L_{k,i}^2(x)$$

Παράδειγμα 5.5.2 Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite πέμπτου βαθμού που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ στα σημεία $x_0 = 0.0, x_1 = 0.5, x_2 = 1.0$.

Για την συγκεκριμένη συνάρτηση ισχύει $k = 2$ και $f'(x) = e^{\frac{x}{2}}/2$.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρουμε παραπάνω ζητάμε

$$\begin{aligned} P_3^H(x) &= \sum_{i=0}^2 \left(f(x_i) \left(1 - 2(x - x_i) L'_{2,i}(x_i)\right) + f'(x_i) (x - x_i) \right) L_{2,i}^2(x) = \\ &= \left(f(0.0) \left(1 - 2L'_{2,0}(0)(x - 0.0)\right) + f'(0.0)(x - 0.0) \right) L_{2,0}^2(x) + \\ &+ \left(f(0.5) \left(1 - 2L'_{2,1}(0.5)(x - 0.5)\right) + f'(0.5)(x - 0.5) \right) L_{2,1}^2(x) + \\ &+ \left(f(1.0) \left(1 - 2L'_{2,2}(1.0)(x - 1.0)\right) + f'(1.0)(x - 1.0) \right) L_{2,2}^2(x) = \\ &= \left(e^0 \left(1 - 2L'_{2,0}(0)x\right) + \frac{e^0}{2}x \right) L_{2,0}^2(x) + \\ &+ \left(e^{0.25} \left(1 - 2L'_{2,1}(0.5)(x - 0.5)\right) + \frac{e^{0.25}}{2}(x - 0.5) \right) L_{2,1}^2(x) + \\ &+ \left(e^{\frac{1}{2}} \left(1 - 2L'_{2,2}(1.0)(x - 1.0)\right) + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}(x - 1.0) \right) L_{2,2}^2(x) \end{aligned}$$

όπου

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)} = 2(x-0.5)(x-1), \quad L'_{2,0}(x) = 2(2x-1.5) \implies L'_{2,0}(0) = 3$$

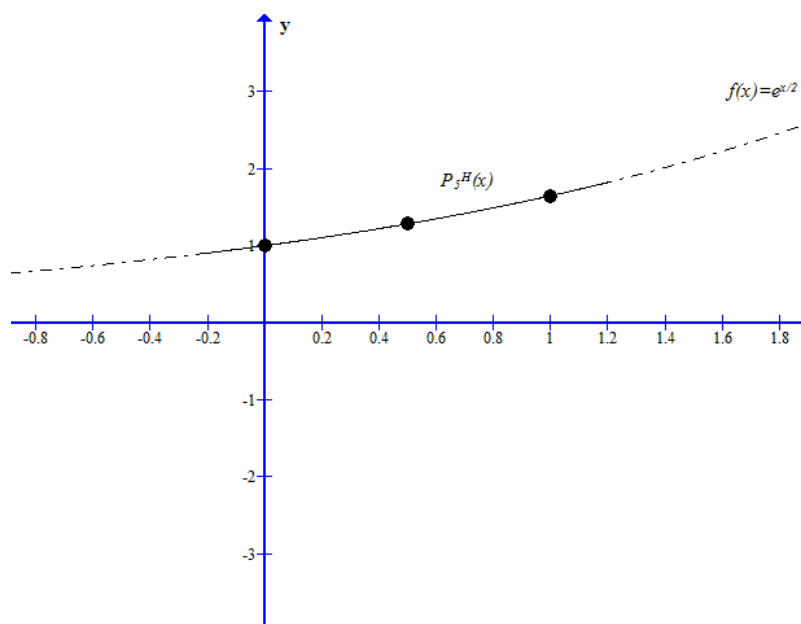
$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-0.0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1.0)} = -4x(x-1), \quad L'_{2,1}(x) = -4(2x-1) \implies L'_{2,1}(0.5) = 0$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-0.0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} = 2x(x-0.5), \quad L'_{2,2}(x) = 2(2x-0.5) \implies L'_{2,2}(1) = 3$$

Οπότε το ζητούμενο πολυώνυμο, βαθμού 5, είναι το

$$\begin{aligned} P_5^H(x) &= (6.5x+1)(2x-1)^2(x-1)^2 + e^{0.25}(0.5x+0.75)16x^2(x-1)^2 + \\ &+ e^{0.5}(6.5-5.5x)x^2(2x-1)^2 \\ &= 0.000335378x^5 + 0.00251933x^4 + 0.0208733x^3 + 0.124993x^2 + 0.5x + 1. \end{aligned}$$

όπου $e^{0.25} \approx 1.28403$ και $e^{0.5} \approx 1.64872$. ◇



Σχήμα 5.7: Παρεμβολή Hermite 5^{ου} βαθμού στα δεδομένα του παραδείγματος.

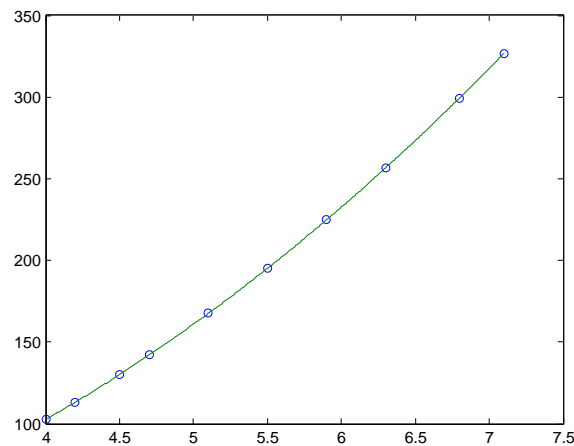
5.6 Κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή

Στον πίνακα που ακολουθεί εμφανίζονται τα δεδομένα ενός πειράματος.

x	4.	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

Χρησιμοποιήσαμε τις δυνατότητες του Matlab ώστε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο 9^{ου} βαθμού που τα παρεμβάλλει. Το πολυώνυμο είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned}
 P_9(x) = & -0.006268x^9 + 0.324796x^8 - 7.433051x^7 + 98.604515x^6 - \\
 & - 835.586238x^5 + 4690.725544x^4 - 17443.740595x^3 + \\
 & + 41444.153995x^2 - 57057.701096x + 34697.187137
 \end{aligned}$$



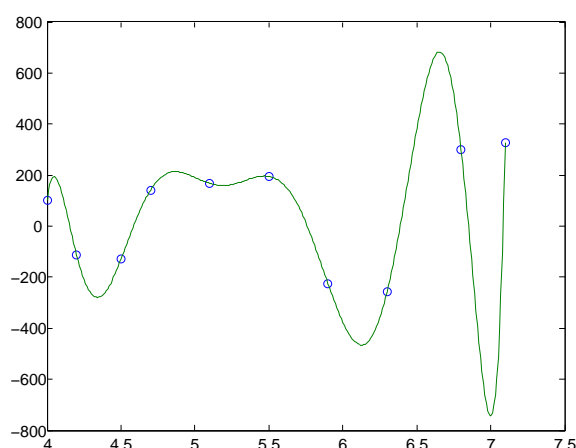
Σχήμα 5.8: Παρεμβολή στα δεδομένα του 1ου παραδείγματος

Κάνουμε το ίδιο και για τα δεδομένα:

x	4.	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	102.56	-113.18	-130.11	142.05	167.53	195.14	-224.87	-256.73	299.50	326.72

Το πολυώνυμο που πήραμε είναι:

$$\begin{aligned}
 P_9(x) = & 1078.963755x^9 - 53037.924001x^8 + 1153249.383626x^7 - \\
 & - 14558120.369197x^6 + 117576731.080645x^5 - 630025926.617306x^4 + \\
 & + 2239807361.885093x^3 - 5094241528.909459x^2 + 6726117703.494138x - \\
 & - 3927940178.392927
 \end{aligned}$$



Σχήμα 5.9: Παρεμβολή στα δεδομένα του 2ου παραδείγματος

Εάν θέλουμε να σχολιάσουμε τα αποτελέσματα από τα γραφήματα παρατηρούμε ότι τα δεδομένα στο πρώτο παράδειγμα είναι τέτοια ώστε το πολυώνυμο (που στην ουσία είναι βαθμού πολύ μικρότερου του 9) τα προσεγγίζει ομαλά. Στην δεύτερη περίπτωση ο βαθμός του πολυώνυμου είναι τόσο υψηλός και τα δεδομένα τέτοια που σε μερικές περιοχές όπως μετά το 6 το πολυώνυμο δεν προσεγγίζει ομαλά τα δεδομένα και ταλαντώνεται μακριά από αυτά.

Στην ουσία το πολυώνυμο χάνει έτσι τη συνοχή των δεδομένων. Για αυτό το λόγο εάν έχουμε πολλά δεδομένα δεν προτιμάμε να τα παρεμβάλουμε όλα με ένα πολυώνυμο αλλά τα ομαδοποιούμε ανά δύο, τρία ή τέσσερα γειτονικά και ζητούμε πολλά πολυώνυμα μικρότερου βαθμού (1^{ου}, 2^{ου} ή 3^{ου} συνήθως) τα οποία προσεγγίζουν καθένα την κάθε ομάδα δεδομένων. Η διαδικασία αυτή λέγεται **κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή** (piecewise polynomial interpolation ή piecewise fitting).

Για την ομαλή παρεμβολή των δεδομένων συνήθως επιβάλλονται επιπλέον παρεμβολικές συνθήκες.

Το πλέον γνωστό και ικανό τμηματικό παρεμβολικό πολυώνυμο, το οποίο σε κάθε υποδιάστημα χρησιμοποιεί πολυώνυμο τρίτου βαθμού, ονομάζεται **κυβική συνάρτηση spline**. Σε αυτό το πολυώνυμο δεν περιοριζόμαστε μόνο στις παρεμβολικές συνθήκες αλλά ζητάμε τα διαδοχικά πολυώνυμα να έχουν την ίδια τιμή στο κοινό τους άκρο αλλά και την ίδια πρώτη και δεύτερη παράγωγο. Δηλαδή, η συνάρτηση spline, η οποία συμβολίζεται συνήθως με S , επιλέγεται έτσι ώστε να είναι συνεχής και να έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους στα κομβικά σημεία.

Είναι γνωστό ότι κάθε κυβικό πολυώνυμο ορίζεται από τέσσερις συντελεστές και επομένως απαιτούνται ανάλογες συνθήκες για την κατασκευή τους. Ο παρακάτω ορισμός καταγράφει αυτές τις συνθήκες.

Έστω η $f \mid [\alpha, \beta]$ και το σύνολο των σημείων $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$. Η καμπύλη spline τρίτου βαθμού S , που παρεμβάλλει την $f(x)$ είναι μία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

Η συνάρτηση S είναι ένα κυβικό πολυώνυμο, στο υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ και συμβολίζεται με S_i , για κάθε $i = 0, 1, \dots, n - 1$

- $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$
- $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$
- $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$
- $S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$

στα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ισχύει μία από τις επόμενες συνοριακές συνθήκες:

$$\text{(α)} \quad S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

$$\text{(β)} \quad S'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{και} \quad S'(x_n) = f'(x_n).$$

Όταν ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (α), η **κυβική spline** ονομάζεται **φυσική spline**.

Για να κατασκευάσουμε την παρεμβολική κυβική spline για μία συνάρτηση $f(x)$, εφαρμόζουμε τις συνθήκες του ορισμού της στο κυβικό πολυώνυμο της μορφής:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1,$$

οπότε προκύπτουν αντίστοιχες εξισώσεις ο κατάλληλος συνδυασμός των οποίων μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές του παρεμβολικού πολυώνυμου.

5.7 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 5.7.1 Δίνεται ο πίνακας τιμών μίας συνάρτησης:

i	0	1	2
x_i	2	2.5	4
f_i	0.5	0.4	0.25

Βρείτε το μοναδικό πολυώνυμο Lagrange $2^{\text{ου}}$ το πολύ βαθμού που τα παρεμβάλλει και προβλέψτε την τιμή στο $x = 3$.

Λύση

Κατασκευάζουμε τους συντελεστές του Lagrange,

$$L_0(x) = \frac{(x - 2.5) \cdot (x - 4)}{(2 - 2.5) \cdot (2 - 4)}, \quad L_1(x) = \frac{(x - 2) \cdot (x - 4)}{(2.5 - 2) \cdot (2.5 - 4)}, \quad L_2(x) = \frac{(x - 2) \cdot (x - 2.5)}{(4 - 2) \cdot (4 - 2.5)}$$

Από όπου έχουμε

$$L_0(x) = x^2 - 6.5x + 10,$$

$$L_1(x) = -4(x^2 - 6x + 8)/3 = (-4x^2 + 24x - 32)/3,$$

$$L_2(x) = (x^2 - 4.5x + 5)/3.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0.5 \cdot L_0(x) + 0.4 \cdot L_1(x) + 0.25 \cdot L_2(x) \\ &= 0.5 \cdot (3x^2 - 19.5x + 30)/3 + 0.4 \cdot (-4x^2 + 24x - 32)/3 \\ &\quad + 0.25 \cdot (x^2 - 4.5x + 5)/3 \\ &= (0.15x^2 - 1.275x + 3.45)/3 \\ &= 0.05x^2 - 0.425x + 1.15. \end{aligned}$$

Η πρόβλεψη για την τιμή στο $x = 3$ είναι το $P_2(3) = 0.3250$.

Άσκηση 5.7.2 Δίνεται ο πίνακας τιμών μίας συνάρτησης:

i	0	1	2
x_i	1	2	4
f_i	1	3	13

Βρείτε το μοναδικό πολυώνυμο Lagrange $2^{\text{ου}}$ το πολύ βαθμού που τα παρεμβάλλει και προβλέψτε την τιμή στο $x = 3$.

Λύση

Κατασκευάζουμε τους συντελεστές του Lagrange,

$$L_0(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-4)}{(1-2) \cdot (1-4)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-4)}{(2-1) \cdot (2-4)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(4-1) \cdot (4-2)}$$

Από όπου έχουμε

$$L_0(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 8),$$

$$L_1(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4),$$

$$L_2(x) = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2).$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 \cdot L_0(x) + 3 \cdot L_1(x) + 13 \cdot L_2(x) = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 8) + 3 \cdot \frac{-1}{2}(x^2 - 5x + 4) + 13 \cdot \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2) = \\ &= x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Η πρόβλεψη για την τιμή στο $x = 3$ είναι το $P_2(3) = 7$.

