

## Προσδιορισμός του συντελεστή εσωτερικής τριβής (ιξώδους) υγρών με την μέθοδο της πτώσης μικρών σφαιρών

### 1. Εισαγωγή

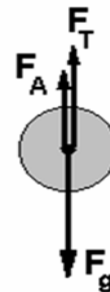
Η έννοια της τριβής υπεισέρχεται και στα ρευστά και είναι σημαντική για πολλές διαφορετικές τεχνολογικές εφαρμογές. Θέματα λίπανσης κινούμενων επιφανειών ή μηχανών για τη μείωση των τριβών, προβλήματα μεταφοράς ρευστών δι' αγωγών ή προβλήματα που έχουν να κάνουν με την ροή του αίματος στο αγγειακό σύστημα του ανθρώπου αντιμετωπίζουν τον παράγοντα εσωτερικής τριβής.

Η μέθοδος πτώσης των μικρών σφαιρών είναι μια παλαιά και πολύ διαδεδομένη εργαστηριακή μέθοδος, για τον προσδιορισμό του συντελεστή εσωτερικής τριβής ρευστών, η οποία μαζί με τις μεθόδους του Oswald και του Hoerpler χρησιμοποιείται για μετρήσεις και για εργαστηριακά πειράματα επίδειξης. Τα σφάλματα που υπεισέρχονται στη μέτρηση όλων των παραμέτρων, τα οποία οφείλονται κυρίως στην ιδιαίτερα μεγάλη εξάρτηση του ιξώδους από τη θερμοκρασία, είναι ο κύριος λόγος που δεν επιτρέπει τον εύκολο και ακριβή προσδιορισμό της τιμής του.

Ο συντελεστής εσωτερικής τριβής  $\eta$  ή όπως αλλιώς ονομάζεται, το δυναμικό ιξώδες (viscosity), αποτελεί μία χαρακτηριστική σταθερά του υλικού, της οποίας το μέτρο εξαρτάται σημαντικά από το είδος του ρευστού, τις διαμοριακές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα στρώματα του, την σύστασή του (Νευτώνιο ή μη Νευτώνιο ρευστό) και από τη θερμοκρασία. Κατά κανόνα, στα υγρά με την άνοδο της θερμοκρασίας το ιξώδες μειώνεται, ενώ στα αέρια συμβαίνει το αντίθετο, δηλ. το ιξώδες αυξάνεται όσο ανέρχεται η θερμοκρασία.

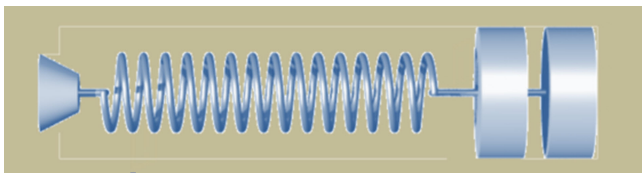
### 2. Θεωρία

Στο πείραμά μας εφαρμόζουμε τη μέθοδο πτώσης μικρών σφαιρών. Αφήνουμε να πέσει στην επιφάνεια του υγρού, χωρίς αρχική ταχύτητα, μια σφαίρα, η οποία αρχικά και μετά την είσοδό της στο υγρό, κινείται επιταχυνόμενη υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης  $F_g$ , της δύναμης τριβής  $F_T$  και της άνωσης  $F_A$ .



Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση της σφαίρας είναι:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_g - F_A - F_T \quad (1)$$



Θεωρώντας την ροή του υγρού γύρω από τη σφαίρα *στρωτή*, ισχύει ο νόμος του *Stokes*, σύμφωνα με τον οποίο, για σχετικά μικρές ταχύτητες, η δύναμη της τριβής  $F_T$  που δυσχεραίνει την κίνηση του σώματος, είναι ανάλογη ενός συντελεστή μορφής του σώματος  $K$  (για σφαίρα  $K=6\pi r$ ), της ταχύτητας κίνησης  $v$  και του συντελεστή εσωτερικής τριβής  $\eta$  του υγρού.

$$\text{νόμος Stokes: } F_T = 6 \pi r v \eta \quad (2)$$

Με την πτωτική κίνηση, αυξάνεται η ταχύτητα και στον ίδιο βαθμό αυξάνεται και η τριβή, με αποτέλεσμα αυτή να αποκτά μια τιμή ίση με το βάρος του σώματος. Η δύναμη της τριβής έτσι αντισταθμίζει πλήρως την βαρυτική δύναμη και το σώμα πλέον συνέπεια μηδενικής συνισταμένης δύναμης πέφτει με σταθερή ταχύτητα, εκτελώντας ομαλή ευθύγραμμη κίνηση. Η ταχύτητα που έχει αποκτήσει το σώμα στην περίπτωση αυτή είναι η οριακή ταχύτητα  $v_{op}$  που είναι χαρακτηριστική τόσο για το σώμα όσο και για το ρευστό.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση κίνησης, τις εκφράσεις των επιμέρους δυνάμεων (λαμβάνεται θετική η φορά κίνησης του σώματος):

- α) του βάρους  $F_g = m g = \rho_\sigma V g$ ,
- β) της τριβής  $F_T = -6 \pi r v \eta$  και
- γ) της άνωσης  $F_A = -\rho_\nu V g$ ,

και δεδομένου ότι η επιτάχυνση είναι μηδενική, προκύπτει η Σχέση (3):

$$0 = \rho_\sigma \cdot g \cdot V - \rho_\nu \cdot g \cdot V - 6 \cdot \pi \cdot r \cdot v_{op} \cdot \eta \quad (3)$$

στην οποία με αντικατάσταση της Σχέσης (4) για τον όγκο (σφαιρικό σώμα)

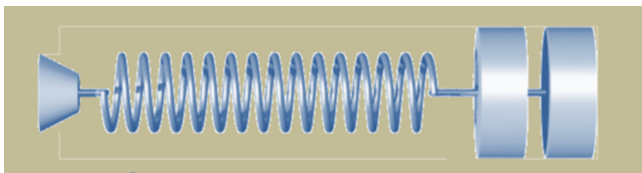
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad (4)$$

προκύπτει για τον συντελεστή εσωτερικής τριβής  $\eta$  σχέση (5):

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot r^2 \cdot \frac{(\rho_\sigma - \rho_\nu)}{v_{op}} \cdot g \quad (5)$$

όπου :  $\rho_\nu$  = πυκνότητα υγρού,  $\rho_\sigma$  = πυκνότητα σφαίρας,  $r$  = ακτίνα σφαίρας,  $V$  = όγκος της σφαίρας και  $g$  = επιτάχυνση της βαρύτητας

Ο νόμος του *Stokes* ισχύει για *στρωτή ροή* και στην περίπτωση που το πεδίο ροής είναι απεριόριστα εκτενές. Στον πείραμά μας, όμως, υπεισέρχονται *φαινόμενα τοιχωμάτων* στο βαθμό που η διάμετρος της σφαίρας είναι συγκρίσιμη με τη διάμετρο του σωλήνα. Έτσι η κίνηση της σφαίρας, ήτοι η ροή του υγρού γύρω από τη σφαίρα, επηρεάζεται σημαντικά, αφού τα στρώματα του ρευστού που την περιβάλλουν και κινούνται με την ίδια ταχύτητα με αυτήν, αλληλεπιδρούν με τα αντίστοιχα στρώματα του ρευστού που παραμένουν ακίνητα, προσκολλημένα στα τοιχώματα του σωλήνα.