Άσκηση 5.7.3 Να γραφεί σε μορφή Newton με διηρημένες διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-1	2
1	0	1
2	1	2
3	2	-7
4	3	10

Λύση

Συμπληρώνουμε τον πίνακα των διηρημένων διαφορών:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	-1	2				
1	0	1	$(1-2)/(0-(-1)) = -1$			
2	1	2	$(2-1)/(1-0) = 1$	$(1-(-1))/(1-(-1)) = 1$		
3	2	-7	$(-7-2)/(2-1) = -9$	$(-9-1)/(2-0) = -5$	$(-5-1)/(2+1) = -2$	
4	3	10	$(10-(-7))/(3-2) = 17$	$(17-(-9))/(3-1) = 13$	$(13-(-5))/(3-0) = 6$	$(6-(-2))/(3-(-1)) = 2$

Οπότε το παρεμβολικό πολυώνυμο τετάρτου βαθμού είναι το

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 2 - (x+1) + (x+1)x - 2(x+1)x(x-1) + 2(x+1)x(x-1)(x-2) \\ &= 2x^4 - 6x^3 - x^2 + 6x + 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.7.4 Να γραφεί σε μορφή Newton με προς τα εμπρός διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία της συνάρτησης που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-1	2
1	0	1
2	1	2
3	2	-7
4	3	10

Λύση

Τα σημεία είναι ισαπέχοντα με $h = 1$ οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο με τις προς τα εμπρός διαφορές. Συμπληρώνουμε τον πίνακα των προς τα εμπρός διαφορών:

i	x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
0	-1	2				
1	0	1	$(1 - 2) = -1$			
2	1	2	$(2 - 1) = 1$	$(1 - (-1)) = 2$		
3	2	-7	$(-7 - 2) = -9$	$(-9 - 1) = -10$	$(-10 - 2) = -12$	
4	3	10	$(10 - (-7)) = 17$	$(17 - (-9)) = 26$	$(26 - (-10)) = 36$	$36 - (-12) = 48$

Οπότε το παρεμβολικό πολυώνυμο τετάρτου βαθμού είναι το

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= 2 + \frac{-1}{1! \cdot 1^1}(x+1) + \frac{2}{2! \cdot 1^2}(x+1)x + \frac{-12}{3! \cdot 1^3}(x+1)x(x-1) \\
 &\quad + \frac{48}{4! \cdot 1^4}(x+1)x(x-1)(x-2) \\
 &= 2 - (x+1) + (x+1)x - 2(x+1)x(x-1) + 2(x+1)x(x-1)(x-2) \\
 &= 2x^4 - 6x^3 - x^2 + 6x + 1.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.7.5 Να γραφεί σε μορφή Newton με προς τα εμπρός διαφορές το πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα τρία πρώτα σημεία της συνάρτησης που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
f_i	1	3	7	13

Στη συνέχεια να γραφεί το πολυώνυμο που τα παρεμβάλλει όλα.

Λύση

Τα σημεία είναι ισαπέχοντα με $h = 1$ οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο με τις προς τα εμπρός διαφορές. Συμπληρώνουμε τον πίνακα των προς τα εμπρός διαφορών:

i	x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
0	1	<u>1</u>			
			$(3 - 1) = \underline{2}$		
1	2	3		$(4 - 2) = \underline{2}$	
			$(7 - 3) = 4$		$(2 - 2) = \underline{0}$
2	3	7		$(6 - 4) = 2$	
			$(13 - 7) = 6$		
3	4	13			

Οπότε το παρεμβολικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που παρεμβάλλει τα 3 πρώτα σημεία είναι το

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 + \frac{2}{1! \cdot 1^1}(x - 1) + \frac{2}{2! \cdot 1^2}(x - 1)(x - 2) \\ &= x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε, επειδή τα 4 σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια καμπύλη δευτέρου βαθμού ίδιο είναι και το πολυώνυμο που τα παρεμβάλλει όλα.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 + \frac{2}{1! \cdot 1^1}(x - 1) + \frac{2}{2! \cdot 1^2}(x - 1)(x - 2) + \frac{0}{3! \cdot 1^3}(x - 1)(x - 2)(x - 3) \\ &= x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

5.8 Ερωτήσεις

Ερώτηση 5.8.1 Ποια γενική ιδέα μας παρέχει το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass;

Ερώτηση 5.8.2 Ποιο είναι το κύριο χαρακτηριστικό της προσέγγισης με πολυώνυμο Taylor;

Ερώτηση 5.8.3 Ποια είναι η σχέση που ικανοποιούν τα βασικά πολυώνυμα Lagrange ώστε να εξασφαλιζεται η ισχύ των παρεμβολικών συνθηκών;

Ερώτηση 5.8.4 Ποιο χαρακτηριστικό θα μας οδηγήσει στο να επιλέξουμε να υπολογίσουμε ένα παρεμβολικό πολυώνυμο με τη μέθοδο παρεμβολής Newton αντί της μεθόδου παρεμβολής Lagrange;

Ερώτηση 5.8.5 Πότε μπορούμε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με πεπερασμένες διαφορές;

Ερώτηση 5.8.6 Τι είναι η κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή και γιατί επιλέγουμε να την εφαρμόσουμε;

Ερώτηση 5.8.7 Τι υλοποιεί η παρεμβολή Hermite;

Ερώτηση 5.8.8 Τι εξασφαλίζει η παρεμβολή με κυβικά πολυώνυμα *spline*;

Κεφάλαιο 6

Αριθμητική Διαφόριση και Ολοκλήρωση

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης με τις οποίες μπορούμε να προσεγγίσουμε παραγώγους και ολοκληρώματα. Η παραγωγή και η ολοκλήρωση αποτελούν βασικές πράξεις του διαφορικού λογισμού και συναντώνται πολλές εφαρμογές των μαθηματικών στην τεχνολογία και την επιστήμη.

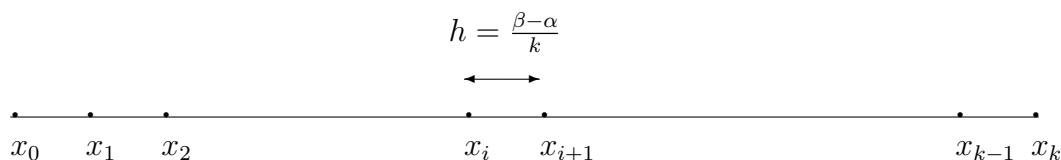
Ο αναλυτικός (ακριβής) υπολογισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι σχετικά εύκολος και άμεσος με την εφαρμογή κανόνων παραγωγής. Άλλωστε τα σύγχρονα μαθηματικά περιβάλλοντα (π.χ. MATLAB, MATHEMATICA) δίνουν την δυνατότητα να υπολογίσουμε με ακριβείς (συμβολικές) πράξεις τις παραγώγους μιας συνάρτησης. Ωστόσο, ο υπολογισμός της παραγώγου σε κάποιο σημείο μπορεί να αποτελεί μέρος μίας άλλης προσεγγιστικής διαδικασίας. Συνήθως, σε τέτοιες περιπτώσεις, ενσωματώνουμε στην προσεγγιστική μέθοδο προσεγγίσεις της παραγώγου.

Σε αντίθεση με ότι συμβαίνει με τις παραγώγους, ο αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης μπορεί να είναι πολύ δύσκολος ή και ακόμη αδύνατος. Το γεγονός αυτό οδήγησε στην μελέτη και ανάπτυξη πολλών αριθμητικών διαδικασιών για τον υπολογισμό της τιμής ενός ορισμένου ολοκληρώματος. Σε πολλές περιπτώσεις οι προσεγγιστικές μέθοδοι δουλεύουν καλά επειδή η ολοκλήρωση είναι μία ομαλή διαδικασία και τα σφάλματα της προσέγγισης συνήθως αλληλοαναιρούνται χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν παρουσιάζονται διάφορες δυσκολίες.

6.1 Αριθμητική προσέγγιση παραγώγων

Η προσέγγιση των παραγώγων διαφόρων τάξεων μίας συνάρτησης σε κάποιο σημείο γίνεται με τη χρήση των τιμών της συνάρτησης στο ίδιο και σε γειτονικά σημεία. Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση $f \in C[\alpha, \beta]$ και ότι δίνονται οι τιμές $f(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ αυτής σε $k + 1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $[\alpha, \beta]$. Έστω

ακόμη ότι και οι παράγωγοι υψηλότερης τάξης της στο διάστημα αυτό υπάρχουν και ότι είναι συνεχείς. Θεωρούμε επίσης, ότι η διαμέριση αυτή έχει σταθερό πλάτος $h = x_{i+1} - x_i$.



Σχήμα 6.1: Διαμέριση k ίσου μήκους διαστημάτων $[\alpha, \beta]$.

Το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης με κέντρο ένα σημείο x_i της διαμέρισης ισούται με

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!} (x - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_i)^2.$$

Αποκόπτοντας τον όρο του σφάλματος έχουμε την προσέγγιση

$$f(x) \approx f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!} (x - x_i)$$

αντικαθιστώντας όπου x το x_{i+1} και λύνοντας ως προς $f'(x_i)$ έχουμε την **προς τα εμπρός προσέγγιση** της 1ης παραγώγου από τον τύπο:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}.$$

Το απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$E = \left| f'(x_i) - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \right| = \frac{h}{2} f''(\xi)$$

όπου $\xi \in (x_i, x_{i+1})$. Εφόσον η δεύτερη παράγωγος σε αυτό το διάστημα είναι απόλυτα φραγμένη τότε και το σφάλμα της προσέγγισης φράσσεται. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σφάλμα έχει τάξη $\mathcal{O}(h)$.

Γενικά, μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 6.1.1 Το σφάλμα μίας προσέγγισης $E(h)$ λέμε ότι έχει **τάξη σφάλματος** h^p , και συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(h^p)$ όταν υπάρχει θετικός αριθμός K τέτοιος ώστε:

$$E(h) \leq Kh^p.$$

◇

Εάν αντίστοιχα, αντικαταστήσουμε όπου x το x_{i+1} και λύσουμε ως προς $f'(x_i)$ έχουμε την **προς τα πίσω προσέγγιση** της 1ης παραγώγου από τον τύπο :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}.$$

Για να παράξουμε τύπους παραγωγίσις γενικά, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.3 γράφουμε τη συνάρτηση ως :

$$f(x) = \sum_{j=0}^k f(x_j) \cdot L_j(x) + \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi(x))$$

όπου $L_j(x)$ τα πολυώνυμα Lagrange.

Παραγωγίζοντας μία (ή και περισσότερες φορές) έχουμε μία έκφραση της πρώτης παραγώγου (αλλά και ανώτερων αντίστοιχα) της συνάρτησης. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{j=0}^k f(x_j) \cdot L_j'(x) + D_x \left[\frac{(x-x_0) \cdots (x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi(x)) \right] \\ &+ \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_k)}{(k+1)!} D_x [f^{(k+1)}(\xi(x))] \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = x_i$ ο τελευταίος όρος μηδενίζεται και ο τύπος γίνεται :

$$f'(x_i) = \sum_{j=0}^k f(x_j) \cdot L_j'(x_i) + \frac{f^{(k+1)}(\xi(x_i))}{(k+1)!} \prod_{m=0, m \neq i}^k (x_i - x_m).$$

Ο τύπος αυτός ονομάζεται **τύπος $k+1$ -σημείων για την προσέγγιση της παραγώγου $f'(x_i)$** .

Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο που παρεμβάλει τα σημεία x_{i-1}, x_i, x_{i+1} έχουμε

$$P_2(x) = L_{i-1}(x)f(x_{i-1}) + L_i(x)f(x_i) + L_{i+1}(x)f(x_{i+1})$$

όπου

$$\begin{aligned} L_{i-1}(x) &= \frac{(x-x_i) \cdot (x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i) \cdot (x_{i-1}-x_{i+1})}, \\ L_i(x) &= \frac{(x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1})}, \\ L_{i+1}(x) &= \frac{(x-x_{i-1}) \cdot (x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1}) \cdot (x_{i+1}-x_i)} \end{aligned}$$

Εάν παραγωγίσουμε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} L'_{i-1}(x) &= \frac{(2x - x_i - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})}, \\ L'_i(x) &= \frac{(2x - x_{i-1} - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})}, \\ L'_{i+1}(x) &= \frac{(2x - x_{i-1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)}. \end{aligned}$$

Εάν τώρα θέσουμε όπου $x = x_i$ και $x_i = x_{i-1} + h, x_{i+1} = x_{i-1} + 2h$ τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} L'_{i-1}(x_i) &= \frac{(2x_i - x_i - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} = -\frac{1}{2h}, \\ L'_i(x_i) &= \frac{(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} = 0, \\ L'_{i+1}(x_i) &= \frac{(2x_i - x_{i-1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} = \frac{1}{2h}. \end{aligned}$$

και καταλήγουμε στον τύπο προσέγγισης της τριών σημείων (κεντρικών διαφορών) της πρώτης παραγώγου

$$\begin{aligned} f'(x_i) &\approx P'_2(x_i) = L'_{i-1}(x_i)f(x_{i-1}) + L'_i(x_i)f(x_i) + L'_{i+1}(x_i)f(x_{i+1}) \\ &= -\frac{1}{2h}f(x_{i-1}) + \frac{1}{2h}f(x_{i+1}) \end{aligned}$$

ή πιο απλά

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

Ανάλογα, παραγωγίζοντας περισσότερες φορές έχουμε τύπους προσέγγισης παραγώγου 2ης τάξης, όπως ο ακόλουθος 3 σημείων

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

αλλά και άλλοι ανώτερης τάξης.

Στον Πίνακα 6.1 συνοψίζονται οι συντελεστές των τύπων προσέγγισης από πρώτη ως τέταρτη παράγωγο. Παρατηρούμε, ότι οι προσεγγίσεις παραγώγων ίδιας τάξης που εμπλέκουν περισσότερα σημεία έχουν μεγαλύτερη τάξη σφάλματος, δηλαδή αποτελούν καλύτερες προσεγγίσεις. Επειδή το σφάλμα εξαρτάται από το πλάτος της διαμέρισης h , όσο πιο μικρό είναι αυτό τόσο καλύτερες προσεγγίσεις έχουμε.

	$f(x_{i-3})$	$f(x_{i-2})$	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	$f(x_{i+2})$	$f(x_{i+3})$	τάξη σφάλμ.
$2hf'(x_i)$	0	0	-1	0	1	0	0	h^2
$h^2f''(x_i)$	0	0	1	-2	1	0	0	h^2
$2h^3f^{(3)}(x_i)$	0	-1	2	0	-2	1	0	h^2
$h^4f^{(4)}(x_i)$	0	1	-4	6	-4	1	0	h^2
$12hf'(x_i)$	0	1	-8	0	8	-1	0	h^4
$12h^2f''(x_i)$	0	-1	16	-30	16	-1	0	h^4
$8h^3f^{(3)}(x_i)$	1	-8	13	0	-13	8	-1	h^4
$6h^4f^{(4)}(x_i)$	-1	12	-39	56	-39	12	-1	h^4

Πίνακας 6.1: Συντελεστές των τύπων υπολογισμού παραγώγων.