Για τις συνθήκες του πειράματος ισχύει ο εμπειρικός νόμος του *Ladenburg* που αναλαμβάνει τη διόρθωση, λόγω πεπερασμένης ακτίνας σωλήνα  $R$  και σχετικά εκτενούς ακτίνας  $r$  της σφαίρας. Η διορθωμένη και η πειραματική τιμή του συντελεστή εσωτερικής αντίστασης είναι  $\eta_{\text{διορθ}}$  και  $\eta_{\text{πειρ}}$  αντίστοιχα και συνδέονται στην Σχέση (6)

$$\eta_{\text{διορθ}} = \eta_{\text{πειρ}} \cdot \left[ 1 + 2.104 \cdot \left( \frac{r}{R} \right) + 2.09 \cdot \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0.95 \cdot \left( \frac{r}{R} \right)^3 \right]^{-1} \quad (6)$$

η οποία απλοποιείται στην μορφή της ακόλουθης Σχέσης (7)

$$\eta_{\text{διορθ}} = \frac{\eta_{\text{πειρ}}}{\left( 1 + 2.4 \cdot \frac{r}{R} \right)} \quad (7)$$

### Οριακή ταχύτητα

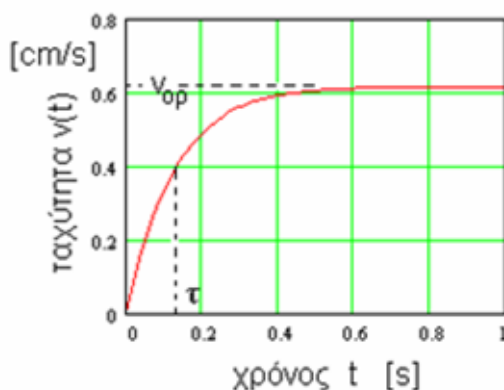
Η οριακή ταχύτητα για ένα συγκεκριμένο ρευστό και για δεδομένο σώμα μπορεί να βρεθεί υπολογιστικά ως ακολούθως: λύνοντας τη σχέση (3) ως προς  $v_{\text{ορ}}$  και αντικαθιστώντας την στη σχέση (1), προκύπτει η διαφορική εξίσωση :

$$b \cdot \frac{dv}{dt} = v - v_{\text{ορ}} \quad (8)$$

όπου είναι

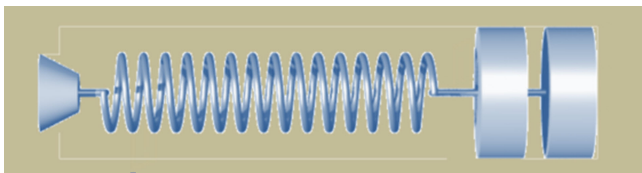
$$b = 2 \cdot r^2 \frac{\rho_{\sigma}}{9 \cdot \eta} \quad (9)$$

Η επίλυση της (8) δίνει την ακόλουθη εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της ταχύ-



Σχήμα 1. Γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος συναρτήσει του χρόνου, όταν αυτό κινείται μέσα στο ρευστό, έως ότου αποκτήσει οριακή τιμή ταχύτητας.

τητας στον χρόνο :



$$v(t) = v_{op} \cdot (1 - e^{-t/b}) \quad (10)$$

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης αυτής φαίνεται στο Σχήμα 1.

Ο συντελεστής **b** έχει διαστάσεις χρόνου και καλείται *χρόνος αποκατάστασης*. Σε χρόνο μερικές φορές πολλαπλάσιο του **b** η ταχύτητα του σώματος έχει αποκτήσει την οριακή τιμή της. Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται η καμπύλη της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου, σχέση (10), η οποία αποκτά οριακή τιμή στην οριακή ταχύτητα  $v_{op}$ .

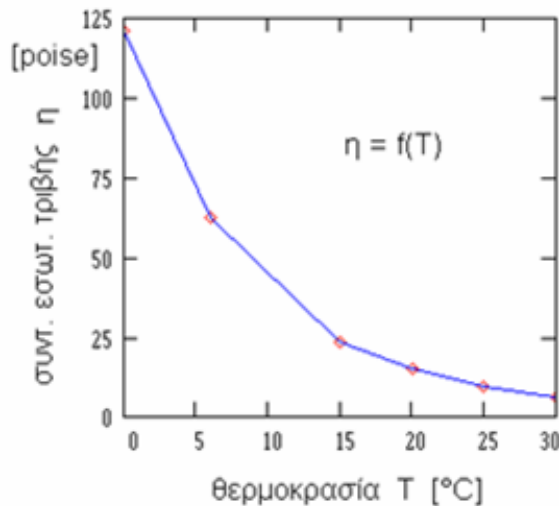
Επίσης στο διάγραμμα σημειώνεται ο *χρόνος αποκατάστασης  $\tau$*  κατά τον οποίον η ταχύτητα έχει αποκτήσει περίπου το 60% της τελικής, οριακής της τιμής.

Υπολογίζοντας την σταθερά **b** μπορεί εύκολα να βρει κανείς την απόσταση **x** από την επιφάνεια του υγρού, τουτέστιν το βάθος για το οποίο το σώμα εισερχόμενο στο ρευστό αποκτά οριακή ταχύτητα. Σ' αυτό το σημείο προτείνεται να τοποθετηθεί η πρώτη φωτοπύλη.

Η απόσταση αυτή μπορεί να προσδιοριστεί και πειραματικά. Ας προταθεί γι' αυτόν τον σκοπό κατάλληλη πειραματική διαδικασία.

### Ο συντελεστή εσωτερικής τριβής και η θερμοκρασία

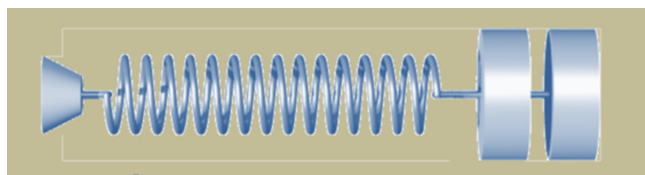
Η εξάρτηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής από τη θερμοκρασία για καθαρή γλυκερίνη φαίνεται από την μορφή της καμπύλης στην ακόλουθη γραφική παράστα-



Σχήμα 2. Γραφική παράσταση του συντελεστή εσωτερικής τριβής της γλυκερίνης συναρτήσει της θερμοκρασίας.

ση, στην οποία τα δεδομένα προέκυψαν από πειραματικές μετρήσεις.

Χαρακτηριστικές τιμές του συντελεστή εσωτερικής τριβής, του ιξώδους, για διαφορετικά υλικά (ρευστά) δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:



<i>Είδος ρευστού</i>	Θερμοκρασία T σε [°C]	Ιξώδες η σε [Pa s]
Νερό	0	0,001808
νερό	20	0,001008
νερό	100	0,000285
Αιθαλόλη	20	0,001250
Γλυκερίνη (καθαρή)	20	1,490
Ρετσινόλαδο	20	0,969
Λαδι μηχανής πχ SAE 20W50	20	0.31
αέρας	0	0,00001733

Η διάσταση του δυναμικού ιξώδους είναι :

$$\text{Δύναμη Χρόνος Μήκος}^{-2} = \text{μάζα μήκος}^{-1} \text{ χρόνος}^{-1}$$

Μονάδα μέτρησης του δυναμικού ιξώδους είναι στο **S.I.** το **[Pa s]**, ενώ συχνά στην πράξη χρησιμοποιείται και το **Poise [P]** με το υποπολλαπλάσιό του [cP] ( $1 \text{ cP} = 10^{-2} \text{ P}$ ).

$$1 [\text{Pa s}] = 10 [\text{poise}] = 10^2 \text{ cP} = 1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

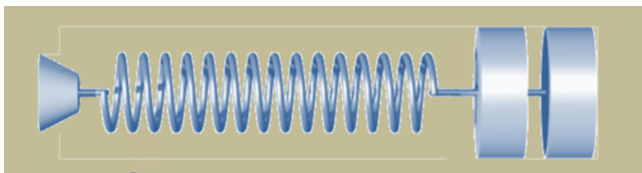
Εκτός από το **δυναμικό ιξώδες η**, ένα άλλο χρήσιμο μέγεθος που ορίζεται ως ο λόγος του δυναμικού ιξώδους προς την πυκνότητα του υγρού, είναι το **κινηματικό ιξώδες ν**.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho_0} \quad (11)$$

Μονάδα μέτρησης του κινηματικού ιξώδους είναι το **Stokes [St]** και το **centiStokes [cSt]**.

$$\text{St} = 10^2 \text{ cSt} = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Υπολογίζοντας τα μεγέθη που υπεισέρχονται στην Σχέση (5) για τον υπολογισμό του συντελεστή εσωτερικής τριβής με βάση το σύστημα CGS, δηλαδή την μάζα σε g, την απόσταση σε cm, την πυκνότητα σε  $\text{g/cm}^3$ , το  $g=980 \text{ cm/s}^2$  η τιμή που προκύπτει για το ιξώδες είναι σε Poise.



## Πειραματική διάταξη

Για την εκτέλεση της άσκησης χρησιμοποιούνται δύο εκδοχές εναλλακτικών διατάξεων: **α)** η απλή εκδοχή, αποτελούμενη από έναν κυλινδρικό σωλήνα μήκους περίπου 50 cm, στην οποία η μέτρηση γίνεται με το χέρι, και **β)** εναλλακτικά, στην πιο σύνθετη μορφή της, όπως η διάταξη που φαίνεται στο σχήμα 1, όπου για την ακριβέστερη μέτρηση του χρόνου έχουν προστεθεί στον σωλήνα δύο φωτοπύλες.

Οι φωτοπύλες αποτελούνται από ένα LED ως πηγή φωτός και μια φωτοαντίσταση ως ανιχνευτή και συνδέονται με τροφοδοτικό τάσης και ηλεκτρονικό χρονόμετρο αντίστοιχα.

Έχουν τοποθετηθεί σε δύο σημεία A και B στον κυλινδρικό σωλήνα που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L και ανιχνεύουν την διέλευση του πύπτοντος σώματος για την μέτρηση του χρόνου πτώσης: το περασμα από το σημείο A σκιάζει πρόσκαιρα την φωτοαντίσταση και μεταβάλλει το σήμα εισόδου στο ρολόι, με αποτέλεσμα να το θέτει σε λειτουργία και να αρχίζει να μετράει τον χρόνο, ενώ μετά από κάποιο χρονικό διάστημα στο σημείο B το αντίστοιχο σήμα περατώνει την μέτρηση.

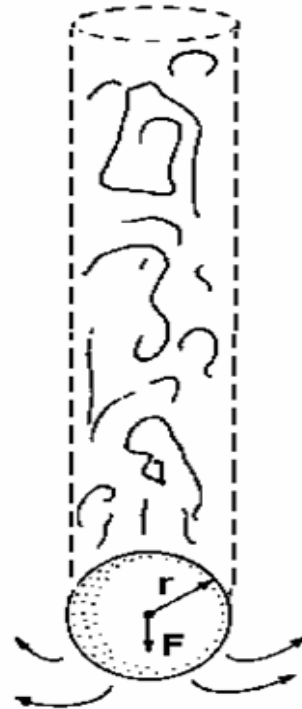
Η ένδειξη στο ρολόι δείχνει τον ακριβή χρόνο διέλευσης  $\Delta t$  του σώματος από τα δύο αυτά σημεία που απέχουν απόσταση L.

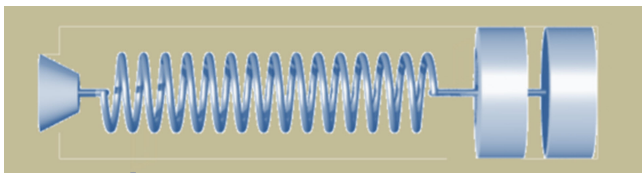
Η ταχύτητα  $v$ , εν προκειμένω η οριακή ταχύτητα  $v_{op}$  του σώματος που μας ενδιαφέρει στον πείραμά μας εύκολα προσδιορίζεται ως:

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

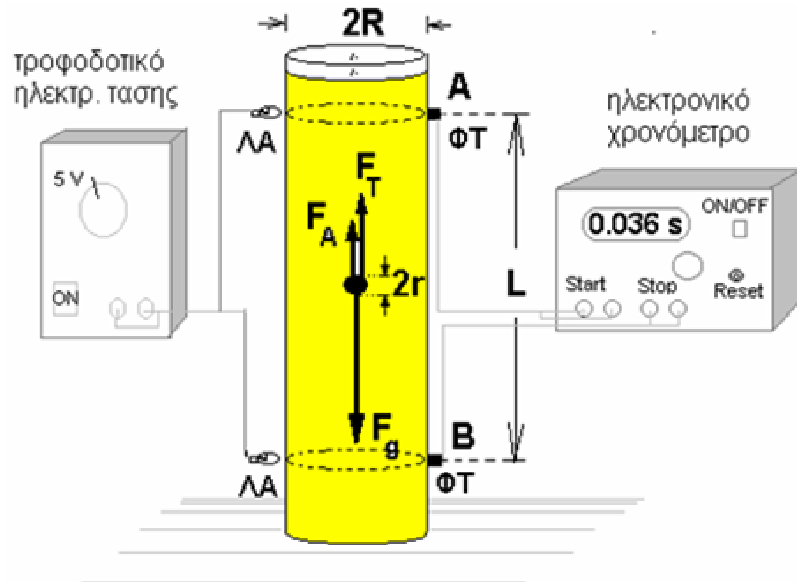
Εκτός των παραπάνω για τη διεξαγωγή του πειράματος χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα παρελκόμενα υλικά και όργανα:

- τα δοκίμια (υάλινες σφαίρες),
- ένα πυκνόμετρο,
- ένας ζυγός ακρίβειας,
- ένα διαστημόμετρο,
- ένα μικρόμετρο,
- ένα χρονόμετρο
- μια λαβίδα,
- ένα θερμόμετρο και
- μία μετροταινία (κανόνας) και
- το ρευστό (Γλυκερίνη)





Το σώμα που χρησιμοποιείται ως δοκίμιο είναι μια σφαίρα από κάποιο υλικό (γυαλί, μέταλλο, πλαστικό), με δεδομένη πυκνότητα και όγκο. Η επιφάνειά του διαβρέχεται από το ρευστό, έτσι που ένα στρώμα του να παραμένει κολλημένο στην επιφάνεια του σώματος και αυτό το στρώμα να αλληλεπιδρά με τα υπόλοιπα, επόμενα γειτονικά στρώματα του ρευστού. Το σώμα χρησιμοποιείται στην μέθοδο πτώσης μικρών σφαιρών ως δείκτης και μόνο για τον προσδιορισμό της εσωτερικής τριβής του ρευστού.



Σχήμα 3. Πειραματική διάταξη μέτρησης ιξώδους με τη μέθοδο πτώσης μικρών σφαιρών.

Για λόγους στατιστικής χρησιμοποιούνται περισσότερες σφαίρες κάθε φορά, προκειμένου να περιοριστεί στο ελάχιστο δυνατόν το σφάλμα από τις μετρήσεις των διαφόρων μεγεθών που υπεισέρχονται στις σχέσεις (5 και 7) για τον προσδιορισμό του ιξώδους.

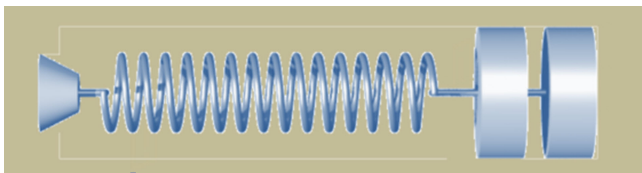
### Υπολογισμός της πυκνότητας του σώματος

Η πυκνότητα του σώματος υπολογίζεται από τις μετρήσεις της μάζας του  $m$ , μέσω ζύγισης και του όγκου του  $V$ , μέσω μέτρησης της διαμέτρου  $d$  ( $r = d/2$ ) του σώματος :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\rho = \frac{3 \cdot m}{4\pi r^3} \quad (12)$$



### Πειραματική διαδικασία

1. Αναγνωρίσατε τη διάταξη και τα όργανα που θα χρησιμοποιήσετε.
2. Επιλέξατε πέντε όμοιες και καθαρές σφαίρες και μετρήσατε τη διάμετρο  $d$  (μικρόμετρο) και τη μάζα  $m$  (ζυγός) καθεμιάς από αυτές, και σημειώσατε τις μέσες τιμές τους:

$$d = \dots\dots\dots [\text{cm}] \quad m = \dots\dots\dots [\text{g}]$$

3. Υπολογίσατε την πυκνότητα  $\rho_{\text{σώμα}}$  των σφαιρών με τη βοήθεια της σχέσης (12) και μετρήσατε την πυκνότητα του υγρού χρησιμοποιώντας το πυκνόμετρο (ή λάβετε υπόψη χωρίς μέτρηση την γνωστή τιμή της).

$$\rho_{\text{σώμα}} = \dots\dots\dots [\text{g/cm}^3] \quad \rho_{\text{υγρό}} = \dots\dots\dots [\text{g/cm}^3]$$

4. Μετρήσατε τη θερμοκρασία  $T$  του ρευστού (θερμόμετρο), την εσωτερική διάμετρο του κυλινδρικού σωλήνα  $R$  (διαστημόμετρο) και την απόσταση  $L$  μεταξύ των δύο φωτοπυλών (μετροταινία)

$$T = \dots\dots\dots [^{\circ}\text{C}]$$
$$R = \dots\dots\dots [\text{cm}]$$
$$L = \dots\dots\dots [\text{cm}]$$

5. Έχοντας προηγούμενα ενεργοποιήσει το ηλεκτρονικό χρονόμετρο και τις φωτοπύλες τροφοδοτώντας τους λαμπτήρες με τάση έως 6 V, αφήσατε διαδοχικά τις (δέκα) σφαίρες να πέσουν στην επιφάνεια του υγρού, από μικρό ύψος, δηλ. χωρίς αρχική ταχύτητα και στη διεύθυνση του άξονα του κυλίνδρου, σημειώνοντας και καταχωρώντας στον πίνακα τιμών τον χρόνο  $\Delta t$  που χρειάστηκε η κάθε σφαίρα ώστε να διανύσει την απόσταση  $L$ .

6. Υπολογίσατε τις επιμέρους οριακές ταχύτητες  $v_{\text{ορ}} = L/\Delta t$  και από αυτές τη μέση οριακή ταχύτητα στον πίνακα τιμών.