Παράδειγμα 6.1.1 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = xe^x$ και τον ακόλουθο πίνακα τιμών της:

i	0	1	2	3	4
x_i	1.8	1.9	2	2.1	2.2
f_i	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.855030

η παράγωγος της συνάρτησης ισούται με $f'(x) = (x+1)e^x$ η οποία στο σημείο 2 ισούται με $f'(2) = 22.167168$.

Η προσέγγιση της τιμής της παραγώγου με τον τύπο της προς τα εμπρός διαφοράς είναι

$$f'(2) \approx \frac{f(2.1) - f(2)}{0.1} = \frac{17.148957 - 14.778112}{0.1} = 23.708370$$

και το απόλυτο σφάλμα 1.541201.

Για τον αντίστοιχο τύπο τριών σημείων έχουμε

$$f'(2) \approx \frac{f(2.1) - f(1.9)}{2 \cdot 0.1} = \frac{17.148957 - 12.703199}{0.2} = 22.22879$$

με απόλυτο σφάλμα 0.061622.

Τέλος, για τον τύπο των πέντε σημείων που υπάρχει στον πίνακα έχουμε

$$f'(2) \approx \frac{-f(2.2) + 8f(2.1) + 0f(2) - 8f(1.9) + f(1.8)}{12 \cdot 0.1} = 22.166999$$

με απόλυτο σφάλμα 1.69×10^{-4} .

◇

6.2 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση $f \in C^{k+1}[\alpha, \beta]$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Η βασικές μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης προσεγγίζουν το ολοκλήρωμα αυτό με το ακόλουθο άθροισμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^k c_i f(x_i)$$

όπου χρησιμοποιούμε τις τιμές $f(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ την προς ολοκλήρωση συνάρτησης σε $k + 1$ σημεία του $[a, \beta]$.

Είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$f(x) = P_k(x) + E_k(x)$$

όπου $P_k(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού k ορισμένο στα σημεία x_0, x_1, \dots, x_k του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ και $E_k(x)$ το σφάλμα της παρεμβολής. Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι το $P_k(x)$ είναι ένα πολυώνυμο παρεμβολής τύπου Lagrange οπότε:

$$f(x) = \sum_{i=0}^k L_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(k+1)}(\xi(x))}{(k+1)!} \cdot \prod_{i=0}^k (x - x_i).$$

Όταν ολοκληρώσουμε τα μέλη της προηγούμενης σχέσης στο $[\alpha, \beta]$ οπότε προκύπτει η γενική σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=0}^k c_i f(x_i) + E(f)$$

όπου

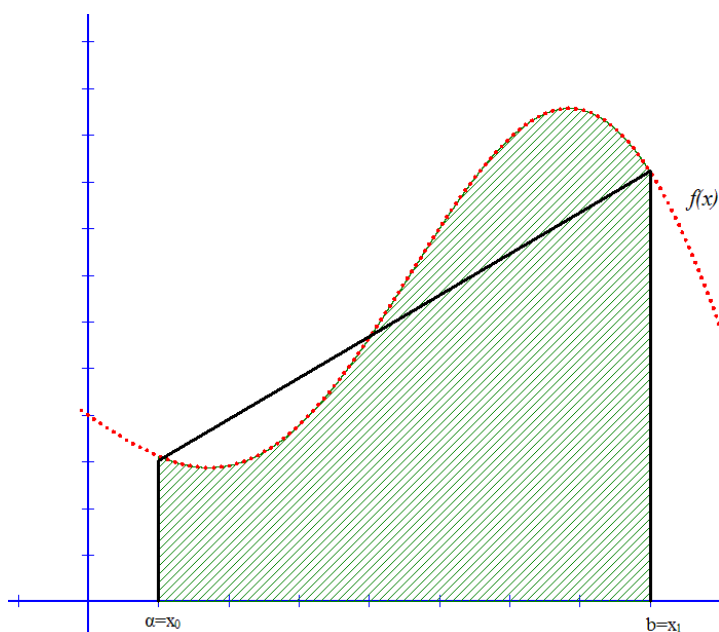
$$c_i = \int_{\alpha}^{\beta} L_i(x) dx, E(f) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f^{(k+1)}(\xi(x))}{(k+1)!} \cdot \prod_{i=0}^k (x - x_i) dx.$$

6.2.1 Τύποι Newton Cotes

Ο πιο απλός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι ο **κανόνας του Τραπεζίου**:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \xi \in (x_0, x_1).$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει όταν $k = 1$ και εμπλέκει δύο σημεία (τα άκρα) του διαστήματος ολοκλήρωσης. Στην περίπτωση αυτή $x_0 = \alpha$ και $x_1 = \beta$ και $h = \beta - \alpha$.



Σχήμα 6.2: Κανόνας τραπεζίου

Στο Σχήμα 6.2 βλέπουμε την προσέγγιση του ολοκληρώματος με τον κανόνα του Τραπεζίου.

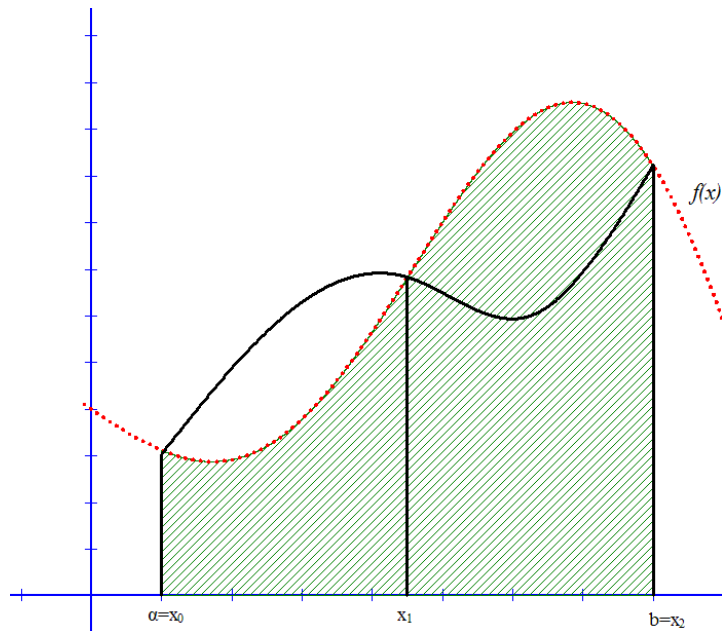
Επίσης εύκολα μπορούμε να καταλήξουμε στον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης του **Simpson**:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \xi \in (x_0, x_2).$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει όταν $k = 2$ και εμπλέκει τρία σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης, τα άκρα και το μέσο του διαστήματος. Στην περίπτωση αυτή $x_0 = \alpha$, $x_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $x_2 = \beta$ και το $h = \frac{\beta - \alpha}{2}$. Στο Σχήμα 6.3 βλέπουμε την προσέγγιση του ολοκληρώματος με τον κανόνα του Simpson .

Ορισμός 6.2.1 Ως **βαθμός ακρίβειας ή ακρίβεια** μίας αριθμητικής μεθόδου ολοκλήρωσης ορίζεται ως ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος p για τον οποίο ο τύπος ολοκλήρωσης είναι ακριβής για τα πολυώνυμα x^k όπου $k = 0, 1, \dots, p$.

Ο τύπος του τραπεζίου έχει βαθμό ακρίβειας ένα ενώ ο τύπος του Simpson τρία. Δηλαδή, ο τύπος του τραπεζίου ολοκληρώνει ακριβώς κάθε πολυωνυμική συνάρτηση πρώτου βαθμού, ενώ ο τύπος του Simpson ολοκληρώνει ακριβώς κάθε πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού.



Σχήμα 6.3: Κανόνας Simpson

Για $k > 2$ μπορούμε να υπολογίσουμε και άλλους τύπους της οικογένειας των κλειστών τύπων **Newton Cotes**, τρεις από τους πιο δημοφιλείς είναι οι ακόλουθοι:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$$

$$- \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi), \xi \in (x_0, x_3)$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4))$$

$$- \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi), \xi \in (x_0, x_4)$$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x) dx = \frac{5h}{288} (19f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) + 19f(x_5))$$

$$- \frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\xi), \xi \in (x_0, x_5)$$

Από τους παραπάνω, ο πρώτος τύπος που χρησιμοποιεί 4 σημεία είναι γνωστός και ως κανόνας ολοκλήρωσης του Simpson 3/8, έχει και αυτός βαθμό ακρίβειας τρία. Για τον όρο του σφάλματος των τύπων Newton Cotes ισχύουν τα ακόλουθα:

Όταν $k = 2\rho + 1$, $f \in C^{k+1}[\alpha, \beta]$, αποδεικνύεται ότι υπάρχει σημείο $\xi \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε:

$$E(f) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+2)!} \int_{\alpha}^{\beta} \prod_{i=0}^k (x - x_i) dx.$$

Ενώ, όταν $k = 2\rho$, $f \in C^{k+2}[\alpha, \beta]$, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε:

$$E(f) = \frac{f^{(k+2)}(\xi)}{(k+2)!} \int_{\alpha}^{\beta} x \prod_{i=0}^k (x - x_i) dx.$$

Όταν το k είναι άρτιος, ο βαθμός ακρίβειας ενός κλειστού τύπου Newton Cotes είναι $k+1$ ενώ όταν είναι περιττός ο βαθμός ακρίβειας είναι k .

Παράδειγμα 6.2.1 Ο κανόνας του τραπέζιου για το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[0, 2]$ είναι

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{2}{2}(f(0) + f(2)) = f(0) + f(2)$$

ενώ ο κανόνας του Simpson για το ίδιο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)],$$

ενώ ο κανόνας του Simpson $3/8$ για το ίδιο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}[f(0) + 3f(\frac{2}{3}) + 3f(\frac{4}{3}) + f(2)].$$

Εάν εφαρμόσουμε τους τρεις αυτούς τύπους σε κάποιες στοιχειώδεις συναρτήσεις των οποίων την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος γνωρίζουμε λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	$\frac{1}{(x+1)}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin(x)$	e^x
Ακριβής τιμή	2	2.667	4	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
Τραπέζιο	2	4.000	8	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
Simpson	2	2.667	4	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421
Simpson $3/8$	2	2.667	4	6.519	1.105	2.960	1.420	6.403

Παρατηρούμε φυσικά, ότι οι κανόνες του Simpson είναι ακριβείς για πολυώνυμο τρίτου βαθμού και υπερέχουν του κανόνα του Τραπεζίου ο οποίος είναι ακριβής μόνο για το γραμμικό πολυώνυμο. Ο κανόνας του Simpson $3/8$ έχει μικρότερο σφάλμα από τον κανόνα του Simpson, ενώ έχουν οι όροι του σφάλματός τους έχουν την ίδια τάξη (δύναμη που υψώνεται το βήμα h). Ωστόσο στον πρώτο έχουμε ένα σημείο παραπάνω στη διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης, οπότε και μικρότερο βήμα h το οποίο είναι μικρότερο της μονάδας.

◇

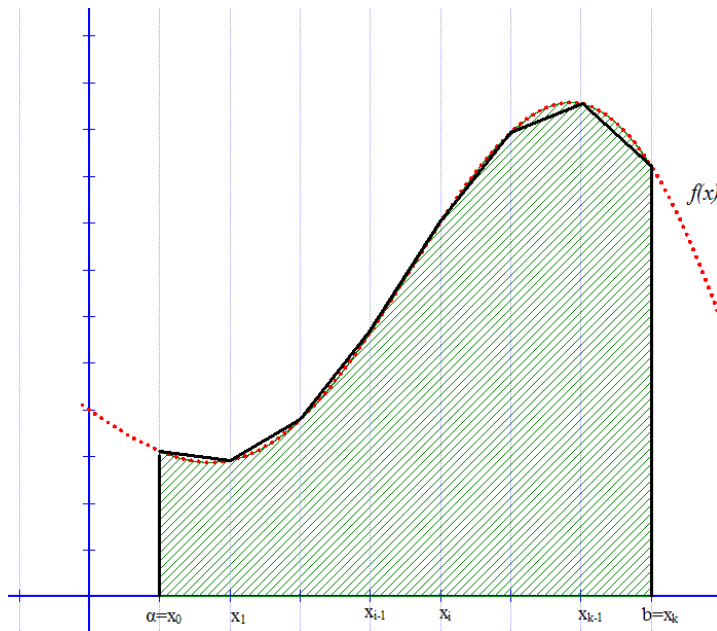
6.2.2 Σύνθετοι τύποι ολοκλήρωσης

Από κάθε απλό τύπο ολοκλήρωσης Newton Cotes μπορούμε να φτιάξουμε έναν σύνθετο. Για παράδειγμα εάν διαμερίσουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε k υποδιαστήματα και εφαρμόσουμε σε καθένα από αυτά τον κανόνα του Τραπεζίου οδηγούμαστε στον **σύνθετο τύπο του Τραπεζίου**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{h}{2} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) + f(x_k) \right\} - \frac{h^3}{12} \cdot \sum_{i=1}^k f''(\xi_i), \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Αποδεικνύεται ότι για τον όρο του σφάλματος ισχύει η σχέση:

$$E_k = -\frac{h^3}{12} \cdot \sum_{i=1}^k f''(\xi_i), \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) = -\frac{h^2}{12} \cdot (\beta - \alpha) \cdot f''(\xi)$$



Σχήμα 6.4: Σύνθετος κανόνας τραπεζίου

Στο Σχήμα 6.4 βλέπουμε γραφικά την προσέγγιση του ολοκληρώματος με τον σύνθετο τύπο του Τραπεζίου.

Παράδειγμα 6.2.2 Είχαμε δει στο παράδειγμα 6.2.1 ότι ο κανόνας του τραπεζίου ($k = 1$) για το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στο διάστημα $[0, 2]$ είναι

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{2}{2} (f(0) + f(2)) = e^0 + e^2 = 8.389056$$

ενώ η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι 6.389056. Θεωρώντας $k = 2$ (δηλαδή $h = 1$) και εφαρμόζοντας τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου έχουμε

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + 2f(1) + f(2)) = \frac{1}{2}(e^0 + 2e + e^2) = 6.912809.$$

Για $k = 4$ (δηλαδή $h = 0.5$) και εφαρμόζοντας τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &\approx \frac{0.5}{2}(f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + f(2)) \\ &= \frac{0.5}{2}(e^0 + 2e^{0.5} + 2e + 2e^{1.5} + e^2) = 6.521610. \end{aligned}$$

Για $k = 8$ (δηλαδή $h = 0.25$) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &\approx \frac{0.25}{2}(f(0) + 2 \sum_{i=1}^7 f(0.25 * i) + f(2)) \\ &= \frac{0.25}{2}(e^0 + 2 \sum_{i=1}^7 e^{0.25*i} + e^2) = 6.422297. \end{aligned}$$

Τέλος, για $k = 16$ (δηλαδή $h = 0.125$) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &\approx \frac{0.125}{2}(f(0) + 2 \sum_{i=1}^{15} f(0.125 * i) + f(2)) \\ &= \frac{0.125}{2}(e^0 + 2 \sum_{i=1}^{15} e^{0.125*i} + e^2) = 6.397373. \end{aligned}$$

Είναι, φανερό ότι όσο το k μεγαλώνει τόσο το σφάλμα της προσέγγισης μικραίνει. ◇

Ανάλογα όταν το k είναι άρτιος μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του Simpson σε $k/2$ διαδοχικά διαστήματα και να οδηγηθούμε στον σύνθετο τύπο του Simpson:

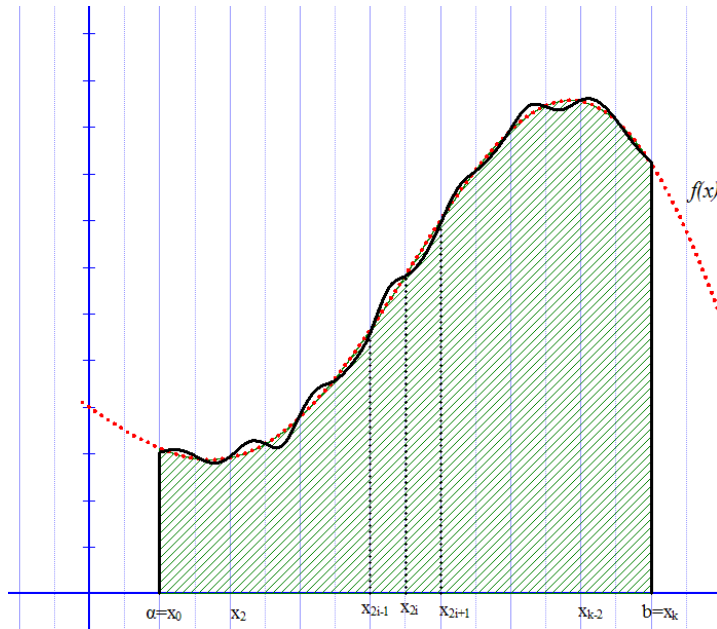
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{k-1})) \\ &\quad + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{k-2})) + f(x_k)] - \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{k/2} f^{(4)}(\xi_i) \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{(k/2)-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{k/2} f(x_{2i-1}) + f(x_k) \right]$$

$$- \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{k/2} f^{(4)}(\xi_j), \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Αποδεικνύεται ομοίως ότι για τον όρο του σφάλματος ισχύει η σχέση :

$$E_k = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{k/2} f^{(4)}(\xi_j), \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) = -(\beta - \alpha) h^4 f^{(4)}(\xi) / 180$$



Σχήμα 6.5: Σύνθετος κανόνας Simpson

Στο Σχήμα 6.3 βλέπουμε την προσέγγιση του ολοκληρώματος με τον κανόνα του Simpson.

Παράδειγμα 6.2.3 Είχαμε δει στο παράδειγμα 6.2.1 ότι ο κανόνας του Simpson ($k = 2$, $h = 1$) για το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στο διάστημα $[0, 2]$ είναι

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)] = \frac{1}{3} [e^0 + 4e + e^2] = 6.420727$$

ενώ η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι 6.389056.

Για $k = 4$ (δηλαδή $h = 0.5$) και εφαρμόζοντας τον σύνθετο τύπο του Simpson έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &\approx \frac{0.5}{3}(f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)) \\ &= \frac{0.5}{3}(e^0 + 4e^{0.5} + 2e + 4e^{1.5} + e^2) = 6.391210.\end{aligned}$$

Για $k = 8$ (δηλαδή $h = 0.25$) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &\approx \frac{0.25}{3}(f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) \\ &+ 2f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)) \\ &= \frac{0.25}{3}(e^0 + 4e^{0.25} + 2e^{0.5} + 4e^{0.75} \\ &+ 2e^1 + 4e^{1.25} + 2e^{1.5} + 4e^{1.75} + e^2) = 6.389193.\end{aligned}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, ο σύνθετος τύπος του Simpson με λιγότερα σημεία διαμέρισης (οπότε και λιγότερους υπολογισμούς της συνάρτησης f , δηλαδή μικρότερο υπολογιστικό κόστος) επιτυγχάνει σε σύγκριση με τον σύνθετο κανόνα Τραπεζίου πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια προσέγγισης.

◇

6.3 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 6.3.1 Για τον ακόλουθο πίνακα τιμών μίας συνάρτησης, χρησιμοποιείστε τον κατάλληλο τύπο προς τα εμπρός, προς τα πίσω και τριών σημείων για να υπολογίσετε προσεγγίσεις της παραγώγου της συνάρτησης στα σημεία αυτά.

i	0	1	2	3
x_i	1.1	1.2	1.3	1.4
f_i	9.0250	11.0232	13.4637	19.4446

Λύση

Για το $x = 1.1$ προσέγγιση της τιμής της παραγώγου με τον τύπο της προς τα εμπρός είναι

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.2) - f(1.1)}{0.1} = \frac{11.0232 - 9.0250}{0.1} = 19.9820$$

Για το $x = 1.2$ με αντίστοιχο τύπο τριών σημείων έχουμε

$$f'(1.2) \approx \frac{f(1.3) - f(1.1)}{2 \cdot 0.1} = \frac{13.4637 - 9.0250}{0.2} = 22.1936$$

Για το $x = 1.3$ με αντίστοιχο τύπο τριών σημείων έχουμε

$$f'(1.3) \approx \frac{f(1.4) - f(1.2)}{2 \cdot 0.1} = \frac{19.4446 - 11.0232}{0.2} = 27.1073$$

Για το $x = 1.4$ προσέγγιση της τιμής της παραγώγου με τον τύπο της προς τα πίσω είναι

$$f'(1.4) \approx \frac{f(1.4) - f(1.3)}{0.1} = \frac{19.4446 - 13.4637}{0.1} = 59.8090.$$

Άσκηση 6.3.2 Χρησιμοποιείστε τον κανόνα του τραπεζίου και τον κανόνα του Simpson για να βρείτε προσεγγίσεις στο ολοκλήρωμα της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ στο διάστημα $[0, 1]$. Υπολογίστε το απόλυτο σφάλμα.

Λύση

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \approx 0.7853981633974483.$$

Ο κανόνας του τραπεζίου για το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[0, 1]$ είναι:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{1+1^2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|0.7853981633974483 - 0.75| = 0.0353981633974483.$$

Ο κανόνας του Simpson για το ίδιο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3}(f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1+0^2} + 4\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right) = \frac{47}{60}$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|0.7853981633974483 - \frac{47}{60}| = |0.7853981633974483 - 0.78333\dots| = 0.00206483\dots$$

Άσκηση 6.3.3 Προσεγγίστε ολοκλήρωμα της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ στο διάστημα $[0, 1]$ χρησιμοποιώντας τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου με $h = 0.5$.

Λύση

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \approx 0.7853981633974483.$$

Ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου είναι:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{0.5}{2}(f(0) + 2f(\frac{1}{2}) + f(1)) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+0^2} + 2\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right) = \frac{31}{40}$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$\left| 0.7853981633974483 - \frac{31}{40} \right| = |0.7853981633974483 - 0.775| = 0.010398163397448.$$

Άσκηση 6.3.4 Προσεγγίστε ολοκλήρωμα της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ στο διάστημα $[0, 1]$ χρησιμοποιώντας τον σύνθετο κανόνα του Simpson με $h = 0.25$.

Λύση

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \approx 0.7853981633974483.$$

Ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &\approx \frac{0.25}{3}(f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)) \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{1+0^2} + 4\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 2\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + 4\frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right) \\ &= 0.7854. \end{aligned}$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|0.7853981633974483 - 0.7854| = 1.8366 \times 10^{-6}.$$

Άσκηση 6.3.5 Χρησιμοποιείστε τον κανόνα του τραπεζίου και τον κανόνα του Simpson για να βρείτε προσεγγίσεις στο ολοκλήρωμα της $f(x) = \frac{1}{1+x}$ στο διάστημα $[0, 1]$. Προσεγγίστε το ίδιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου με $h = 0.5$ και τον σύνθετο κανόνα του Simpson με $h = 0.25$.

Λύση

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\ln(3) \approx 0.6931471805599453.$$

Ο κανόνας του τραπεζίου για το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[0, 1]$ είναι

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+1} \right) = \frac{3}{4}$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|0.6931471805599453 - \frac{3}{4}| = |0.6931471805599453 - 0.75| = 0.0568528 \dots$$

Ο κανόνας του Simpson για το ίδιο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}(f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1+0} + 4\frac{1}{1+(\frac{1}{2})} + \frac{1}{1+1} \right) = \frac{25}{36} \approx 0.6944$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|0.6931471805599453 - 0.6944| = 0.00125282 \dots$$

Ο σύνθετος κανόνας του τραπεζίου

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + 2f(\frac{1}{2}) + f(1)) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+0} + 2\frac{1}{1+(\frac{1}{2})} + \frac{1}{1+1} \right) = \frac{17}{24} \approx 0.7083$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|0.6931471805599453 - 0.7083| = 0.0151528 \dots$$

Ο σύνθετος κανόνας του Simpson

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &\approx \frac{1}{3}(f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{1}{2}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1)) = \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{1+0} + 4\frac{1}{1+(\frac{1}{4})} + 2\frac{1}{1+(\frac{1}{2})} + 4\frac{1}{1+(\frac{3}{4})} + \frac{1}{1+1} \right) \\ &= \frac{1747}{2520} \approx 0.6933. \end{aligned}$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|0.6931471805599453 - 0.6933| = 0.000152819 \dots$$

6.4 Ερωτήσεις

Ερώτηση 6.4.1 Πότε λέμε ότι το σφάλμα προσέγγισης μίας τιμής της παραγώγου μίας συνάρτησης σε κάποιο σημείο μίας διαμέρισης ότι έχει τάξη h^p , και συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(h^p)$;

Ερώτηση 6.4.2 Με τι προσεγγίζουν την τιμή ενός ολοκληρώματος οι βασικές μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης;

Ερώτηση 6.4.3 Τι ονομάζουμε βαθμό ακρίβειας ή ακρίβεια μίας αριθμητικής μεθόδου ολοκλήρωσης; Τι βαθμό ακρίβειας έχει ο τύπος του τραπεζίου και τι ο τύπος του Simpson;

Ερώτηση 6.4.4 Πως δημιουργούνται οι σύνθετοι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης;

Κεφάλαιο 7

Προσέγγιση με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Μία άλλη μεθοδολογία είναι η προσαρμογή μιας συνάρτησης (πολυωνυμικής ή άλλης) σε ένα σύνολο δεδομένων με το κριτήριο των **ελαχίστων τετραγώνων**.

Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο αναζητούμε την βέλτιστη προσεγγιστική καμπύλη (ευθεία, μεγαλύτερου βαθμού πολυώνυμο ή άλλη συνάρτηση) όταν το σφάλμα προσέγγισης είναι το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των τιμών της καμπύλης αυτής και των αντίστοιχων τιμών της συνάρτησης. Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων είναι ένα αξιόπιστο εργαλείο για την προσέγγιση πειραματικών μετρήσεων (data).

7.1 Γραμμική προσέγγιση με Ελάχιστα Τετράγωνα

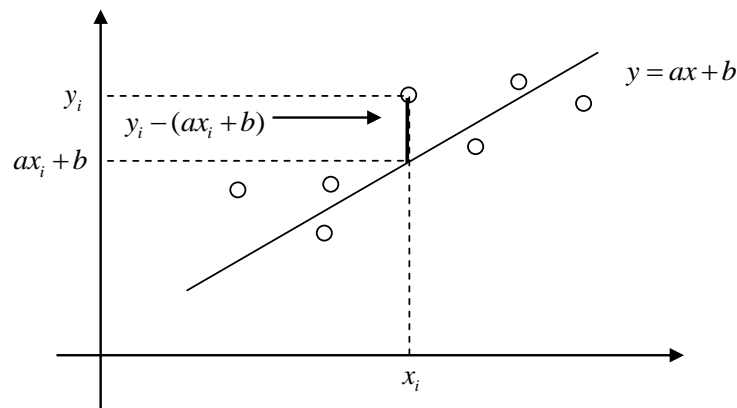
Το γενικό πρόβλημα προσαρμογής της βέλτιστης ευθείας $y = ax + b$ σε ένα σύνολο δεδομένων (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση της παράστασης:

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, των a, b .

Το πρόβλημα εύρεσης του ελαχίστου της παραπάνω συνάρτησης μας οδηγεί στις ακόλουθες αναγκαίες συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial a} E(a, b) = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))^2 = 0$$



Σχήμα 7.1: Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.

$$\frac{\partial}{\partial b} E(a, b) = \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))^2 = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)(-x_i) &= 0 \Leftrightarrow \\ 2 \sum_{i=1}^n (-x_i y_i + ax_i^2 + bx_i) &= 0 \Leftrightarrow \\ - \sum_{i=1}^n x_i y_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)(-1) &= 0 \Leftrightarrow \\ 2 \sum_{i=1}^n (-y_i + ax_i + b) &= 0 \Leftrightarrow \\ - \sum_{i=1}^n y_i + a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n 1 &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^n y_i + a \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = 0$$

Το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων, ο οποίες ονομάζονται **κανονικές εξισώσεις**.

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των κανονικών εξισώσεων, ως προς a και b έχουμε τη λύση:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

Παράδειγμα 7.1.1 Θα υπολογίσουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσεγγίζει τις τιμές του ακόλουθου πίνακα:

i	x_i	y_i
1	-1	-6
2	0	-4
3	2	-6
4	3	2

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με τις τιμές που θα χρειαστούμε, όπως ακολουθεί. Η τελευταία στήλη αφορά τις προσεγγιστικές τιμές της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων στα σημεία προσέγγισης, και την συμπληρώνουμε αφού υπολογίσουμε τα a, b .