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} = \dots\dots\dots [\text{cm/s}]$$

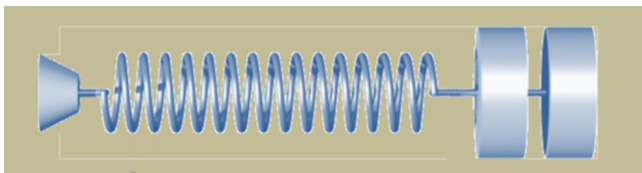
7. Υπολογίσατε με τη βοήθεια της Σχέσης (3) την τιμή του συντελεστή εσωτερικής τριβής  $\eta$  του ρευστού.

$$\eta = \dots\dots\dots [\text{Pa s}]$$

8. Χρησιμοποιώντας το διορθωτικό παράγοντα του *Ladenburg* (5), υπολογίσατε τη διορθωμένη τιμή του  $\eta_{\text{διορθ}}$

$$\eta_{\text{διορθ}} = \dots\dots\dots [\text{Pa s}]$$

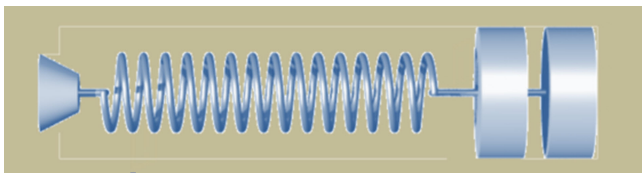




9. Σχολιάσατε το αποτέλεσμα της μέτρησής σας κάνοντας σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές του πίνακα και μία εκτίμηση των σφαλμάτων που υπεισήλθαν στις μετρήσεις σας.
10. Υπολογίσατε με τη βοήθεια της σχέσης (11) την απόσταση  $x$  από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού που απαιτείται να διανύσει η σφαίρα χωρίς αρχική ταχύτητα, ώστε να αποκτήσει την οριακή ταχύτητα  $v_{op}$ .

**Πίνακας 1**

A/A	διάμετρος σφαίρας $d_i$ σε [cm]	μέση διάμετρος σφαιρών $d$ σε [cm]	χρόνος $t_i$ σε [s]	οριακή ταχύτητα $v_{op}$ σε [cm/s]	μέση οριακή ταχύτητα $v_{op}$ σε [cm/s]	συντελεστής εσωτερικής τριβής $\eta$ σε [Pa s]	διορθωμένος συντελεστής εσωτερικής τριβής $\eta_{διορθ}$ σε [Pa s]
1							
2							
3							
4							
5							

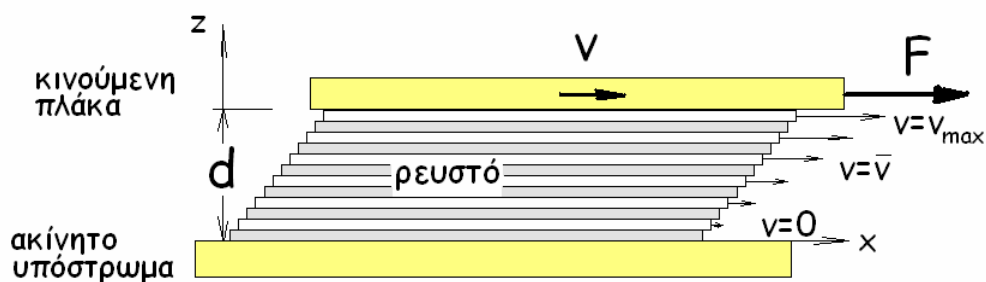


## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Η τριβή στα ρευστά. Ο νόμος του Stokes

Κινείται ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα σε ένα ρευστό μέσο, και ενώ αυτό διαγράφει μια ομαλή ευθύγραμμη κίνηση, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί και γνωρίζουμε, είναι απαραίτητο να ασκείται στο σώμα μία δύναμη, ώστε να διατηρηθεί η κίνησή του. Το γεγονός αυτό δημιουργεί ένα παράδοξο που αντιβαίνει στην καθημερινή εμπειρία μας και στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, σύμφωνα με τον οποίο κάθε δύναμη που ασκείται σε σώμα επιφέρει σ' αυτό επιτάχυνση.

Στην πραγματικότητα στο σώμα επιδρά μια δύναμη, αυτή της τριβής, η οποία τείνει να αναιρέσει την κίνηση του σώματος και η οποία αποκτά με την ταχύτητα του κινη-



Σχήμα 4. Σχηματική παράσταση μιας κινούμενης πλάκας με σταθερή ταχύτητα

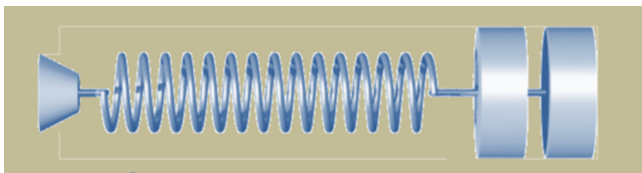
τού τιμή που γίνεται ίση με αυτή της κινητήριας δύναμης, οπότε το σώμα κινείται πλέον ισοταχώς. Στην άσκηση αυτής της δύναμης της τριβής συμμετέχουν τα στρώματα του ρευστού, του μέσου που περιβάλλουν το σώμα. Το γεγονός αυτό γίνεται κατανοητό από το ακόλουθο παράδειγμα:

Παρατηρεί κανείς την συμπεριφορά μιας πλάκας στην οποία ασκείται δύναμη  $F$  και κινείται παράλληλα προς το υπόστρωμα με σταθερή ταχύτητα  $v$ . Ανάμεσα στην πλάκα και στο υπόστρωμα υπάρχει ρευστό πάχους  $d$ , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από διαδοχικά στρώματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.

Το ανώτατο στρώμα που εφάπτεται στην πλάκα κινείται με την ταχύτητα  $\omega$  που έχει η ίδια η πλάκα, ενώ το κατώτατο στρώμα παραμένει ακίνητο. Οι διαμοριακές δυνάμεις συνοχής που αναπτύσσονται ανάμεσα στα επιμέρους στρώματα του ρευστού εκδηλώνονται ως δυνάμεις τριβής ανάμεσά τους.

Οι διαμοριακές δυνάμεις συνάφειας αναγκάζουν τα ακρότατα στρώματα, το κάτω και το επάνω, να παραμένουν προσκολλημένα στην ακίνητη και στην κινούμενη πλάκα αντίστοιχα. Τα ενδιάμεσα στρώμα γλιστρούν το ένα ως προς το άλλο με τις αντίστοιχες τριβές τους, με αποτέλεσμα στο ρευστό να αναπτύσσεται ένα προφίλ ταχυτήτων με τιμή ταχύτητα που αυξάνεται βαθμιδωτά ως προς τον άξονα  $z$ .