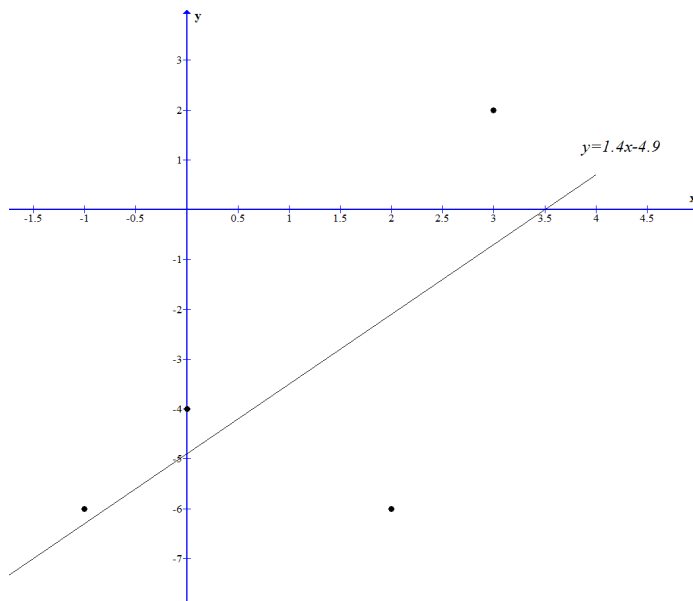
i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y(x_i)$
1	-1	-6	1	6	-5.3
2	0	-4	0	0	-4.9
3	2	-6	4	-12	-2.1
4	3	2	9	6	0.7
$\sum_{i=1}^n$	4	-14	14	0	

Αντικαθιστούμε στη λύση των κανονικών εξισώσεων που αναφέραμε παραπάνω.

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{4 \cdot 0 - 4 \cdot (-14)}{4 \cdot 14 - (4)^2} = 1.4$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{14 \cdot (-14) - 0 \cdot 4}{4 \cdot 14 - (4)^2} = -4.9$$

Η ευθεία είναι η $y(x) = 1.4x - 4.9$.



Σχήμα 7.2: Παράδειγμα 7.1.1 ευθείας ελαχίστων τετραγώνων

◇

Παράδειγμα 7.1.2 Θα εργαστούμε ανάλογα για τις τιμές του ακόλουθου πίνακα:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y(x_i)$
1	1	1.3	1	1.3	1.24
2	2	3.5	4	7.0	2.76
3	3	4.2	9	12.6	4.28
4	4	5.0	16	20.0	5.79
5	5	7.0	25	35.0	7.31
6	6	8.8	36	52.8	8.83
7	7	10.1	49	70.7	10.34
8	8	12.5	64	100.0	11.86
9	9	13.0	81	117.0	13.38
10	10	15.6	100	156.0	14.89
11	11	16.1	121	177.1	16.41
$\sum_{i=1}^n$	66	97.1	506	749.5	

Αντικαθιστούμε στη λύση των κανονικών εξισώσεων που αναφέρουμε παραπάνω.

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{11 \cdot 749.5 - 66 \cdot 97.1}{11 \cdot 506 - 66^2} = 1.517$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{506 \cdot 97.1 - 66 \cdot 749.5}{11 \cdot 506 - 66^2} = -0.276$$

Η ευθεία είναι η $y(x) = 1.517x - 0.276$. Εάν θέλουμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να προβλέψουμε την τιμή για $x = 20$ υπολογίζουμε το $y(20) = 1.517 \cdot 20 - 0.276 = 30.340 - 0.276 = 30.064$.

◇

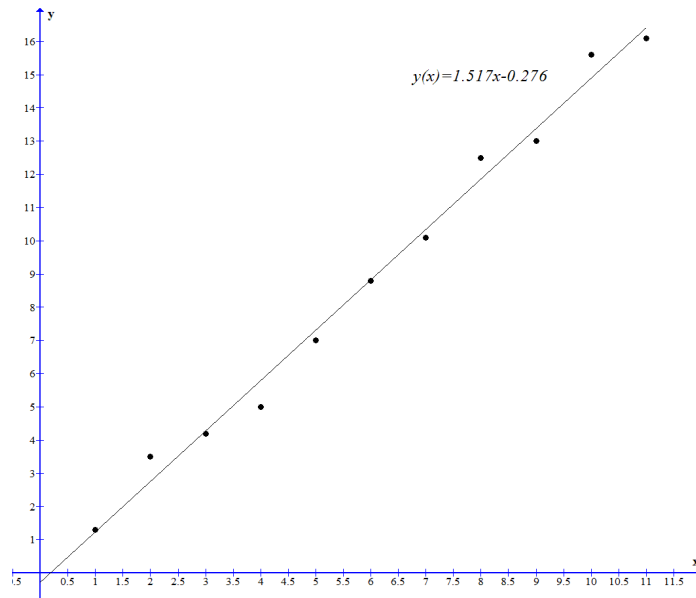
7.2 Πολυωνυμική προσέγγιση με Ελάχιστα Τετράγωνα

Το γενικό πρόβλημα της προσέγγισης των δεδομένων (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, \mu$. Θεωρούμε το πολυώνυμο βαθμού $n < \mu$ της μορφής:

$$p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων απαιτεί τον υπολογισμό των συντελεστών a_0, a_1, \dots, a_n , έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα των ελαχίστων τετραγώνων

$$E = \sum_{i=1}^{\mu} (y_i - p_n(x_i))^2.$$



Σχήμα 7.3: Παράδειγμα 7.1.2 ευθείας ελαχίστων τετραγώνων

Για την ελαχιστοποίηση της E είναι αναγκαίο να ισχύουν οι συνθήκες:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

για κάθε j θα έχουμε

$$-2 \sum_{i=1}^{\mu} y_i x_i^j + 2 \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^{\mu} x_i^{j+k} = 0$$

οπότε προκύπτει ένα σύστημα με $n+1$ αγνώστους a_j και $n+1$ εξισώσεις, τις κανονικές εξισώσεις, της μορφής:

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^{\mu} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{\mu} y_i x_i^j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Το σύστημα αυτό έχει πάντα μοναδική λύση όταν τα σημεία x_i , $i = 1, 2, \dots, \mu$ είναι διακεκριμένα (διάφορα) μεταξύ τους.

Στην περίπτωση όπου $n = 2$ αναζητούμε ένα τετραγωνικό πολυώνυμο της μορφής

$$p_3(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

το οποίο ελαχιστοποιεί το σφάλμα

$$E = \sum_{i=0}^{\mu} (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i + a_0)^2.$$

Το πολυώνυμο αυτό καθορίζεται λύνοντας το ακόλουθο γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους (τα a_0, a_1, a_2):

$$\begin{aligned} \mu a_0 + \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_i^2\right)a_2 &= \sum_{i=1}^{\mu} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_i^3\right)a_2 &= \sum_{i=1}^{\mu} y_i x_i \\ \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_i^2\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_i^3\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_i^4\right)a_2 &= \sum_{i=1}^{\mu} y_i x_i^2 \end{aligned}$$

7.3 Εκθετική και λογαριθμική συσχέτιση των δεδομένων

Μερικές φορές τα πειραματικά δεδομένα σχετίζονται με κάποιο εκθετικό κανόνα. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι προτιμότερο η προσεγγιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, να έχει μία από τις μορφές

$$y(x) = be^{ax} \quad y(x) = bx^a.$$

Θεωρούμε πάλι τα δεδομένα (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ και πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές a, b ώστε τα σφάλματα

$$E = \sum_{i=0}^n (y_i - be^{ax_i})^2 \quad \text{ή} \quad E = \sum_{i=0}^n (y_i - bx_i^a)^2$$

να ελαχιστοποιηθούν. Θεωρώντας τις μερικές παραγώγους, όπως παραπάνω, οι κανονικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 2 \sum_{i=0}^n (y_i - be^{ax_i}) (-bx_i e^{ax_i}) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2 \sum_{i=0}^n (y_i - be^{ax_i}) (-e^{ax_i}) = 0 \end{aligned}$$

ή αντίστοιχα

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_{i=0}^n (y_i - bx_i^a) (-bx_i^a \ln x_i) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_{i=0}^n (y_i - bx_i^a) (-x_i^a) = 0.$$

Επειδή αυτές οι εξισώσεις είναι δύσκολο να λυθούν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες λογαρίθμων μπορούμε να τα μετασχηματίσουμε σε μοντέλα γραμμικών εξισώσεων ελαχίστων τετραγώνων:

$$y(x) = be^{ax} \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(b) + ax \Leftrightarrow Y = ax + B$$

$$y(x) = bx^a \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(b) + a \ln(x) \Leftrightarrow Y = aX + B$$

όπου $Y = \ln(y)$ και $B = \ln(b)$ και στα δύο μοντέλα και $X = \ln(x)$ για το δεύτερο. Εφαρμόζοντας τις κατάλληλες λογαριθμώσεις των δεδομένων λύνουμε τα γραμμικά αυτά μοντέλα και καθορίζουμε τις σταθερές a, b .

Παράδειγμα 7.3.1 Θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση $y(x) = be^{ax}$ για να προσεγγίσουμε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τα δεδομένα που δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

i	x_i	y_i	$Y_i = \ln(y_i)$	x_i^2	$x_i Y_i$	$y(x_i)$
1	1.0000	5.1000	1.6292	1.0000	1.6292	5.1199
2	1.2500	5.7900	1.7561	1.5625	2.1952	5.8100
3	1.5000	6.5300	1.8764	2.2500	2.8146	6.5931
4	1.7500	7.4500	2.0082	3.0625	3.5144	7.4818
5	2.0000	8.5600	2.1353	4.0000	4.2707	8.4903
$\sum_{i=1}^n$	7.5000		9.4053	11.8750	14.4241	

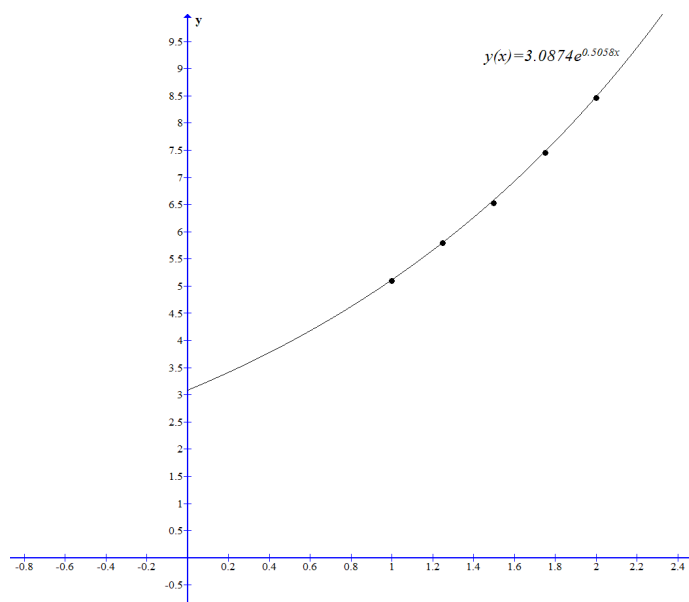
Οπότε σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω έχουμε,

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{5 \cdot 14.4241 - 7.5 \cdot 9.4053}{5 \cdot 11.875 - 7.5^2} = 0.5058$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n x_i Y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{11.875 \cdot 9.4053 - 14.422 \cdot 7.5}{5 \cdot 11.875 - 7.5^2} = 1.1273$$

Η ευθεία που προσαρμόζει τα λογαριθμισμένα δεδομένα είναι η

$$Y(x) = 0.5058x + 1.1273.$$



Σχήμα 7.4: Παράδειγμα 7.3.1 εκθετικού μοντέλου

Από τη σχέση

$$B = \ln(b) \Leftrightarrow b = e^B = e^{1.1273} = 3.0874$$

οπότε το ζητούμενο μοντέλο είναι το

$$y(x) = be^{ax} = 3.0874e^{0.5058x}.$$

Παράδειγμα 7.3.2 Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την άληθη εκθετική συνάρτηση $y(x) = bx^a$ για να προσεγγίσουμε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος. Μετασχηματίζουμε ανάλογα τον πίνακα:

i	x_i	y_i	$X_i = \ln(x_i)$	$Y_i = \ln(y_i)$	X_i^2	$X_i Y_i$	$y(x_i)$
1	1.0000	5.1000	0	1.6292	0	0	4.9928
2	1.2500	5.7900	0.2231	1.7561	0.0498	0.3919	5.8703
3	1.5000	6.5300	0.4055	1.8764	0.1644	0.7608	6.7006
4	1.7500	7.4500	0.5596	2.0082	0.3132	1.1238	7.4936
5	2.0000	8.5600	0.6931	2.1353	0.4805	1.4801	8.2560
$\sum_{i=1}^n$	7.5000		1.8814	9.4053	1.0078	3.7566	

Οπότε σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω έχουμε,

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} = \frac{5 \cdot 3.7566 - 1.8814 \cdot 9.4053}{5 \cdot 1.0078 - 1.8814^2} = 0.7256$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n X_i Y_i \sum_{i=1}^n X_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} = \frac{1.0078 \cdot 9.4053 - 3.7566 \cdot 1.8814}{5 \cdot 1.0078 - 1.8814^2} = 1.6080$$

Η ευθεία που προσαρμόζει τα λογαριθμισμένα δεδομένα είναι η

$$Y(x) = 0.7256x + 1.6080.$$

Από τη σχέση

$$B = \ln(b) \Leftrightarrow b = e^B = e^{1.6080} = 4.9928$$

οπότε το ζητούμενο μοντέλο είναι το

$$y(x) = bx^a = 4.9928x^{0.7256}.$$

7.4 Λυμένες Ασκήσεις

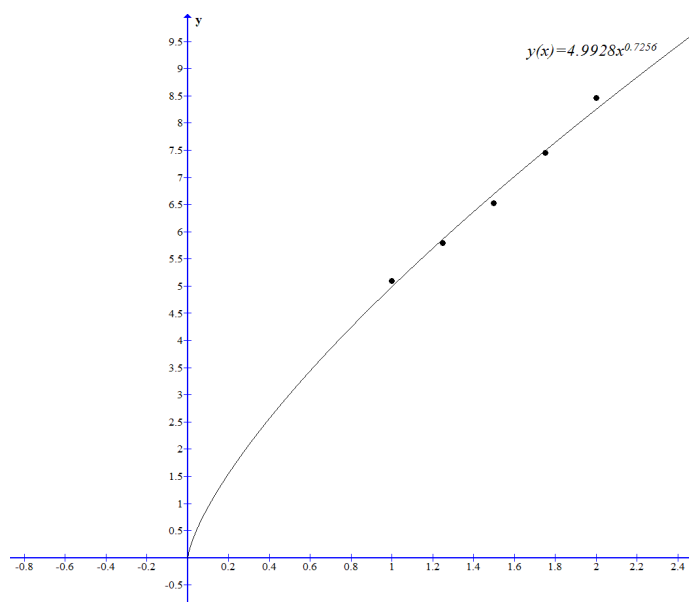
Άσκηση 7.4.1 Να υπολογίσετε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσεγγίζει τις τιμές του ακόλουθου πίνακα:

i	x_i	y_i
1	0.00	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

Στη συνέχεια βρείτε την ελάχιστη τιμή του σφάλματος των ελαχίστων τετραγώνων και προβλέψτε την τιμή στο $x = 0.7$.