Αποδεικνύεται πειραματικά, ότι η δύναμη  $F$  που απαιτείται για την οριζόντια κίνηση της πλάκας είναι ανάλογη της επιφάνειας  $A$  της πλάκας, της ταχύτητάς της, αντίστροφως ανάλογη του ύψους (πάχους) του εγκλωβιζόμενου ανάμεσα σε πλάκα και



υπόστρωμα ρευστού και ανάλογη μιας σταθεράς  $\eta$ , η οποία χαρακτηρίζει το ίδιο το ρευστό και καλείται **δυναμό ιξώδες** ή **συντελεστής εσωτερικής τριβής** του ρευστού. Αποτελεί μέτρο της συνοχής που εκδηλώνει το ρευστό και είναι ο καθοριστικός παράγοντας που επηρεάζει την κίνησή του.

Στο βαθμό που η ασκούμενη δύναμη  $F$  στην πλάκα επιφέρει σ' αυτήν ομαλή ευθύγραμμη κίνηση, η ίση και αντίθετη δύναμη  $F'$  που αναπτύσσεται είναι η δύναμη της τριβής στην κίνηση που αναπτύσσεται από το ρευστό.

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dz} \quad (13)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την έκφραση του **νόμου του Stokes** για ρευστά και στρωτή ροή. Ο λόγος  $dv/dz$  λέγεται βαθμίδα ταχύτητας. Είναι το πάχος του ρευστού  $d$  και η μέγιστη ταχύτητα  $v$ , η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην μορφή:

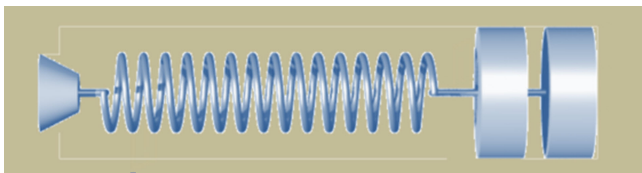
$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{d} \quad (14)$$

Ο νόμος του Stokes ισχύει για κινήσεις σωμάτων σε ρευστά, στο βαθμό που τα επιμέρους στρώματά του ρευστού γλιστρούν το ένα ως προς το άλλο, το γειτονικό του, χωρίς αυτά να αναμειγνύονται μεταξύ τους. Αυτό το είδος της κίνησης του ρευστού, της ροής του, ονομάζεται **στρωτή ροή**. Σε αντίθεση, η κίνηση, στην οποία τα στρώματα του ρευστού αναμειγνύονται και οδηγούν σε μεγαλύτερες αντιστάσεις κατά την κίνηση τους, ονομάζεται **τυρβώδης ροή**.

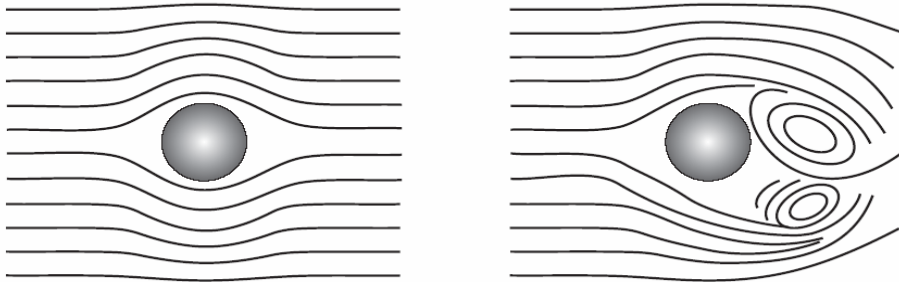
### Είδη ροής ρευστού: Στρωτή και τυρβώδης ροή

Ο τρόπος και η μορφή της κίνησης του ρευστού μέσα στο *πεδίο ροής* καθορίζει και το είδος της ροής που εκτελεί. *Ροή* είναι η χαρακτηριστικά κίνηση ενός ρευστού. Η κίνηση αυτή παρασταίνεται συχνά με τη βοήθεια των *ρευματικών γραμμών*, που είναι γραμμές κατά μήκος της κίνησής του, εφαπτόμενες της ταχύτητας κάθε σημειακής μάζας του. Μια ρευματική γραμμή ορίζει συνεπώς την τροχιά και την πορεία μιας στοιχειώδους μάζας του ρευστού. Είναι οι ρευματικές γραμμές αντίστοιχες διαφορετικών, γειτονικών στοιχειωδών μαζών παράλληλες μεταξύ τους, τότε αναφερόμαστε στο είδος της ροής που καλείται **στρωτή**. Αντιθέτως, μπλέκονται οι ρευματικές γραμμές μεταξύ τους, η ροή που αντιστοιχεί καλείται **τυρβώδης**.

Κατά μήκος μιας *φλέβας* και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές μπορεί το ρευστό να μεταβεί από την μία κατάσταση ροής στην άλλη. Η *μετάβαση* αυτή περιγράφεται μέσα από τον *αριθμό Reynolds* και το *κριτήριο μετάπτωσης* που συνδέεται μ' αυτόν. Στην τυρβώδη ροή το ρευστό βρίσκει μεγαλύτερη αντίσταση στην πορεία του, παρουσιάζει μεγαλύτερες τριβές και ως συνέπεια αυτού η παροχή του είναι σημαντικά από αυτό εξαρτώμενη.



Οι στροβιλισμοί που αναπτύσσονται στην περίπτωση της τυρβώδους ροής οδηγούν και σε ακουστικούς ήχους που καταγράφονται και είναι αυτοί που προδίδουν το είδος



Σχήμα 5. Κίνηση μιας σφαίρας μέσα σε ρευστό: **Αριστερά:** στρωτή ροή, κατά την οποία το ρευστό περιβάλλει και ρέει συμμετρικά γύρω από την σφαίρα. Τα μεμονωμένα στρώματα του ρευστού γλιστρούν το ένα ως προς το άλλο χωρίς να αναμειγνύονται μεταξύ τους. **Δεξιά:** Τυρβώδης ροή σε μεγάλες ταχύτητες. Εξ αιτίας του σχηματισμού στροβιλισμών το ρευστό αναμειγνύεται.

της ροής μέσα σε έναν σωλήνα. Στις αρτηρίες πχ το αίμα στροβιλίζει, όταν παρεμβληθεί στην πορεία του ένα εμπόδιο, γεγονός που γίνεται αντιληπτό από τον παραγόμενο ήχο (οι ακουστού μέσω στηθοσκοπίου ήχοι **Korotkoff** στην μέτρηση της αρτηριακής πίεσης του αίματος).

### Ο αριθμός Reynolds και το κριτήριο μετάπτωσης

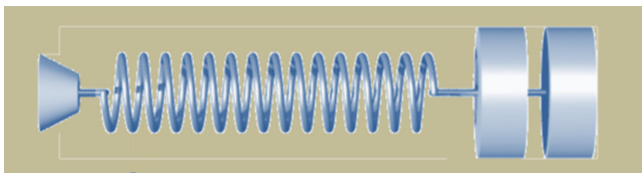
Το κριτήριο για το εάν ένα ρευστό κατά την ροή του συμπεριφέρεται στρωτά ή τυρβώδη προκύπτει από τον υπολογισμό ενός αδιάστατου μεγέθους, του αριθμού Reynolds. Ο αριθμός Reynolds που είναι ένα ημι-εμπειρικό μέγεθος, εκφράζει τον λόγο του διπλάσιου της κινητικής ενέργειας ενός στοιχειώδους όγκου του ρευστού δια των απωλειών του σε τριβή:

$$\text{Re} = \frac{2E_{\text{κιν}}}{W_{\text{τριβή}}} \quad (15)$$

Όσο μεγαλύτερη η κινητική ενέργεια του ρευστού τόσο ασταθής γίνεται η ροή, ενώ αντιθέτως η τριβή του ρευστού επιδρά κατασταλτικά και ισορροπητικά στην ροή του ρευστού. Για μικρές τιμές του αριθμού Reynolds, δηλαδή για  $E_{\text{κιν}} \ll W_{\text{τριβή}}$  η ροή είναι στρωτή. Πάνω από κάποια κρίσιμη τιμή  $R_{\text{κρίσιμη}}$  εμφανίζονται στροβιλισμοί στην ροή του ρευστού, η ροή γίνεται τυρβώδης. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε:  $E_{\text{κιν}} \gg W_{\text{τριβή}}$

Για τον υπολογισμό των συνθηκών που επηρεάζουν την ροή του ρευστού εισαγάγει κανείς ένα χαρακτηριστικό μήκος  $L$ , το οποίο περιγράφει την γεωμετρία του πεδίου ροής. Ο αριθμός Reynolds ορίζεται πλέον ως :

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\eta} \quad (16)$$



Όπου  $v$  η μέση ταχύτητα ροής του ρευστού,  $\rho$  η πυκνότητά του και  $\eta$  ο συντελεστής εσωτερικής τριβής, το ιξώδες. Για κίνηση σφαίρας μέσα σε ρευστό το  $L$  περιγράφει την διάμετρο της σφαίρας.

Η κρίσιμη τιμή  $R_{\text{κρίσιμη}}$  του αριθμού Reynolds εξαρτάται από το εκάστοτε πείραμα. Έχει προσδιοριστεί πειραματικά για μια ροή ρευστού διαμέσου σωλήνα κυκλικής διατομής, ότι η μετάβαση από την στρωτή σε τυρβώδη ροή συντελείται για  $R_{\text{κρίσιμη}} = 2300$ . Η μετάβαση αυτή δεν είναι σαφώς ορισμένη. Μπορεί να συμβεί και για μικρότερες ή λίγο μεγαλύτερες τιμές του αριθμού Reynolds. Όμως αρκεί συχνά μια μικρή διαταραχή να οδηγήσει στην μετάβαση από την μία στην άλλη κατάσταση.

Στην κίνηση σφαίρας σε ρευστό η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή συντελείται σε πολύ μικρές τιμές του αριθμού Reynolds. Έχει δειχθεί πειραματικά, ότι η κρίσιμη τιμή του είναι περίπου η μονάδα:  $R_{\text{κρίσιμη}} \approx 1$ .

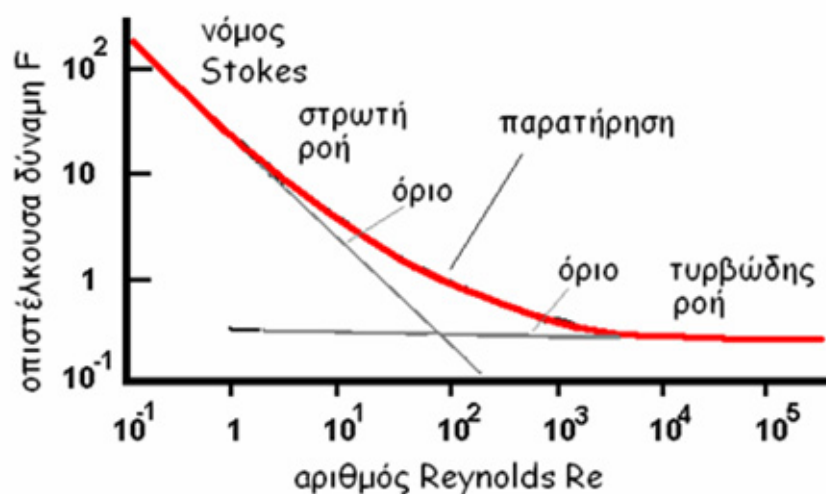
$$L = 2 \cdot r \Rightarrow Re = \frac{\rho \cdot v \cdot 2 \cdot r}{\eta} \quad (17)$$

Η συνθήκη για τον καθορισμό του είδους ροής που λαμβάνει χώρα σε ένα πεδίο ροής, υπολογίζεται βάσει της σχέσης τιμών του  $R_{\text{κρίσιμη}}$  και του  $Re$ :

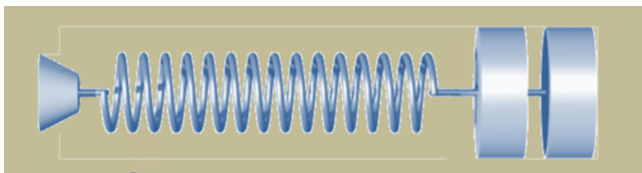
$$R_{\text{κρίσιμη}} > Re : \text{τυρβώδης ροή} \quad R_{\text{κρίσιμη}} < Re : \text{στρωτή ροή.} \quad (18)$$

Οι ανισότητες αυτές αποτελούν σε γενικές γραμμές το βασικό κριτήριο μετάπτωσης από μια μορφή ροής στην άλλη.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι για μεγάλη τιμή στην οπισθέλκουσα δύναμη  $F$ , δηλαδή μεγάλη τριβή για το ρευστό, οδηγεί σε στρωτή ροή, ενώ το αντίθετο προκαλεί