Λύση

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με τις τιμές που θα χρειαστούμε, όπως ακολουθεί. Η τελευταία στήλη αφορά τις προσεγγιστικές τιμές της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων στα σημεία προσέγγισης, και την συμπληρώνουμε αφού υπολογίσουμε τα a, b .



Σχήμα 7.5: Παράδειγμα 7.3.2 εκθετικού μοντέλου

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y(x_i)$	$(y(x_i) - y_i)^2$
1	0.00	1.000	0.0000	0.0000	0.8997	0.0101
2	0.25	1.2840	0.0625	0.3211	1.3267	0.0018
3	0.50	1.6487	0.2500	0.8244	1.7536	0.0110
4	0.75	2.1170	0.5625	1.5878	2.1806	0.0040
5	1.00	2.7183	1.0000	2.7813	2.6075	0.0123
$\sum_{i=1}^n$	2.5	8.7680	1.875	5.4516		0.0392

Αντικαθιστούμε στη λύση των κανονικών εξισώσεων που αναφέρουμε παραπάνω.

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{5 \cdot 5.4516 - 2.5 \cdot 8.7685}{5 \cdot 1.8750 - (2.5)^2} = 1.7078$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{1.8750 \cdot 8.7685 - 5.4516 \cdot 2.5}{5 \cdot 1.8750 - (2.5)^2} = 0.8997$$

Η ευθεία είναι η $y(x) = 1.7078x + 0.8997$.

Η ελάχιστη τιμή του σφάλματος είναι η $E = \sum_{i=1}^5 (y_i - y(x_i))^2 = 0.0392$. Η πρόβλεψη για την τιμή στο $x = 0.7$ είναι το $y(0.7) = 2.0952$.

7.5 Ερωτήσεις

Ερώτηση 7.5.1 Τι υλοποιεί η μεθοδολογία προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων;

Ερώτηση 7.5.2 Τι είναι οι κανονικές εξισώσεις;

Ερώτηση 7.5.3 Ποιο σφάλμα ελαχιστοποιούμε στην γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων;

Ερώτηση 7.5.4 Γράψτε τις κανονικές εξισώσεις για την περίπτωση της κυβικής προσέγγισης με ελάχιστα τετράγωνα.

Ερώτηση 7.5.5 Πως μετατρέπεται το εκθετικό μοντέλο σε γραμμικό μοντέλο ελαχίστων τετραγώνων;

Ερώτηση 7.5.6 Πως μετατρέπεται το λογαριθμικό μοντέλο σε γραμμικό μοντέλο ελαχίστων τετραγώνων;

Κεφάλαιο 8

Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

8.1 Εισαγωγή και βασικοί ορισμοί

Στην σύγχρονη εποχή μας καλούμαστε να κατανοήσουμε πολλά φυσικά φαινόμενα αλλά και να λύσουμε τεχνολογικά ή άλλα επιστημονικά προβλήματα. Η μελέτη και ερμηνεία αυτών εξηγείται μέσω πάγιων θεωριών που θεμελιώνονται με την εξέλιξη της κάθε επιστήμης που τα μελετά. Πολλές φορές είναι απαραίτητο το να γνωρίσουμε την εξέλιξη του φαινομένου ή να δώσουμε λύση στο τεχνολογικό πρόβλημα. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά ως γλώσσα έκφρασης και περιγραφής των φαινομένων και των προβλημάτων.

Το σύνολο μαθηματικών εργαλείων (π.χ. των εξισώσεων) αλλά της σχετικής θεωρίας που τα συνδέει με το φυσικό πρόβλημα, αποτελούν το **μαθηματικό μοντέλο** που το περιγράφει. Τα Μαθηματικά μοντέλα δεν είναι όμως τέλει αναπαραστάσεις της φύσης. Υπάρχουν απλοποιητικές παραδοχές ή άγνωστοι παράγοντες που δεν μπορούμε να ερμηνεύσουμε μέσω των εξισώσεων. Όμως αυτές αποτελούν το μόνο εργαλείο που έχουμε στη διάθεσή μας για να λύσουμε το φυσικό πρόβλημα. Σε καταστάσεις οι οποίες περιγράφουν ρυθμούς μεταβολών μεγεθών (π.χ. ταχύτητα) εμφανίζονται στις μαθηματικές σχέσεις και εξισώσεις παράγωγοι αυτών. Έτσι, συχνά καλούμαστε να λύσουμε **διαφορικές εξισώσεις** για να ερμηνεύσουμε το φυσικό πρόβλημα.

Είναι γνωστό ότι μόνο ένα μικρό μέρος των διαφορικών εξισώσεων μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά, δηλαδή να βρεθούν ακριβείς μαθηματικές εκφράσεις των λύσεών τους. Στην εποχή μας, με την χρήση υπολογιστικών συστημάτων, το μεγαλύτερο μέρος αυτών των προβλημάτων επιλύεται προσεγγιστικά από ταχύτατες και ακριβείς μεθόδους. Μερικές από αυτές τις αριθμητικές (προσεγγιστικές) μεθόδους είχαν αναπτυχθεί πριν την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στη ζωή μας. Οι μέθοδοι

όμως αυτές, αλλά και άλλες, βρήκαν πρόσφορο έδαφος για την εφαρμογή τους μέσω των υπολογιστών. Η επιτακτική ανάγκη για προσεγγιστικές λύσεις όλο και περισσότερων φυσικών προβλημάτων υπήρξε η εφελθία δύναμη εξέλιξης των υπολογιστών δύναμη κατά τις πρώτες δεκαετίες της ύπαρξής τους.

Οι **διαφορικές εξισώσεις** είναι εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη ποσότητα είναι μία συνάρτηση (μίας ή περισσότερων μεταβλητών) και περιέχουν και παραγώγους της. Μπορούμε να έχουμε και συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Τις διαφορικές εξισώσεις μπορούμε να τις χωρίσουμε σε δύο βασικές κατηγορίες:

- τις **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις** (ΣΔΕ) στις οποίες η άγνωστη ποσότητα εξαρτάται από μία μεταβλητή με γενικό τύπο:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(k-1)}(x), y^{(k)}(x)) = 0.$$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η γνωστή λογιστική διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) = y(x)(1 - y(x)).$$

- τις **Διαφορικές με Εξισώσεις Μερικές Παραγώγους** (ΜΔΕ) στις οποίες η άγνωστη ποσότητα εξαρτάται από δύο ή περισσότερες μεταβλητές. Μία συνηθισμένη μορφή τέτοιων εξισώσεων, η οποία πηγάζει από βασικούς νόμους της Φυσικής, μπορεί να είναι η διαφορική εξίσωση σε δύο διαστάσεις η οποία γράφεται ως:

$$a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = g.$$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ως **τάξη k της διαφορικής εξίσωσης** ονομάζουμε την τάξη της μέγιστης παράγωγου στην οποία εμφανίζεται η άγνωστη ποσότητα στην διαφορική εξίσωση. Η τάξη της λογιστικής εξίσωσης είναι ένα ενώ της κυματικής δύο. Ως **γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης k τάξης** εννοούμε το καθορισμό όλων των k -φορές συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων οι οποίες όταν, μαζί με τις παραγώγους τους, αντικατασταθούν στην διαφορική εξίσωση, την ικανοποιούν πλήρως. Στις ΣΔΕ k τάξης μία γενική λύση περιέχει k ολοκληρωτικές σταθερές, ως παραμέτρους, οι οποίες μας επιτρέπουν να επιλέξουμε από το σύνολο των λύσεων εκείνη που ικανοποιεί τις συγκεκριμένες συνθήκες (αρχικές ή συνοριακές) που καθορίζει το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε. Με βάση τα παραπάνω, κατηγοριοποιούμε τα προβλήματα ΣΔΕ σε δύο ομάδες:

- στα προβλήματα **Αρχικών Τιμών** (ΠΑΤ) στα οποία τη διαφορική εξίσωση συνοδεύουν συνθήκες της λύσης (ή/και των παραγώγων της) σε ένα αρχικό σημείο της λύσης.
- στα προβλήματα **Συνοριακών Τιμών** (ΠΣΤ) στα οποία τη διαφορική εξίσωση συνοδεύουν συνθήκες της λύσης (ή/και των παραγώγων της) στα άκρα ενός διαστήματος της λύσης.

Η γενική λύση της λογιστικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = \frac{e^x}{e^x + e^c}$$

όπου το C είναι η παράμετρος της λύσης. Εάν θέσουμε την αρχική συνθήκη $y(0) = \frac{1}{2}$ ($e^c = 1$), έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών το οποίο μπορεί να δειχθεί ότι έχει λύση

$$y(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

η οποία είναι γνωστή ως λογιστική καμπύλη.

Από τις ΣΔΕ θα μας απασχολήσουν μόνο τα ΠΑΤ πρώτης τάξης και θα μελετήσουμε **προσεγγιστικές ή αριθμητικές λύσεις** τους. Μία αριθμητική λύση παράγει προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος σε σημεία του πεδίου στο οποίο θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση. Οι προσεγγιστικές λύσεις θα πρέπει να συγκλίνουν στις αντίστοιχες αναλυτικές, να έχουν την επιθυμητή ακρίβεια, να είναι ευσταθείς και να αναπαράγουν ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης του προβλήματος.

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξης μπορεί να εκφραστεί με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = s, x \geq x_0, \quad (8.1)$$

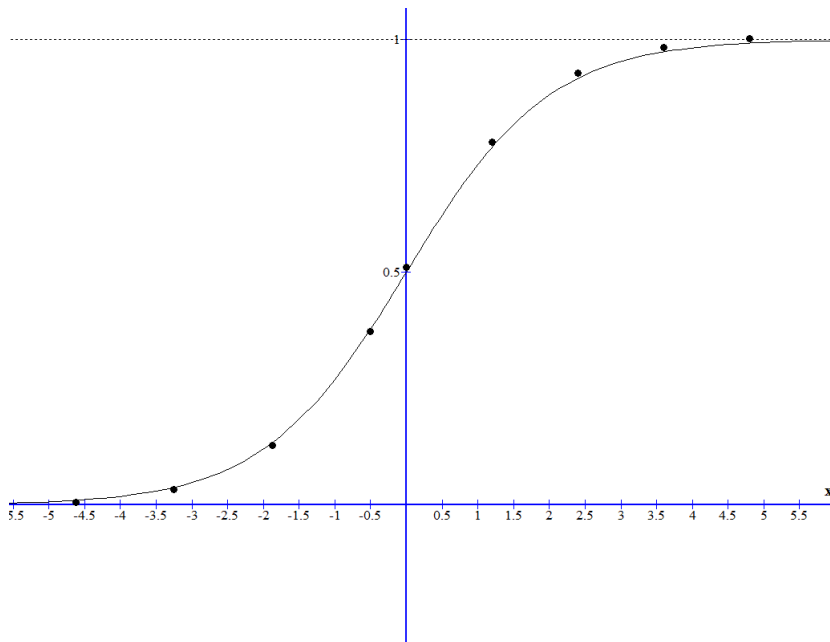
όπου

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T, f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T, s = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T.$$

Η θεωρία μας εξασφαλίζει τις συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων του προβλήματος (8.1).

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα είναι **καλά-τοποθετημένο** δηλαδή,

- η εξίσωση του γενικού προβλήματος δέχεται λύση,
- υπάρχει μοναδική λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες,
- η μοναδική αυτή λύση είναι ευσταθής. Δηλαδή, μικρές μεταβολές στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος επιφέρουν μικρές μεταβολές στην μοναδική λύση του.



Σχήμα 8.1: Η αναλυτική λύση (συνεχής γραμμή) και μία προσεγγιστική (τελείες) του ΠΑΤ της λογιστικής διαφορικής εξίσωσης.

Υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες μεθόδων για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (8.1), **οι μονοβηματικές (απλού βήματος)** και οι μέθοδοι **πολλαπλού βήματος (πολυβηματικές)**.

Έστω y_n , μία προσέγγιση της θεωρητικής τιμής $y(x_n)$, της λύσης $y(x)$ του παραπάνω προβλήματος στο σημείο x_n και $f_n = f(x_n, y_n)$. Στην περίπτωση των μεθόδων απλού βήματος, με **βήμα μεθόδου** h , η λύση $y(x_{n+1})$ στο σημείο $x_{n+1} = x_n + h$ προσεγγίζεται από το y_{n+1} χρησιμοποιώντας πληροφορίες μόνο από την προσέγγιση της λύσης στο προηγούμενο σημείο x_n . Η γενική μορφή μιας μεθόδου αυτής της κατηγορίας μπορεί να εκφραστεί με την σχέση:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, y_{n+1}, h), \quad (8.2)$$

όπου $\Phi(x_n, y_n, y_{n+1}, h)$, μία προσδιοριστέα συνάρτηση. Αν η συνάρτηση Φ είναι ανεξάρτητη του y_{n+1} η μέθοδος ονομάζεται **άμεση** (explicit), διαφορετικά ονομάζεται **έμμεση** (implicit). Στις άμεσες μέθοδοι η προσέγγιση στο $n+1$ βήμα υπολογίζεται με απλή εφαρμογή του τύπου της μεθόδου, μιας και στο δεξί μέρος της σχέσης (8.2) δεν εμπλέκεται η άγνωστη ποσότητα y_{n+1} . Το απλούστερο παράδειγμα άμεσης μεθόδου είναι η μέθοδος του **Euler**

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

Στις έμμεσες μεθόδους όπου η άγνωστη ποσότητα y_{n+1} εμφανίζεται και στο δεξί μέλος του τύπου της μεθόδου, σχεδόν πάντα, ένα μη γραμμικό σύστημα ως προς το y_{n+1} πρέπει να λυθεί σε κάθε νέο βήμα. Το απλούστερο παράδειγμα έμμεσης μεθόδου είναι η **έμμεση μέθοδος του Euler**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})].$$

Στην περίπτωση των μεθόδων πολλών βημάτων (ας πούμε q), η προσέγγιση της λύσης y_{n+q} στο σημείο x_{n+q} , χρησιμοποιεί πληροφορίες από την προσέγγιση της λύσης στα q προηγούμενα σημεία $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+q-1}$. Η γενική μορφή μιας μεθόδου από την κατηγορία αυτή μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_{i=0}^q a_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^q b_i f(x_{n+i}, y_{n+i})$$

όπου $\{a_i, b_i\}$, $i = 0, 1, \dots, q$ είναι αριθμητικές ποσότητες και οι αρχικές τιμές y_0, y_1, \dots, y_{q-1} θα πρέπει να είναι γνωστές για να έχουμε προσέγγιση στο σημείο y_q . Μία απλή άμεση μέθοδος δύο βημάτων είναι η μέθοδος Mid-point Rule με τύπο

$$y_{n+2} - y_n = 2hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

ενώ έμμεση, η μέθοδος του Simpson με τύπο

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)).$$

Όσο αφορά τα σφάλματα των προσεγγιστικών αυτών διαδικασιών ορίζονται τα παρακάτω.

Ορισμός 8.1.1 Ως **ολικό σφάλμα αποκοπής** (global truncation error) G_{n+1} στο σημείο x_{n+1} , ορίζουμε την ποσότητα:

$$G_{n+1} = \|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\|.$$

◇

Στην περίπτωση που οι ποσότητες είναι βαθμωτές (αριθμητικές) ως $\|\cdot\|$ νοείται η απόλυτη τιμή ενώ για διανυσματικές ποσότητες νοείται κάποια νόρμα.

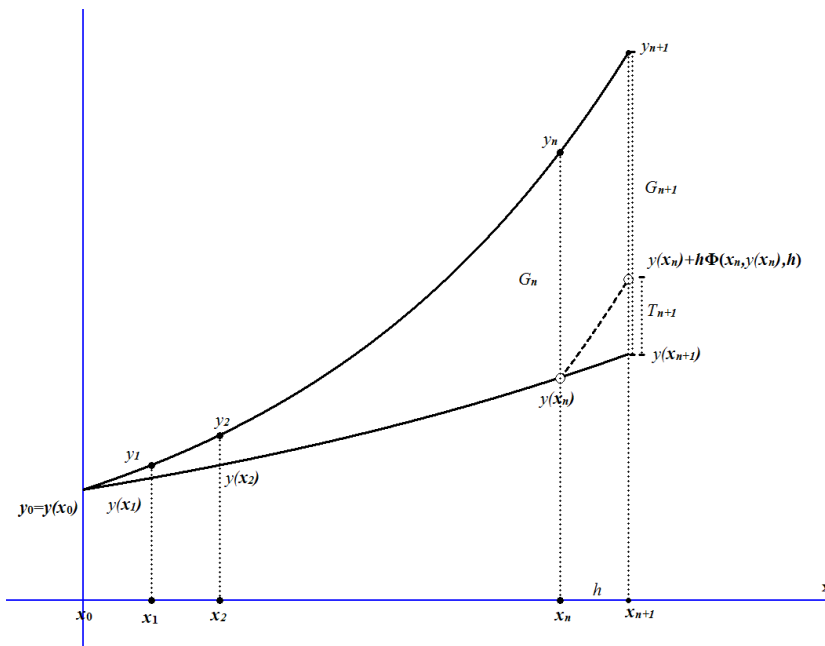
Το ολικό σφάλμα είναι μία ποσότητα η οποία δεν μπορεί να υπολογιστεί εφόσον δεν γνωρίζουμε την ακριβή λύση στο σημείο x_{n+1} . Ένα μέτρο μέτρησης του ολικού σφάλματος, οπότε και της ακρίβειας της μεθόδου, αποτελεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής το οποίο υπολογίζει το κατά πόσο η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών αποτυγχάνει να ικανοποιήσει την μέθοδο.

Ορισμός 8.1.2 Το τοπικό σφάλμα αποκοπής ή διακριτοποίησης (local truncation or discretization error) T_{n+1} στο σημείο x_{n+1} , που αντιστοιχεί στην μέθοδο απλού βήματος ορίζεται από την σχέση:

$$T_{n+1} = \|y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y(x_n), h)\|.$$

◇

Η ποσότητα αυτή υπολογίζει το μέγεθος του ολικού σφάλματος στο νέο σημείο, όταν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν σφάλματα στα προηγούμενα σημεία που εμπλέκει και με την έννοια αυτή θεωρείται τοπικό.



Σχήμα 8.2: Σφάλματα μονοβηματικών μεθόδων

Ορισμός 8.1.3 Μία αριθμητική μέθοδος για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών θα λέμε ότι είναι τάξης p αν

$$T_{n+1} = \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

όπου T_{n+1} το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου στο σημείο x_{n+1} . Αυτή η σχέση σημαίνει ότι υπάρχει ένα $h_0 > 0$ και μία σταθερά $C \neq 0$ έτσι ώστε

$$|T_{n+1}| \leq Ch^{p+1}, \forall h \text{ με } 0 < h < h_0.$$

◇

Όταν μία μέθοδος έχει τάξη p , το τοπικό σφάλμα αποκοπής είναι $\mathcal{O}(h^{p+1})$ και το ολικό σφάλμα $\mathcal{O}(h^p)$.

Εμάς θα μας απασχολήσουν οι μονοδηματικές μέθοδοι οι οποίες είναι και οι πιο δημοφιλείς.

8.2 Οι μέθοδοι Euler και Improved Euler

Η απλή μονοδηματική μέθοδος είναι η **μέθοδος του Euler**. Η μέθοδος αυτή προάγει την προσεγγιστική λύση με βάση τον τύπο:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n). \quad (8.3)$$

Η Euler προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης της $y(x)$ με κέντρο το σημείο x_n το οποίο ισούται με

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{y'(x_n)}{1!} (x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(\xi(x_n))}{2!} (x_{n+1} - x_n)^2$$

όπου $\xi(x_n) \in [x_n, x_{n+1}]$, δεδομένου ότι η y έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα αυτό. Αντικαθιστούμε όπου $x_{n+1} - x_n = h$ και $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!} y''(\xi(h))$$

Αποκόπτοντας τον όρο του σφάλματος έχουμε την προσέγγιση

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)),$$

απ την οποία προκύπτει η (8.3), όταν θεωρήσουμε ότι $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ και $y_n \approx y(x_n)$. Η μέθοδος Euler έχει τάξη 1 δηλαδή το τοπικό σφάλμα αποκοπής της είναι $\mathcal{O}(h^2)$ και το ολικό σφάλμα $\mathcal{O}(h^1)$.

Παράδειγμα 8.2.1 Θα λύσουμε το ΠΑΤ

$$y'(x) = y(x) \text{ με } y(0) = 1$$

και λύση $y(x) = e^x$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει $f(x, y) = y$. Θα λύσουμε το πρόβλημα στο διάστημα $[0, 4]$, με βήμα $h = 1$ αρχικά.

Βήμα 1 $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$

Βήμα 2 $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2 + 1 \cdot 2 = 4$

Βήμα 3 $y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 4 + 1 \cdot 4 = 8$

Βήμα 4 $y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 8 + 1 \cdot 8 = 16$

Όταν επιλέξουμε βήμα $h = 0.5$ έχουμε.

Βήμα 1 $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.5 \cdot 1 = 1.5$

Βήμα 2 $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.5 + 0.5 \cdot 1.5 = 2.25$

Βήμα 3 $y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 2.25 + 0.5 \cdot 2.25 = 3.3750$

Βήμα 4 $y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 3.3750 + 0.5 \cdot 3.3750 = 5.0625$

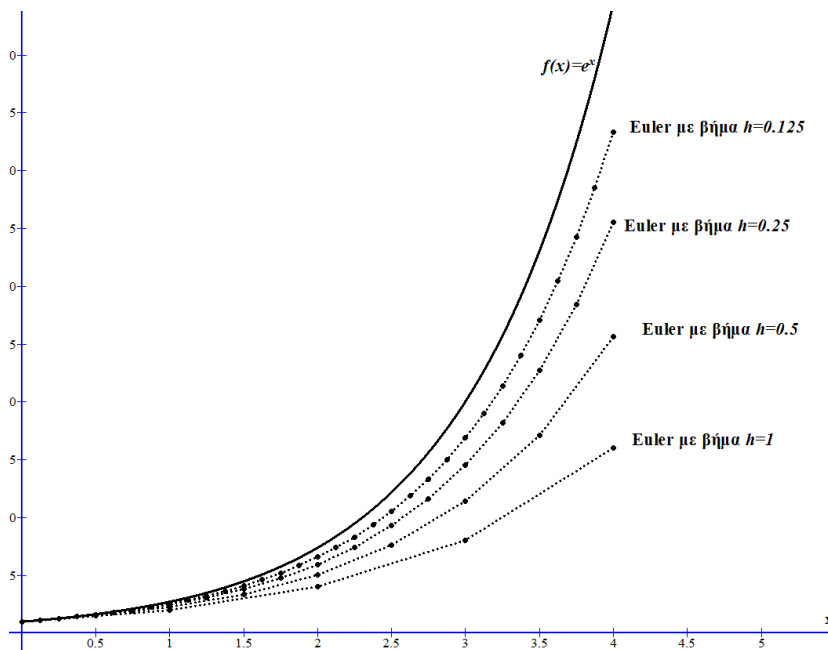
Βήμα 5 $y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 5.0625 + 0.5 \cdot 5.0625 = 7.59375$

Βήμα 6 $y_6 = y_5 + h \cdot f(x_5, y_5) = 7.59375 + 0.5 \cdot 7.59375 = 11.390625$

Βήμα 7 $y_7 = y_6 + h \cdot f(x_6, y_6) = 11.390625 + 0.5 \cdot 11.390625 = 17.085937$

Βήμα 8 $y_8 = y_7 + h \cdot f(x_7, y_7) = 17.085937 + 0.5 \cdot 17.085937 = 25.628906$

Τα αποτελέσματα αυτά (μαζί με τις προσεγγίσεις για $h = 0.25$ και $h = 0.125$) παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 8.3.



Σχήμα 8.3: Λύση με Euler

Η πιο απλή έμμεση μονοβηματική μέθοδος έχει τύπο

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

και ονομάζεται **έμμεση μέθοδος του Euler**. Εάν η f είναι μη γραμμική συνάρτηση του y , ένα μη γραμμικό σύστημα ως προς το y_{n+1} πρέπει να λυθεί σε κάθε νέο βήμα. Τον τύπο της μπορούμε να τον παράγουμε ολοκληρώνοντας τη σχέση $y'(x) = f(x, y(x))$ στο διάστημα $[x_n, x_{n+1}]$.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

και αν αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος με μία προσέγγισή του με τη μέθοδο του Τραπεζίου έχουμε ότι

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{h}{2} (f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))).$$

Τελικά, καταλήγουμε στην έμμεση μέθοδο του Euler, όταν θεωρήσουμε ότι $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ και $y_n \approx y(x_n)$.

Για να διευκολύνουμε την διαδικασία, μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της y_{n+1} , στο δεξί μέλος του παραπάνω τύπου, με μία προσέγγιση άμεσης μεθόδου Euler, $\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$.

Δηλαδή ο τύπος αυτός θα γίνει:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] \Leftrightarrow \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h \cdot f(x_n, y_n))] \end{aligned}$$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως **μέθοδος Improved Euler** (ή Heun's ή modified Euler) και έχει τάξη 2. Δηλαδή, το τοπικό σφάλμα αποκοπής της είναι $\mathcal{O}(h^3)$ και το ολικό σφάλμα $\mathcal{O}(h^2)$.

Παράδειγμα 8.2.2 Θα λύσουμε ξανά το ΠΑΤ

$$y'(x) = y(x) \text{ με } y(0) = 1$$

στο διάστημα $[0, 4]$, με βήμα $h = 1$.

Βήμα 1

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2) = 1 + 0.5 \cdot 3 = 2.5 \end{aligned}$$

Βήμα 2

$$\begin{aligned}\hat{y}_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2.5 + 1 \cdot 2.5 = 5 \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_2, \hat{y}_2)) = \\ &= 2.5 + \frac{1}{2} \cdot (2.5 + 5) = 2.5 + 0.5 \cdot 7.5 = 6.25\end{aligned}$$

Βήμα 3

$$\begin{aligned}\hat{y}_3 &= y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 6.25 + 1 \cdot 6.25 = 12.5 \\ y_3 &= y_2 + \frac{h}{2}(f(x_2, y_2) + f(x_3, \hat{y}_3)) = \\ &= 6.25 + \frac{1}{2} \cdot (6.25 + 12.5) = 6.25 + 0.5 \cdot 18.75 = 15.625\end{aligned}$$

Βήμα 4

$$\begin{aligned}\hat{y}_4 &= y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 15.625 + 1 \cdot 15.625 = 31.250 \\ y_4 &= y_3 + \frac{h}{2}(f(x_3, y_3) + f(x_4, \hat{y}_4)) = \\ &= 15.625 + \frac{1}{2} \cdot (15.625 + 31.250) = 15.625 + 0.5 \cdot 46.875 = 39.0625\end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα αυτά (μαζί με τις προσεγγίσεις για $h = 0.5$) παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 8.4.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα της Improved Euler είναι καλύτερα από αυτά της Euler, κάτι που είναι φυσικό μιας και η τάξη της είναι υψηλότερη.

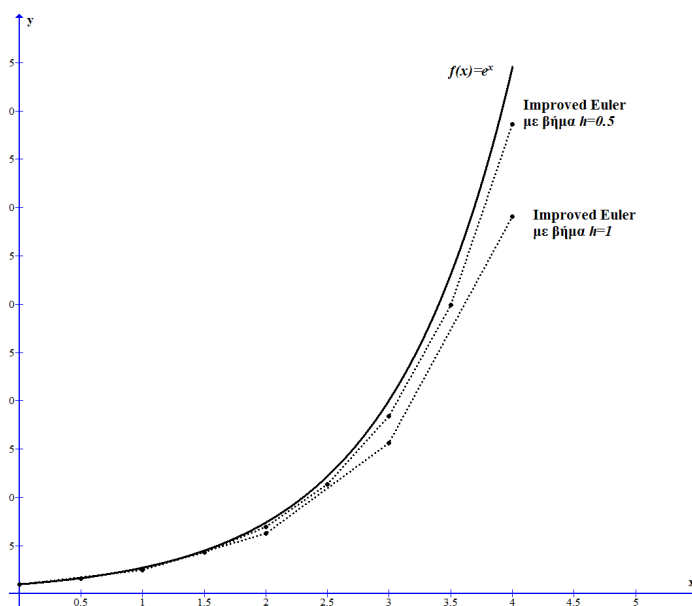
8.3 Άμεσες μέθοδοι Runge-Kutta

Μια ιδιαίτερα δημοφιλής κατηγορία άμεσων μεθόδων αποτελούν οι **μέθοδοι Runge Kutta (RK)** με τύπο

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

όπου

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_i &= f\left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) \\ i &= 2, 3, \dots, s.\end{aligned}$$



Σχήμα 8.4: Λύση με Improved Euler

Ο αριθμός s αποτελεί τον **αριθμό σταδίων της μεθόδου** και h το βήμα της μεθόδου. Η μέθοδος είναι άμεση με την έννοια ότι κάθε k_i εξαρτάται μόνο από τις τιμές, $k_j, j = 1, 2, \dots, i - 1$, οι οποίες έχουν υπολογιστεί προηγουμένως.