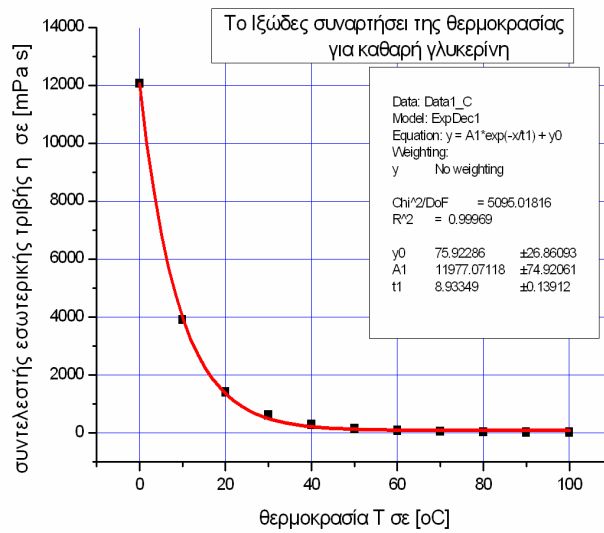
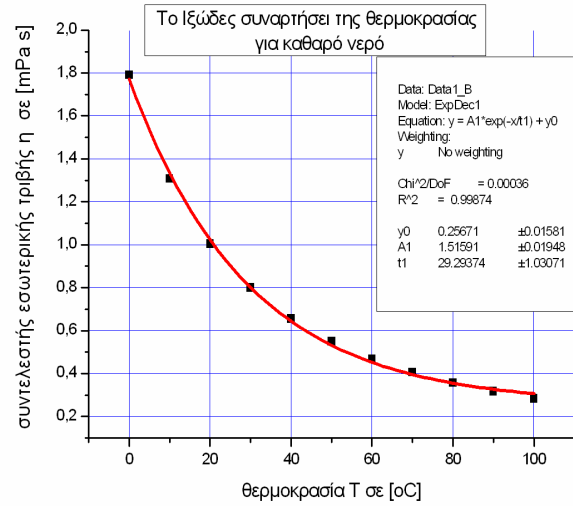
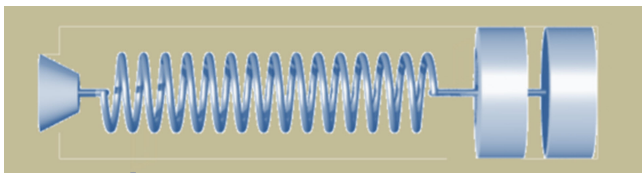
Σχήμα 6. Το διάγραμμα δείχνει το όριο ισχύος του νόμου του Stokes και την περιοχή μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή για ένα υγρό, ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds.



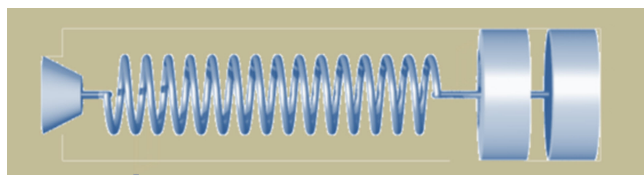
μετάβαση σε τυρβώδη ροή. Η ενδιάμεση κατάσταση μετάβασης είναι εκτενής και πολύπλοκη στην μελέτη της. Αρκεί μια μικρή διαταραχή ώστε να ευνοηθεί η μετάβαση από την μία στην άλλη κατάσταση.

### Συμπληρωματική επεξεργασία δεδομένων

1. Λαμβάνοντας υπόψη τα πειραματικά δεδομένα των μετρήσεων και τα στοιχεία και παραμέτρους του ρευστού και του σώματος να υπολογίσετε κάνοντας χρήση της σχέσης (16) εάν ικανοποιείται το κριτήριο της σχέσης (17), δηλαδή εάν έχουμε στρωτή ή τυρβώδη ροή του ρευστού γύρω από την σφαίρα κατά την πτωτική της κίνηση.
2. Να υπολογιστεί με τα δεδομένα και με βάση την σχέση (12) το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.
3. Γράψτε τα αποτελέσματα και κάντε ένα πλήρη σχολιασμό σχετικά με τα σφάλματα των μετρήσεων και ως προς την ακρίβεια και την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 7. Γραφική παράσταση της συνάρτησης του ιξώδους από την θερμοκρασία **α)** για καθαρό νερό και **β)** για καθαρή γλυκερίνη.



**Πίνακας** της τιμής ιξώδους  $\eta$  [mPa s] για δεδομένα διαλύματα γλυκερίνης-νερού σε συνάρτηση με την θερμοκρασία

(πηγή: <http://www.dow.com/glycerine/resources/table18.htm>)

Viscosity of Aqueous Glycerine Solutions in Centipoises/mPa s											
Glycerine percent weight	Temperature (°C)										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0 <sup>(1)</sup>	1.792	1.308	1.005	0.8007	0.6560	0.5494	0.4688	0.4061	0.3565	0.3165	0.2838
10	2.44	1.74	1.31	1.03	0.826	0.680	0.575	0.500	–	–	–
20	3.44	2.41	1.76	1.35	1.07	0.879	0.731	0.635	–	–	–
30	5.14	3.49	2.50	1.87	1.46	1.16	0.956	0.816	0.690	–	–
40	8.25	5.37	3.72	2.72	2.07	1.62	1.30	1.09	0.918	0.763	0.668
50	14.6	9.01	6.00	4.21	3.10	2.37	1.86	1.53	1.25	1.05	0.910
60	29.9	17.4	10.8	7.19	5.08	3.76	2.85	2.29	1.84	1.52	1.28
65	45.7	25.3	15.2	9.85	6.80	4.89	3.66	2.91	2.28	1.86	1.55
67	55.5	29.9	17.7	11.3	7.73	5.50	4.09	3.23	2.50	2.03	1.68
70	76	38.8	22.5	14.1	9.40	6.61	4.86	3.78	2.90	2.34	1.93
75	132	65.2	35.5	21.2	13.6	9.25	6.61	5.01	3.80	3.00	2.43
80	255	116	60.1	33.9	20.8	13.6	9.42	6.94	5.13	4.03	3.18
85	540	223	109	58	33.5	21.2	14.2	10.0	7.28	5.52	4.24
90	1310	498	219	109	60.0	35.5	22.5	15.5	11.0	7.93	6.00
91	1590	592	259	127	68.1	39.8	25.1	17.1	11.9	8.62	6.40
92	1950	729	310	147	78.3	44.8	28.0	19.0	13.1	9.46	6.82
93	2400	860	367	172	89	51.5	31.6	21.2	14.4	10.3	7.54
94	2930	1040	437	202	105	58.4	35.4	23.6	15.8	11.2	8.19
95	3690	1270	523	237	121	67.0	39.9	26.4	17.5	12.4	9.08
96	4600	1580	624	281	142	77.8	45.4	29.7	19.6	13.6	10.1
97	5770	1950	765	340	166	88.9	51.9	33.6	21.9	15.1	10.9
98	7370	2460	939	409	196	104	59.8	38.5	24.8	17.0	12.2
99	9420	3090	1150	500	235	122	69.1	43.6	27.8	19.0	13.3
100	12070	3900	1410	612	284	142	81.3	50.6	31.9	21.3	14.8

<sup>(1)</sup> Viscosity of water taken from "Properties of Ordinary Water-Substance." N.E. Dorsey, p. 184. New York (1940)