Οι ιδιότητες της μεθόδου ορίζονται από τους συντελεστές της c_i, a_{ij}, b_i , και s , τον αριθμό των υπολογισμών των k_i . Για λόγους οικονομίας οι συντελεστές της μεθόδου μπορούν να παρουσιαστούν με ένα πίνακα που είναι γνωστός και ως butcher tableau:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Στην περίπτωση των άμεσων μεθόδων ο πίνακας A είναι αυστηρά κάτω τριγωνικός. Η μέθοδος Euler μπορεί να θεωρηθεί μέθοδος τύπου RK με ένα στάδιο και πίνακα :

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Η μέθοδος improved Euler μπορεί να θεωρηθεί μέθοδος τύπου RK με δύο στάδια και πίνακα :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Ο πλέον χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος της οικογένειας μεθόδων RK είναι η κλασική μέθοδος τεσσάρων σταδίων και τετάρτης τάξης με πίνακα :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Ο τύπος της μεθόδου αυτής, όταν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές της είναι ο ακόλουθος :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + h\frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + h(0k_1 + \frac{1}{2}k_2)\right) \\ k_4 &= f\left(x_n + 1h, y_n + h(0k_1 + 0k_2 + 1k_3)\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.3.1 Θα λύσουμε για άληθη μία φορά το ΠΑΤ

$$y'(x) = y(x) \text{ με } y(0) = 1,$$

με την κλασική μέθοδο RK, στο διάστημα $[0, 4]$, με βήμα $h = 1$.

Βήμα 1

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = y_0 = 1 \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + h\frac{1}{2}k_1\right) = y_0 + \frac{1}{2}k_1 = 1.5 \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + h(0k_1 + \frac{1}{2}k_2)\right) = y_0 + \frac{1}{2}k_2 = 1.75 \\ k_4 &= f\left(x_0 + 1h, y_0 + h(0k_1 + 0k_2 + 1k_3)\right) = y_0 + k_3 = 2.75 \\ y_1 &= y_0 + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) = 2.708333 \end{aligned}$$

Βήμα 2

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_1, y_1) = y_1 = 2.708333 \\ k_2 &= f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + h\frac{1}{2}k_1\right) = y_1 + \frac{1}{2}k_1 = 4.0625 \\ k_3 &= f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + h(0k_1 + \frac{1}{2}k_2)\right) = y_1 + \frac{1}{2}k_2 = 4.739583 \\ k_4 &= f\left(x_1 + 1h, y_1 + h(0k_1 + 0k_2 + 1k_3)\right) = y_1 + k_3 = 7.447917 \\ y_2 &= y_1 + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) = 7.335069 \end{aligned}$$

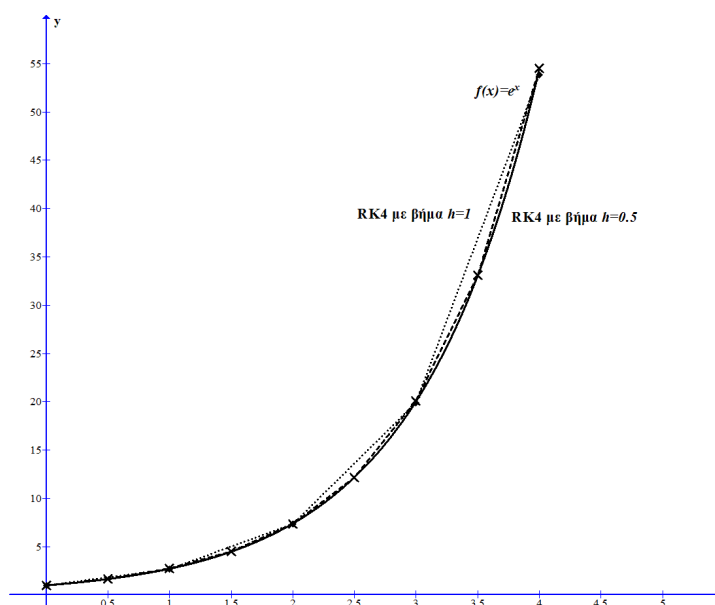
Βήμα 3

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_2, y_2) = y_2 = 7.335069 \\ k_2 &= f\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + h\frac{1}{2}k_1\right) = y_2 + \frac{1}{2}k_1 = 11.002604 \\ k_3 &= f\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + h(0k_1 + \frac{1}{2}k_2)\right) = y_2 + \frac{1}{2}k_2 = 12.836371 \\ k_4 &= f\left(x_2 + 1h, y_2 + h(0k_1 + 0k_2 + 1k_3)\right) = y_2 + k_3 = 20.171441 \\ y_3 &= y_2 + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) = 19.865813 \end{aligned}$$

Βήμα 4

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_3, y_3) = y_3 = 19.865813 \\
 k_2 &= f\left(x_3 + \frac{1}{2}h, y_3 + h\frac{1}{2}k_1\right) = y_3 + \frac{1}{2}k_1 = 29.7987196 \\
 k_3 &= f\left(x_3 + \frac{1}{2}h, y_3 + h(0k_1 + \frac{1}{2}k_2)\right) = y_3 + \frac{1}{2}k_2 = 34.765173 \\
 k_4 &= f\left(x_3 + 1h, y_3 + h(0k_1 + 0k_2 + 1k_3)\right) = y_3 + k_3 = 54.630986 \\
 y_4 &= y_3 + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) = 53.803244
 \end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα αυτά (μαζί με τις προσεγγίσεις για $h = 0.5$) παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 8.5.



Σχήμα 8.5: Λύση με RK4

8.4 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 8.4.1 Λύστε με την μέθοδο Euler το ΠΑΤ

$$y'(x) = xe^{4x} - 2y(x) \text{ με } y(0) = 0$$

στο διάστημα $[0, 1]$ και βήμα $h = 0.5$.

Λύση

Η μέθοδος θα κάνει 2 βήματα και θα υπολογίσει τις προσεγγίσεις $y_1 \approx y(0.5)$ και $y_2 \approx y(1)$. Εδώ $f(x, y) = xe^{4x} - 2y(x)$ και $y_0 = 0$.

Βήμα 1 $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0 + 0.5 \cdot (0 \cdot e^{4 \cdot 0} - 2 \cdot 0) = 0$

Βήμα 2 $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 0 + 0.5 \cdot (0.5 \cdot e^{4 \cdot 0.5} - 2 \cdot 0) = 1.8473$

Άσκηση 8.4.2 Λύστε με την μέθοδο Improved Euler το ΠΑΤ

$$y'(x) = x - 2y(x) \text{ με } y(0) = 0$$

στο διάστημα $[0, 1]$ και βήμα $h = 0.5$. (Οι πράξεις να γίνουν με 4 δεκαδικά ψηφία ακρίβεια.)

Λύση

Η μέθοδος θα κάνει 2 βήματα και θα υπολογίσει τις προσεγγίσεις $y_1 \approx y(0.5)$ και $y_2 \approx y(1)$. Εδώ $f(x, y) = x - 2y(x)$ και $y_0 = 0$.

Βήμα 1 $\hat{y}_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0 + 0.5 \cdot (0 - 2 \cdot 0) = 0$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)) \\ &= 0 + \frac{0.5}{2}((0 - 2 \cdot 0) + (0.5 - 2 \cdot 0)) = 0.125 \end{aligned}$$

Βήμα 2 $\hat{y}_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 0.125 + 0.5 \cdot (0.5 - 2 \cdot 0.125) = 0.25$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_2, \hat{y}_2)) = \\ &= 0.125 + \frac{0.5}{2}((0.5 - 2 \cdot 0.125) + (1 - 2 \cdot 0.25)) \\ &= 0.125 + 0.25 \cdot (0.25 + 0.5) \\ &= 0.3125 \end{aligned}$$

Άσκηση 8.4.3 Λύστε με την μέθοδο Improved Euler το ΠΑΤ

$$y'(x) = xe^{3x} - 2y(x) \text{ με } y(0) = 0$$

στο διάστημα $[0, 1]$ και βήμα $h = 0.5$. Το πρόβλημα έχει ακριβή λύση $y(x) = \frac{1}{5}xe^{3x} - \frac{1}{25}e^{3x} + \frac{1}{25}e^{-2x}$, υπολογίστε το απόλυτο σφάλμα σε κάθε βήμα.

Λύση

Η μέθοδος θα κάνει 2 βήματα και θα υπολογίσει τις προσεγγίσεις $y_1 \approx y(0.5)$ και $y_2 \approx y(1)$. Εδώ $f(x, y) = xe^{3x} - 2y(x)$ και $y_0 = 0$.

Βήμα 1

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0 + 0.5 \cdot (0 \cdot e^{3 \cdot 0} - 2 \cdot 0) = 0 \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)) = \\ &= 0 + \frac{0.5}{2}((0 \cdot e^{3 \cdot 0} - 2 \cdot 0) + (0.5 \cdot e^{3 \cdot 0.5} - 2 \cdot 0)) \\ &= 0 + \frac{0.5}{2}(0 + 2.2408) = 0.5602\end{aligned}$$

Βήμα 2

$$\begin{aligned}\hat{y}_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 0.5602 + 0.5 \cdot (0.5 \cdot e^{3 \cdot 0.5} - 2 \cdot 0.5602) = 1.1204 \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_2, \hat{y}_2)) = \\ &= 0.5602 + \frac{0.5}{2}((0.5 \cdot e^{3 \cdot 0.5} - 2 \cdot 0.5602) + (1 \cdot e^{3 \cdot 1} - 2 \cdot 1.1204)) \\ &= 0.5602 + \frac{0.5}{2}(1.1204 + 17.8447) \\ &= 5.3015\end{aligned}$$

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζεται το απόλυτο σφάλμα :

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y_i - y(t_i) $
0.5	0.2836	0.5602	0.2766
1	3.2190	5.3015	2.0825

8.5 Ερωτήσεις

Ερώτηση 8.5.1 Πότε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών ονομάζεται καλά τοποθετημένο;

Ερώτηση 8.5.2 Πότε μία μέθοδος επίλυσης προβλήματος αρχικών τιμών λέγεται απλού βήματος;

Ερώτηση 8.5.3 Πότε μία μέθοδος επίλυσης προβλήματος αρχικών τιμών λέγεται πολλαπλού βήματος;

Ερώτηση 8.5.4 Πότε μία μέθοδος επίλυσης προβλήματος αρχικών τιμών λέγεται άμεση;

Ερώτηση 8.5.5 Πότε μία μέθοδος επίλυσης προβλήματος αρχικών τιμών λέγεται έμμεση;

Ερώτηση 8.5.6 *Τι είναι το ολικό σφάλμα αποκοπής;*

Ερώτηση 8.5.7 *Τι είναι το τοπικό σφάλμα αποκοπής;*

Ερώτηση 8.5.8 *Πότε μία αριθμητική μέθοδος για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών θα λέμε ότι είναι τάξης p ;*

Ερώτηση 8.5.9 *Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ του τοπικού και του ολικού σφάλματος αποκοπής;*

Βιβλιογραφία

- [1] Παπαγεωργίου Γ.Σ., Τσίτουρας Χ.Γ., Αριθμητική Ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica, Εκδόσεις Σημεών (2004).
 - [2] Burden R.L., Douglas Faires J., Numerical Analysis, BROOKS/COLE (2001)
 - [3] Chapra S.C., Canale R.P., Numerical Methods for Engineers, Mc Graw-Hill (2002)
 - [4] Fausett L., Applied Numerical Analysis Using Matlab, Pearson-Prentice Hall (2008)
 - [5] Gerald C. F., Wheatley P.O., Applied Numerical Analysis , Addison-Wesley (1984)
 - [6] Mathews J.H., Fink K.D., Numerical Methods Using Matlab, Pearson-Prentice Hall (2004)
 - [7] Sauer. T., Numerical Analysis , Pearson Addison-Wesley (2006)
 - [8] Nakamura S., Numerical Analysis and Graphic Visualization with Matlab, Prentice Hall (2002)
 - [9] Konstantnidis, Applied Numerical Methods with Personal Computers, Mc Graw Hill, 1988.
 - [10] Ralston Ph., Rabinowitz, A first course in Numerical Analysis, Mc Graw Hill, Second Edition, 1978
-

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright TEI Αθήνας, Ιωάννης Φαμέλης, 2014. Ιωάννης Φαμελης. «Αριθμητική Ανάλυση». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό. Οι όροι χρήσης των έργων τρίτων επεξηγούνται στη διαφάνεια «Επεξήγηση όρων χρήσης έργων τρίτων».

Τα έργα για τα οποία έχει ζητηθεί άδεια αναφέρονται στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Επεξήγηση όρων χρήσης έργων τρίτων

©	Δεν επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου, παρά μόνο εάν ζητηθεί εκ νέου άδεια από το δημιουργό.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου και η δημιουργία παραγώγων αυτού με απλή αναφορά του δημιουργού.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-SA	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού, και διάθεση του έργου ή του παράγωγου αυτού με την ίδια άδεια.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-ND	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού. Δεν επιτρέπεται η δημιουργία παραγώγων του έργου.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-NC	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού. Δεν επιτρέπεται η εμπορική χρήση του έργου.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-NC-SA	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού και διάθεση του έργου ή του παράγωγου αυτού με την ίδια άδεια. Δεν επιτρέπεται η εμπορική χρήση του έργου.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-NC-ND	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού. Δεν επιτρέπεται η εμπορική χρήση του έργου και η δημιουργία παραγώγων του.
διαθέσιμο με άδεια CC0 Public Domain	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου, η δημιουργία παραγώγων αυτού και η εμπορική του χρήση, χωρίς αναφορά του δημιουργού.
διαθέσιμο ως κοινό κτήμα	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου, η δημιουργία παραγώγων αυτού και η εμπορική του χρήση, χωρίς αναφορά του δημιουργού.
χωρίς σήμανση	Συνήθως δεν επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- Το Σημείωμα Αναφοράς
- Το Σημείωμα Αδειοδότησης
- Τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- Το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.